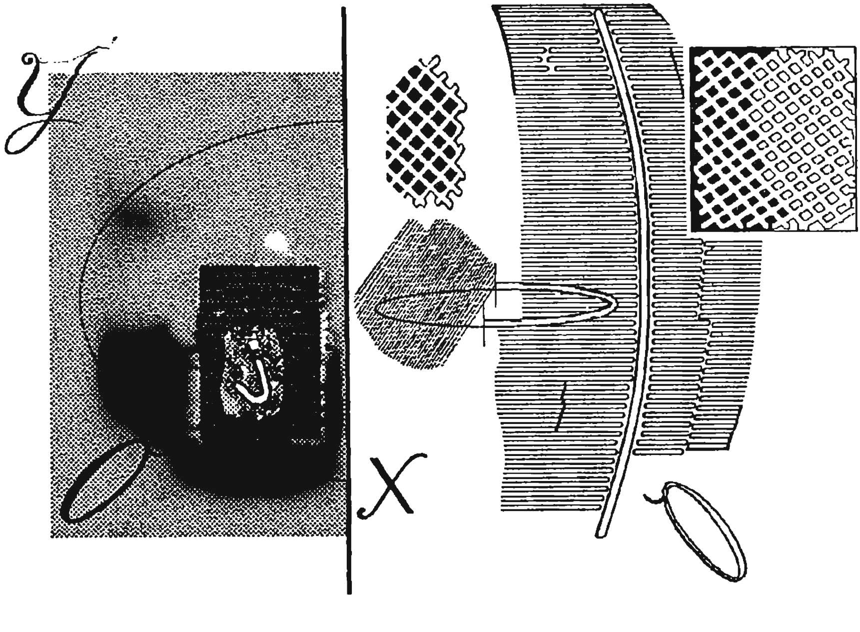
ПАВЕЛ ФЛОРЕНСКИЙ



МНИМОСТИ В ГЕОМЕТРИИ

ИЗД-
ВО
ПОМОРЬЕ

Павел Флоренский

МНИМОСТИ В ГЕОМЕТРИИ

Расширение области двухмерных образов геометрии

(ОПЫТ НОВОГО ИСТОЛКОВАНИЯ МНИМОСТЕЙ)

Москва
«ЛАЗУРЬ»
1991

ББК 22.151
Ф 73

Мнимости в геометрии. П.А.Флоренский.
М. «Лазурь», 1991. 96 с..

Издание подготовлено литературно-художественным и критико-публицистическим альманахом «Лазурь».

Главный редактор *Г.П.Турчина*
Зав.редакцией *А.С.Шеленкова*
Редактор *Н.С.Медведева*

Предисловие, послесловие, комментарии и общая редакция
Л.Г.Антипенко
Обложка и оформление художника *В.А.Фаворского*

Набор, реконструкция графики и изготовление оригинал-макета выполнены *В.В.Гурьяновым* и *А.А.Кольцовым* по компьютерной технологии с использованием программных средств *Xerox Ventura Publisher 2.0 (Prof. Extension)* и *PC PaintBrush IV+*.

Ф $\frac{408301201-(006)}{А69(02)-91}$ — без объявл.

ISBN 5-85806-006-4

Предисловие.

Книга «Мнимости в геометрии» является переломным этапом в жизни П.А.Флоренского. Начиная с 1922 года и кончая последним днем жизни в 1937 г. он подвергался непрерывным гонениям со стороны большевистских комиссаров: аресты, обыски, ссылки, уничтожение семейного архива и библиотеки. Внешняя канва событий, прослеживаемая в его биографии,* свидетельствует как бы о том, что причиной политических преследований Флоренского послужило содержание последнего параграфа «Мнимостей», в котором сопоставляются коперниканская и птолемеева картины мира и приводятся аргументы в защиту истинности последней. Однако, скорее всего, в этом следует видеть всего лишь некоторый повод, а не причину.

Подлинная причина выясняется после знакомства с его письмом в Политотдел, содержащим просьбу об издании книги (письмо датировано 13 сентября 1922 г.). В письме указывалось, что идеи «Мнимостей», по убеждению автора, имеют прочные конкретно жизненные корни и могут завершиться жизненным воплощением в технике, искусстве и других сферах человеческой деятельности. Не это ли естественное признание ученого насторожило захвативших власть с стране недругов России? Ведь не секрет, что им была чужда ее многовековая культура, и они не были заинтересованы в росте отечественного научно-технического потенциала.

Сегодня мы можем с полной уверенностью сказать, что «Мнимости в геометрии» вместе с другими логико-математическими и лингвистическими исследованиями Флоренского концентрируют вокруг себя множество интереснейших научно-теоретических и научно-технических проблем, дают ключ к их решению. Ряд таких проблем выносится на обсуждение в послесловии к книге в данном издании. Но об одной из них, затрагиваемой в письме в Политотдел, уместно будет сказать сразу же здесь, поскольку, похоже, она совершенно выпала из поля зрения ученых, занимающихся изучением творческого наследия Флоренского. Речь идет о связи основных идей «Мнимостей» с теоретическими концепциями электротехники. В письме говорится, что в подготавливаемых автором работах по электротехнике будет показано, как теория мнимости обретет физическое и, следовательно, техническое приложение.

И действительно, в опубликованной некоторое время спустя книге «Диэлектрики и их техническое применение» (М., 1924) Флоренский пришел к выводу, что возможны нетрадиционные, ранее немыслимые способы получения энергии при определенном сочетании вещественной и пространственной среды, которую впоследствии в квантовой теории стали называть физическим вакуумом. Источником ее могут служить процессы переменной поляризации диэлектриков или процессы перемагничивания магнетиков, а теоретическим представлением — обратные петли гистерезиса, являющиеся зеркальным отображением обычных петель. Если площадь обычной петли пропорциональна теряемой за один цикл периодического процесса энергии (затрата работы на деполяризацию или перемагничивание), то площадь зеркальной петли служит показателем не

---

* P.A.Florenskij. Mnimosti v Geometrii. Moskva, 1922. Nachdruck nebst einer einführenden Studie von Michael Hagemeister. Verlag Otto Sagner. München, 1985.

отбора энергии от исходного энергетического источника, а привнесения ее в этот источник (см. «Диэлектрики», стр. 214—215).

Такой процесс теоретически оправдывается новым представлением пространства-времени, согласно которому у пространственно-временного многообразия есть своя «изнанка», обратная «сторона», преобразующая рассеиваемую в наблюдаемых физических процессах энергию в низкоэнтропийные, ценные виды энергии. Преждевременная насильственная смерть Флоренского не позволила ему реализовать свой энергетический замысел на практике. Но проблема «экзотического» способа получения ценных видов энергии не потеряла своего значения до наших дней. Напротив, она стала даже более актуальной. Перед читателем, которого интересуют технические открытия Флоренского, в совершенно новом свете предстанут страницы старой книги «Диэлектрики и их применение в технике» после того, как он изучит «Мнимости в геометрии». Он оценит новизну ее идей, он отметит глубинный характер таких неожиданных, с точки зрения традиционной науки, аналогий, как аналогия между отрицательными площадями геометрических фигур (треугольников) в аналитической геометрии и отрицательными площадями обратных, или зеркальных, петель гистерезиса в электротехнике. Но «Мнимости в геометрии» — можно не сомневаться — с пользой для себя прочтет и логик, и психолог, и лингвист, и физик, и широко мыслящий математик. Ведь перед нами книга непреходящей ценности.

Примечания редактора, в отличие от примечаний П.Флоренского, обозначаются цифрами, обрамленными круглой скобкой. В тексте исправлен ряд опечаток, на которые мы специально не указываем.

МНИМОСТИ В ГЕОМЕТРИИ

Расширение области двухмерных образов геометрии

(Опыт нового истолкования мнимостей)

§ 1. В настоящей заметке делается попытка истолковать мнимые величины, *не* выходя при этом из первоначальных посылок аналитической геометрии на плоскости. А далее, в одном из последующих параграфов, будет показано, что предлагаемое истолкование может быть применимо и вообще к двухмерным образам на кривых поверхностях, т.е. введено в дифференциальную геометрию.

Существует несколько способов подойти к мнимостям. Из них на первом месте должна стоять, конечно, формально-арифметическая установка комплексных чисел посредством Гамильтоновских двоиц, как наиболее абстрактная. Затем идет оперативная установка комплексов, как символ операций, и, близкая к ней, установка векторная. В качестве дальнейшего конкретного оплотнения двух последних установок следует рассматривать то семейство теорий, весьма близких между собою, но не абсолютно тождественных, в котором самая плоскость делается носительницей комплексных точек. Эти теории возникали самостоятельно неоднократно; привычнее многих других имен связываются с ними имена О. К о ш и (1821, 1847), Г а у с с а (1799) и женевца Р. Ж. А р г а н д а (1806); но мысль о подобной установке мнимостей уходит своими корнями и в более глубокое и более широкое прошлое: так, в этом отношении не должны быть обойденными имена прусского геометра Г е н р и х а К ю н а (1750), нашедшего приют своему мемуару в Записках С.-Петербургской Академии Наук, датского математика К а с п а р а В е с с е л я (1797), аббата Б ю э (1806), эльзасца Ф р а н с э (1813-1815), француза М у р е й я (1828), англичанина Д ж о н а У а р р е н а (1828), итальянца О. Б е л л а в и т и с а (1832), француза Гоюэля (1867), португальца Ф. Гомеса Техейры (1883) и многих других.[1]

В этом логическом преемстве ряда теорий, бесспорно, проходит один, постепенно конкретизирующийся, замысел; было бы несправедливым и вредным пытаться разрушить выработанное многими совокупными усилиями орудие анализа, столь полезное при изучении функций мнимого переменного. Но не следует при таком признании обычного истолкования мнимостей забывать, что, все же, — это есть не более как интерпретация, символически являющая, но *не* исчерпывающая соответственных арифметических сущностей. Плоскость комплексного переменного не есть еще самое переменное, — а лишь одно из истолкований такового на языке пространственных образов, и, следовательно, разделяющее с прочими истолкованиями присущие таковым формальные свойства[2]. Ведь всякое истолкование подлежит тому, что сказано Г. Герцем о картинах мира: это есть система образов, взятых произвольно, но соответствующих системе истолковываемой, и притом так, чтобы возможно большее число следствий из принятых истолковывающих образов соответствовало последствиям системы истолковываемой. Мы заранее знаем, что ни при одном способе толкования такой параллелизм следствий не может идти беспредельно далеко; мы не нуждаемся в доказательствах того, что перевод не покрывает подлинника во всех его оттенках и деталях, и загодя убеждены, что рано или поздно настанет такое их расхождение, которое не терпимо в пределах требуемой точности совпадения: всякий символ с успехом применим лишь в определенной, свойственной ему сфере, и за пределами известного поля зрения расплывается, теряет четкость и скорее мешает работе, нежели помогает ей. Мы знаем и то, что, как несколько переводов поэтического произведения на другой язык или на другие языки не только не мешают друг другу, но и восполняют друг друга, хотя ни один не заменяет всецело подлинника, так и научные картины одной и той же реальности могут и должны быть умножаемы — вовсе не в ущерб истине. Зная же все это, мы научились не попрекать то или другое истолкование за то, чего оно не дает, а быть ему благодарными, когда удается использовать его.

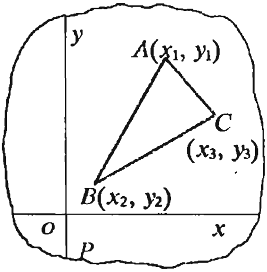
Однако, к указанию ограниченности известной интерпретации мы вынуждаемся, коль скоро наблюдается гипертрофия того или другого перевода, пытающегося отождествить себя с подлинником и заменить его собою, т.е. тем самым монополизирующего некоторую сущность и ревниво исключающего какое-либо иное истолкование: тогда ничего не остается, как напомнить зазнавшейся интерпретации о приличном ей месте и объеме ее применимости.

Так именно обстоит дело с комплексной плоскостью Кюна-Весселя-Арганда-Гаусса-Коши. Конечно, она есть прекрасное пособие для изображения комплексного переменного и функций его, — впрочем недостаточное, как показывает необходимость введения поверхностей Риманна. Но это пособие отвечает определению функций, ведущему свою родословную от Л. Дирихле, т.е. посредством понятия о соответствии, и, конечно, недостаточному: ведь это определение, принимая во внимание лишь содержание («материальную причину») функции, проходит мимо самой функции, как целого, как формы, связующей это содержание воедино («формальная причина»). Тут не место говорить, сколько зла произошло и происходит от такого определения функции; не место говорить и о попытках перейти к иному образу понимания — развитием функционального исчисления, теории интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, учением о функциях линий и линиевых уравнениях. Но и в пределах теории функций, поскольку речь идет о функциях действительного переменного, зло от определения Дирихле отчасти ослабляется контрабандно вносимою поправкой в виде интуитивно представленной формы функции, как над-атомистического начала: имею в виду истолковывание течения функции посредством некоторой кривой. Когда же речь заходит о функциях переменного комплексного, то атомистичность сказанного определения выступает в полной силе. Ведь в теории функций комплексного переменного вся плоскость занимается под изображение переменного независимого, и потому переменному зависимому ничего не остается, как разместиться на самостоятельной плоскости, решительно ничем не связанной с первой. И потому, хотя мы и утверждаем, что будто точки на этой второй плоскости изображают зависимое переменное, однако, именно только утверждаем, но ничуть не показываем и не доказываем, ибо то, что одно только и могло бы геометрически показать и доказать эту зависимость, — самая *связь* двух переменных, — остается никак не представленной геометрически и, в порядке геометрическом, т.е. в порядке самой интерпретации, есть голословное утверждение, лежащее вне возможности проверки, т.е. геометрически не существует. Повторяю, принятая интерпретация мнимостей в теории функций комплексного переменного интерпретирует лишь переменные, но отнюдь *не самые функции*, и в этом смысле может быть признана полезным, но далеко не достаточным, костылем анализа, — именно анализа и только его. Аналогичное должно быть повторено и о сфере Нейманна. А между тем, наряду с использованием геометрии в анализе, существует и должно существовать обратное использование анализа в геометрии, будь то геометрия аналитическая, дифференциальная или еще какая иная. И вот тут-то плоскость комплексного переменного *никак* не применима, ибо она порывает с установленными здесь и притом вполне естественными методами и никак с ними не соизмерима. А между тем, и в геометрии мнимости появляются не случайно, но необходимо связаны с формулировкою ее теорем и процессами ее доказательств, хотя здесь и не имеют геометрической наглядности. Уже в элементарном курсе аналитической геометрии учащийся сплошь и рядом сталкивается с мнимыми образами, но, не будучи в состоянии дать им конкретно-воззрительное содержание, принужден трактовать в высшей степени обобщающие термины, вроде, например, «мнимой точки», чисто формально, тогда как на то и существует геометрия, чтобы знанию не быть оторванным от пространственного созерцания. Хотя и аналитическая, однако, все же геометрия, аналитическая геометрия превращается наполовину в анализ, и притом так, что вся изрешетчивается *пробелами*, лишенными геометрического смысла: на каждом шагу тут, за сплошь геометрической фразеологией, попадаются *разрывы* геометрической картины, и такое истолкование анализа, какое дает аналитическая геометрия, напоминает перевод с китайского языка, оставивший непереведенными и лишь транскрибированными с помощью русских букв добрую половину иероглифических знаков. Можно сказать, что аналитическая геометрия уже не аналитична, как внесшая ряд пространственных истолкований, и е щ е не геометрия, как не переведшая в с е г о своего аналитического содержания на геометрические образы. Но ведь очень многие положения аналитической геометрии не имеют существенной важности, как аналитические, и ценны — именно как геометрические; усмотреть их пространственный смысл (а не утверждать таковой только на словах) — дело первостепенной важности. Правда, математика, привыкшего ко всяким «мнимым элипсам», «циклическим точкам», «изотропам» и т.п., в силу привычки (но отнюдь не вследствие понимания) подобная фразеология давно уж перестала беспокоить. Но эта успокоенность едва ли может рассматриваться как источник развития математики. Учащийся в этом отношении более прав, когда он чувствует в подобных высказываниях нечто недоговоренное. Определение окружности бесконечно малого радиуса — как пары мнимых прямых, пересекающихся в действительной точке, центре окружности, представляется учащемуся — сперва блестящим парадоксом; а когда подобных понятий накопляется много, вся их совокупность раздражает, как приевшиеся остроты.

Итак, комплексная плоскость Коши — сама по себе, а мнимости, в аналитической и прочих геометриях, — сами по себе, и с ними обстоит неблагополучно, а вышеозначенное истолкование помочь тут никак не способно, и лишь запутывает нашу мысль, раздвояя ее между плоскостью, как носительницей самых функциональных с в я з е й, т.е. кривых, как это делается в аналитической геометрии и в теории функций действительного п е р е м е н н о г о, и плоскостью — носительницей одного только переменного, как такового, вне его связи с другим переменным, как об этом говорит теория функций переменного комплексного. Возникает задача: отправляясь от определения точки на плоскости двумя координатами (или соответственно тремя однородными) и понимания кривой на плоскости, как наглядного образа функциональной зависимости между текущими координатами точки ее, и не внося далее никакого разрыва в обычное изложение аналитической и прочих геометрий, *расширить область двухмерных образов геометрии так, чтобы в систему пространственных представлений вошли и мнимые образы*. Короче говоря, необходимо найти в пространстве м е с т о для мнимых образов, и притом ничего не отнимая от уже занявших свои места образов действительных.

Или, говоря еще иначе, нужно, оставив без внимания все истолкования мнимостей, вернуться к формальной установке комплексных чисел и посмотреть, не допускают ли формально-необходимые, т.е. конститутивные, свойства комплексных чисел и иной, нежели исторически выработалась, линии истолкования. На это, может быть последует замечание о нежелательности разрыва с традицией, насчитывающей до пяти двадцатипятилетий. Да, это нежелательно; но еще более нежелателен разрыв с традицией, имеющей за собою до одиннадцати таких промежутков времени. «Открытие Гаусса-Коши дало очень много», — скажут вероятно. Да, но еще более дало открытие Декарта и примыкающая к нему теория действительного переменного. С кем-то из двух, если не поссориться, то охладить отношения, приходится силою вещей, ибо эти двое — не в ладах между собою. А если так, то не пожертвовать ли ради Декарта и геометрической сообразности исключительностью в верности Коши?

§ 2. Итак, обращаемся к формальной теории комплексов. Они вводятся здесь посредством Гамильтоновских символов вида (a,b), разработанных Вейерштрассом[3]. Самой основной, самой конститутивной характеристикою их является, конечно, именно их *двоичность*. Комплексы образуют множество двукратное, множество двояко-протяженное. Эту двоичность их конституции обычное истолкование приурочивает к двухмерности координатной плоскости. Но мы не можем сделать такого шага, потому что двукратная протяженность плоскости уже использована под интерпретацию функциональных зависимостей, и снова обращаться к тому же свойству плоскости — это значит нарушить jus primi occupantis — в данном случае Декарта. Нам кажется, однако, что и Декарт и Коши впали в одну методологическую ошибку, которая, несмотря на свою кажущуюся маловажность, была чревата и логическими и практическими последствиями. Ошибка эта — в неправильном принятии единицы основной меры. В самом деле, спросим себя, что именно изучаем мы в геометрии. В геометрии изучаем мы п р о с т р а н с т в о, — не линии, точки и поверхности, как таковые, а именно с в о й с т в а п р о с т р а н с т в а, выражающиеся и в этих частных пространственных образованиях. И значит, единицею меры мы должны брать не величину не однородную с изучаемым объектом, а величину однородную, — часть самого пространства[1]. В абсолютной системе мер, секунда есть отрезок самого времени, как первоосновной реальности. Почему же, в отношении пространства, в основу не положена часть самого пространства? Точно также, *плоская геометрия изучает самую плоскость* (или вообще поверхность); *плоскость есть ее предмет*, линии же и точки на ней — частные образования на ней, и потому единицею меры мы должны брать в геометрии на плоскости именно *часть плоскости*, линейную же единицу рассматривать в качестве единицы производной. Естественно при изучении любого объекта выбирать первоосновную единицу для его измерения *однородною* с величиною измеряемой, и лишь впоследствии можно придумать какие-либо единицы вторичные и разнородные с первоосновной, хотя, быть может, в каком-нибудь отношении и более удобные практически. Таков логический путь, и пренебрежение им ведет к разным осложнениям.



Чертеж 1-й

Чтобы наши рассуждения были более конкретными, поведем их на совсем простых примерах.

Пусть в плоскости P дан треугольник ABC (чертеж 1-й); координаты вершин его, отнесенные к прямоугольным декартовым осям, суть:

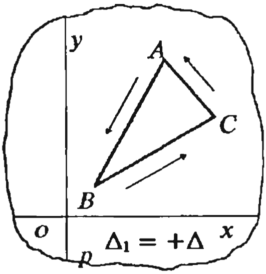
$$A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2),\ C(x_3,y_3).$$

Тогда, как известно, площадь его

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}. \qquad [1]$$

Но ведь вершины его вполне равноправны между собою. Поэтому мы должны, п о-в и д и м о м у, получить то же, если переименуем вершину B в C, а C в B. Оказывается, что тогда площадь меняет свой знак, оставаясь по абсолютной величине неизменною:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}. \qquad [2]$$

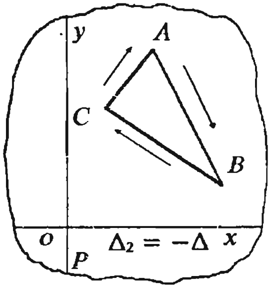


Чертеж 2-й

Иными словами,

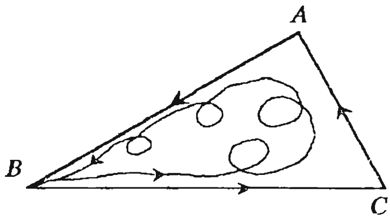
$$\Delta_2 = - \Delta_1. \qquad [3]$$

Почему же произошла такая разница? Почему, при перемене названий вершин, значение площади, абсолютную величину которой мы будем обозначать просто через Δ, изменило знак? — Потому, что мы совершаем теперь обход вершин в ином порядке, чем ранее. Оказывается, именно, что если обход этот совершается п р о т и в часовой стрелки, то Δ будет поло жительная, если — по (часовой) стрелке, то отрицательная (чертеж 2-й и чертеж 3-й).



Чертеж 3-й

Но площадь, как площадь, сама по себе *не* заключает еще, согласно обычному представлению, той полярности, которая дает величине возможность быть положительной или отрицательной. Хождение по прямой взад и вперед затрагивает с а м о е с о д е р ж а н и е прямолинейного отрезка, ибо при таком хождении мы имеем дело со в с е м и его элементами и притом непременно только в одном из д в у х смыслов. О площади же сказать этого нельзя: ведь для нее возможны не два обхода, а бесчисленное множество обходов, например, такой, какой изображен на чертеже 4-м, и обходы, вообще говоря, не могут затронуть *всех* точек плоскости; даже кривые вроде кривой Пеано и т.п., исчерпывающие *все* точки площади, не могут быть рассматриваемы как полярно-противоположные, ибо их может быть бесчисленное множество. Наш прежний ответ о причине изменения знака у площади был чисто формальным и только тавтологически повторял вопрос, потому что говорить об изменении смысла движения и о порядке проходимых при этом вершин — это одно и тоже. Площадь, как таковая, обходом ее периметра **не характеризуется**, и не это хождение посолонь или против солнца может внести двойственность. Причину этой двойственности нужно искать в другом, глубже. Рассмотрим, как может быть получено изменение **знака** площади у данного треугольника.



Чертеж 4-й

Раз абсолютная величина площади не меняется и не меняются углы и стороны треугольника, то, значит, при этом процессе изменения знака треугольник сохраняется, т.е. движется, как одно целое. Действительная причина изменения знака площади есть какое-то **движение** треугольника, а не простое переименование вершин.

Прежде всего исследуем движения треугольника в плоскости P (чертеж 1-й), причем ради общности и изящества результатов будем пользоваться трилинейными координатами и движениями не только обычными, но и такими, при которых образ изменяется подобно себе. При указанных условиях, если мы обозначим координаты вершин через x_k, y_k, z_k, (где k= 1,2,3), площадь Δ выразится так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ y_1, & y_2, & y_3 \\ z_1, & z_2, & z_3 \end{vmatrix} . \qquad [4]$$

Будем совершать всевозможные коллинеации, даже такие, при которых детерминант замещения D не равен 1. Формулы преобразования при этом таковы:

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\mu' x_1 = A_{11}\xi_1 + A_{21}\eta_1 + A_{31}\zeta_1 & \mu' x_2 = A_{11}\xi_2 + A_{21}\eta_2 + A_{31}\zeta_2 \\
\mu'' y_1 = A_{12}\xi_1 + A_{22}\eta_1 + A_{32}\zeta_1 & \mu'' y_2 = A_{12}\xi_2 + A_{22}\eta_2 + A_{32}\zeta_2 \\
\mu''' z_1 = A_{13}\xi_1 + A_{23}\eta_1 + A_{33}\zeta_1 & \mu''' z_2 = A_{13}\xi_2 + A_{23}\eta_2 + A_{33}\zeta_2 \\
\multicolumn{2}{c}{\mu' x_3 = A_{11}\xi_3 + A_{21}\eta_3 + A_{31}\zeta_3} \\
\multicolumn{2}{c}{\mu'' y_3 = A_{12}\xi_3 + A_{22}\eta_3 + A_{32}\zeta_3} \\
\multicolumn{2}{c}{\mu''' z_3 = A_{13}\xi_3 + A_{23}\eta_3 + A_{33}\zeta_3}
\end{array}
\right\} \qquad [5]
$$

Вставляя девять величин из формул [5] в выражение [4], мы найдем:

$$
\Delta = \begin{vmatrix}
A_{11}\xi_1 + A_{21}\eta_1 + A_{31}\zeta_1 ; & A_{11}\xi_2 + A_{21}\eta_2 + A_{31}\zeta_2 ; & A_{11}\xi_3 + A_{21}\eta_3 + A_{31}\zeta_3 \\
A_{12}\xi_1 + A_{22}\eta_1 + A_{32}\zeta_1 ; & A_{12}\xi_2 + A_{22}\eta_2 + A_{32}\zeta_2 ; & A_{12}\xi_3 + A_{22}\eta_3 + A_{32}\zeta_3 \\
A_{13}\xi_1 + A_{23}\eta_1 + A_{33}\zeta_1 ; & A_{13}\xi_2 + A_{23}\eta_2 + A_{33}\zeta_2 ; & A_{13xi_3} + A_{23}\eta_3 + A_{33}\zeta_3
\end{vmatrix} C, \qquad [6]
$$

где C есть постоянное,

$$
C = \frac{1}{\mu' \cdot \mu'' \cdot \mu'''} \ . \qquad [7]
$$

Раскрывая выражение Δ в равенстве [6] и делая приведения, мы получаем, согласно известной теореме о произведении определителей:

$$
\Delta = M \cdot D \cdot \Delta' \qquad [8]
$$

где D есть детерминант замещения:

$$
D = \begin{vmatrix}
A_{11}, & A_{21}, & A_{31} \\
A_{12}, & A_{22}, & A_{32} \\
A_{13}, & A_{23}, & A_{33}
\end{vmatrix}, \qquad [9]
$$

а Δ' есть площадь преобразованного треугольника:

$$
\Delta' = \begin{vmatrix}
\xi_1, & \xi_2, & \xi_3 \\
\eta_1, & \eta_2, & \eta_3 \\
\zeta_1, & \zeta_2, & \zeta_3
\end{vmatrix} . \qquad [10]
$$

Следовательно, площадь треугольника инвариантна при всех коллинеациях: площадь треугольника есть образование инвариантное при всех линейных преобразованиях.

А так как всякую площадь, ограниченную ломанной замкнутой линией, можно разбить на сумму треугольников, то и всякая площадь, ограниченная ломанным периметром, составленным из прямолинейных звеньев, инвариантна. Переходя далее к пределу, мы можем сказать, что и всякая криволинейная площадь, ограниченная каким угодно контуром, инварианта при всех коллинеациях.

Ограничиваясь теперь такими коллинеарными преобразованиями, для которых

$$|D \cdot M| = 1, \tag{11}$$

т.е. истинными движениями образа, как незменяемой геометрической системы, мы замечаем следующее:

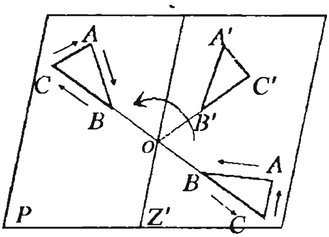
1. При таких преобразованиях абсолютная величина площади не меняется:

$$|\Delta'| = |\Delta|. \tag{12}$$

2. Знак площади может быть как положительным, так и отрицательным, в зависимости от знака при D или при Δ', тогда как знак M существенно положителен.

Знак детерминанта замещения D не может не быть, в случае истинных движений, положителен; в противном случае, всякое, даже бесконечно-малое перемещение треугольника, меняло бы знак площади, а это не соответствовало бы непрерывности движения. Варьируя координаты вершин треугольника, т.е, заменяя x_k, y_k, z_k через $x_k + \delta x_k, y_k + \delta y_k, z_k + \delta z_k$ (где $k = 1,2,3,$), по непрерывности детерминанта, как функции его элементов, мы не можем переменить его знака, иначе, как проходя через нуль, а нулем площадь треугольника стать не может. Следовательно, при коллинеарных преобразованиях площадь не меняет своего знака. А, следовательно, знак детерминанта замещения должен быть положителен, т.к. в противном случае и знак, — какова бы ни была вариация, — непременно менялся бы.

§ 3. Коллинеарные преобразования площади не меняют ее знака, по крайней мере покуда они имеют кинематический смысл движений в пределах рассматриваемого плоского пространства. Но это не значит, чтобы такое изменение знака было вообще невозможно. Предположим, что мы подняли рассматриваемый треугольник ABC н а д плоскостью P, т.е., воспользовавшись *третьим измерением пространства*, перевернули треугольник и снова положили плашмя на плоскость P (чертеж 5-й). То же самое можно представить себе иначе: пусть в плоскости P треугольника ABC дается некая ось ZZ'. Соединяя треугольник неизменяемой связью с осью и вращая плоскость треугольника и связи на угол π, мы заставим треугольник снова лечь на плоскость P. Но теперь уже он будет лежать не прежней стороной, а оборотною. Легко видеть, что площадь его изменила свой знак, потому что изменилось на обратное — направление обхода площади: Следовательно, переворачивание в третьем измерении и есть искомое движение, меняющее знак площади треугольника, а, по сказанному ранее, — и площади всякой фигуры вообще.

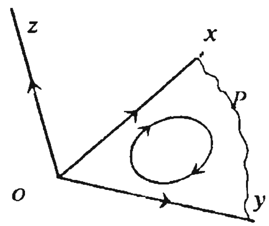


Чертеж 5-й

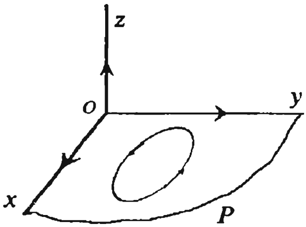
В данной работе не станем касаться того существенно важного обстоятельства, что от такого движения получается треугольник, или вообще фигура, неконгруэнтный с данным первоначально. Эта неконгруэнтность равных геометрических образов имеет, как известно, чрезвычайно важное значение в философии и в естествознании, что уже отчасти пояснено работами Р е н е д е С о с ю р а и механикой многомерных пространств, а также и многими другими, чему надлежит посвятить особое исследование.

Но возвращаемся к нашему треугольнику. Площадь его, а равно — и всякой фигуры, имеет знак положительный или отрицательный, в зависимости от того, *какая сторона* такой фигуры изучается. Конечно, для плоских фигур н е т существенного различия между двумя сторонами их (исключая неконгруэнтность при как бы разделении сторон и переворачивании одной из них); но, если дело пойдет о кривых поверхностях, то различие фигур на выпуклой и на вогнутой, или, шире, вообще — на разных сторонах поверхности, приобретает важное значение и неусловное содержание (в частности, с такими свойствами геометрических образов имеет дело сферическая тригонометрия). Точнее говоря, подобное же различение в отношении плоскости должно рассматриваться как переход к пределу, при постепенном уменьшении кривизны поверхности до нуля.

До сих пор мы меняли положение фигуры относительно наблюдателя. Но, вместо этого, мы можем заставить самого наблюдателя перемещаться относительно фигуры, т.е. рассматривать фигуру на плоскости с разных сторон. Тогда мы уже не будем говорить, что изменяется положение фигуры, ее размеры или направление обхода на ней. Последнее, т.е. *смысл* (sens) обхода, дано абсолютно. Абсолютность смысла обхода мы осуществим, если с самою фигурою будет связано некоторое циклическое движение, неизменное по своему смыслу, какое бы положение ни занял наблюдатель его. Например, мы могли бы поместить на фигуру часы с прозрачным циферблатом или шарик, обегающий контур фигуры, или по контуру фигуры пустить электрический ток; смысл этих движений был бы независим от положения наблюдателя, и потому, зная этот смысл, как установленный раз навсегда, наблюдатель мог бы ориентироваться в своем отношении к той или другой стороне плоскости. Итак, пусть этот абсолютный обход, раз навсегда установленный, считается положительным, когда он видится протекающим против движения часовой стрелки, и — отрицательным, когда видится он протекающим по этому движению. Или, иначе, если наблюдатель находится на положительном конце нормали к поверхности, то обход контура непременно совершается против часовой стрелки; а если обход видится происходящим по часовой стрелке, то это значит, что на него наблюдатель смотрит с отрицательного конца нормали. При таком рассмотрении плоскости весьма выгодны координатные оси Максвелла (чертеж 6-й). Допустим теперь, что мы перешли на отрица-



Чертеж 6-й



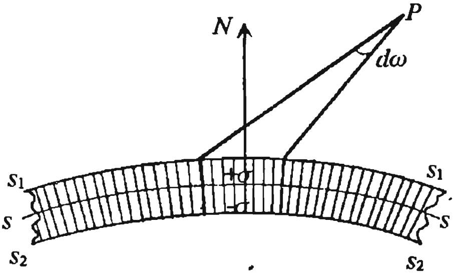
Чертеж 7-й

тельный конец оси z и смотрим о т т у д а на наш треугольник. Тогда, при том же самом абсолютном обходе его периметра, мы увидим, что обход совершается п р о т и в часовой стрелки. Если т о г д а, ранее, мы считали, по декартовским координатам, площадь обходимого контура положительной, то теперь, при том же обходе, сочтем ее отрицательной, но, переменяя систему осей на максвеллевскую (чертежи 6-й и 7-й), мы должны говорить наоборот, и о прежней площади рассуждать, как об отрицательной, а о теперешней — как о положительной.

Таким образом, *всякий вырезок плоскости с одной стороны положителен, а с другой — отрицателен, и потому вся плоскость с одной стороны положительна, а с другой отрицательна.* Сторона плоскости характеризуется знаком любой, вырезанной из плоскости, площадки. Плоскость стала как бы прозрачна, и когда мы видим на ней площадки разных знаков, то это, теперь уже, должно быть относимо не за счет разного смысла их обходов, каковой может быть только одним, абсолютным, а за счет различных *сторон* плоскости, к которым и приурочиваются рассматриваемые площадки.

§ 4. Прежде чем идти далее в рассуждениях геометрических, кажется, будет небесполезным несколькими примерами напомнить ф и з и ч е с к и й смысл устанавливаемого понятия о п о л я р н о с т и плоскости, как геометрического образа, к которому применимо различение величин положительных и отрицательных, аналогично подобному же различению на линии. Разница с линией — в том, что знак относится там к с о д е р ж а н и ю линии, как таковой, т.е. к отрезку линейному, а тут — к с о д е р ж а н и ю плоскости, как таковой, т.е. к плоскостной величине, к площади. Следовательно, всякое физическое явление, которое может быть изображаемо вырезками плоскости и которое полярно, в устанавливаемом здесь понятии о з н а к е плоскости, получает себе полезную диаграмму. Сюда же относится всякий процесс, могущий быть графически изображенным некоторым обходом, имеющим определенный смысл, или, еще, внутреннюю противоположность своего смысла, заставляющую в диаграмме его воспользоваться возможностью двоякого направления обхода. Вот несколько простейших примеров:

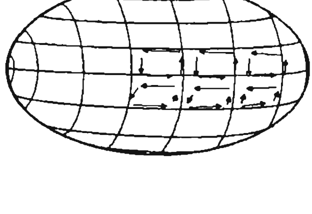
I. М а г н и т н ы й л и с т о к, т.е. поверхность, по которой нормально к ней, щетиною, расположены бесконечно малые магнитики, есть физическое осуществление геометрического образа плоскости, или, как увидим далее, вообще поверхности двухсторонней. Потенциал такого листка или, лучше, его элемента поверхности dS будет положителен или отрицателен, смотря по тому, будет ли видна из места наблюдения положительная или отрицательная сторона элемента dS. (Чертеж 8-й).



Чертеж 8-й

II. То же самое можно сказать о двойном электрическом слое.

III. Правило Амперовского пловца и правило Максвеллева штопора относительно направления магнитных силовых линий тока («направление тока и направление магнитной силы его связаны между собою так же, как направление поступательного и вращательного движения обыкновенного винта или штопора») показывают, что плоскость, рассекающая ток перпендикулярно к нему, имеет по существу р а з л и ч н ы е с т о р о н ы, хотя бы, например, потому, что северный полюс на одной стороне будет двигаться по часовой стрелке, а на другой — против нее, что поляризованный луч повернется там и тут в противоположные стороны и т.д.

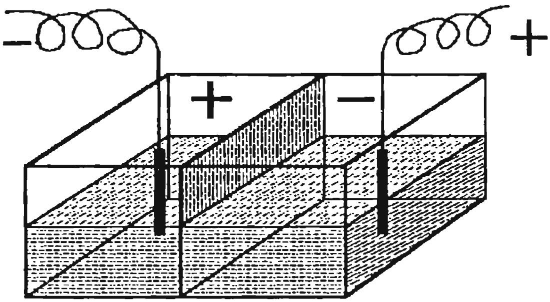


Чертеж 9-й

IV. Теорема Ампера об эквивалентности замкнутого тока и соответственного магнитного листка, имеющего тот же контур (чертеж 9-й), приводит к рассуждениям, подобным тем, что в пункте I.

V. Теоремы об индукции, где направление тока обусловливается тем, входят или выходят силовые линии в контур с его положительной или отрицательной стороны, опять возвращают мысль к тому же различению з н а к а у плоскости.

VI. Положим, что в ванне с электролитом, в которой проходит ток, находится проводящий лист, разделяющий электроды. Он поляризуется, и тогда, как бы тонок он ни был,



Чертеж 10-й .

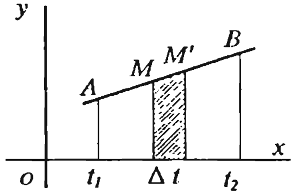
стороны поверхности его представят существенное различие, так что к ним, опять, будет весьма выгодно применить представление о з н а ке плоскости (чертеж 10-й).

VII. Рассмотрим Тэтовскую диаграмму термоэлектрических явлений. Напомним те два закона, на основании которых она построена:

$$E_{t1}^{t2} = E_{t1}^{\vartheta} + E_{\vartheta}^{t2}, \qquad [13]$$

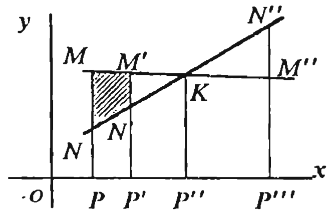
$$E_{t1}^{t2}(AB) = E_{t1}^{t2}(AX) + E_{t1}^{t2}(XB) \qquad [14]$$

Здесь E означает электровозбудительную силу данной пары металлов из числа A, B, C, ... X. Пределы же t_1, t_2,ϑ обозначают температуры спаев. Тэт строит такую кривую, чтобы площадь между осью абсцисс, кривой и двумя бесконечно близкими ординатами, соответствующими термоэлектрической способности $\varphi(AX)$ при соответствующих температурах (абсциссах), была пропорциональна электровозбудительной силе термоэлемента. Тогда эта кривая относится к металлу A, а ось абсцисс к металлу X (чертеж 11-й). На основании второго закона [14], площадь трапеции $MM'N'N$ представит собою электродвижущую силу пары (MN). Если температуру холодного спая OP мы оставляем неизменной, а температуру теплого увеличиваем до OP'', то



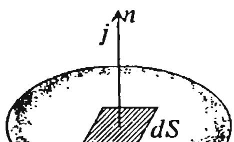
Чертеж 11-й

(чертеж 12-й) Е тогда достигает н а и б о л ь ш е г о значения; после этого начнется убывание Е до нуля, причем этому значению Е соответствует температура OP''' такая, что $PP'' = P''P'''$, после чего происходит явление инверсии, обращение тока. Такова диаграмма. Сперва может показаться странным, почему происходит так, ибо площадь, изображающая электродвижущую силу, как будто продолжает возрастать, между тем как электродвижущая сила убывает. Но дело в том, что после пересечения кривых в точке K площадь становится отрицательной и, следовательно, уже не прибавляется к площади, бывшей до K, а вычитается из нее.



Чертеж 12-й

Подобных примеров из самых различных областей, где находит себе место полярное представление плоскости, можно привести много; но, полагаю, и сказанных достаточно, чтобы сделать себе физический смысл этого представления наглядным. Аналитически дело сводится к возможности выразить потенциальную функцию двойного слоя посредством некоторого интеграла по контуру этого слоя, т.е. к частному случаю более общей *теоремы Стокса*, дающей тождественное равенство двух интегралов, поверхностного и контурного, так что изменение с м ы с л а



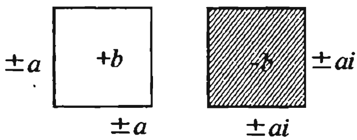
Чертеж 13-й

обхода в последнем — необходимо связано, следовательно, с изменением *знака* у каждого элемента площади .[4]

§ 5. Всякая площадь имеет измерение вдвое большее, чем длина.

$$[S] = [L^2] \qquad [15]$$

Если длину считаем мы за величину первого измерения, измерения 1, то тогда площадь должна рассматриваться, как величина второго измерения, как величина измерения 2. А т.к. в нагляддном созерцании мы знаем длины лишь положительные и отрицательные, то, при вышеозначенной точке зрения, пришлось бы утверждать, что площади могут быть только положительные. Однако мы видели полную геометрическую наглядность и отрицательных площадей. Отсюда следует, что при изучении плоскости не правильно принимать площадь за величину *второго* измерения, а длину — п е р в о г о. Мы уже видели в § 1 методологическое требование принимать за основную единицу, т.е. единицу первого измерения, часть того объекта, который нами изучается, чтобы в самом определении меры не было логической ошибки — логического уравнивания понятий заведомо разнородных.



Чертеж 14-й

Будем рассуждать конкретно. Вырежем на плоскости квадрат, площади b единиц. Это b может быть как положительным, так и отрицательным. Рассмотрим же тот случай, когда b отрицательно. Тогда, чтобы площадь была отрицательной, необходимо, чтобы сторона квадрата была положительной или отрицательной мнимостью (чертеж 14-й):

$$a = \pm\sqrt{-b} = \pm\sqrt{b}\cdot i\,. \qquad [16]$$

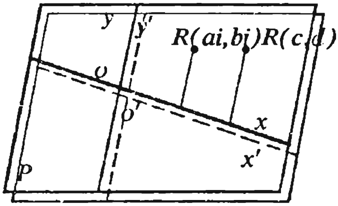
Итак, с т о р о н а   к в а д р а т а   о т р и ц а т е л ь н о й   п л о щ а д и *мнима*. Двойной знак ее указывает на то, что направление этой стороны может браться как в одну, так и в другую сторону, — как это вообще делается в аналитической геометрии.

Таким же, следовательно, т.е. *мнимым*, должен быть и всякий отрезок прямой, всякая длина на нижней стороне плоскости (если верхняя положительна), всякий линейный элемент, а потому — и длина всякой дуги, как предел суммы прямолинейных звеньев периметра вписанной в дугу ломанной.

Но если мнимым будет всякий отрезок нижней стороны плоскости, то мнимыми будут и координаты любой точки на нижней стороне плоскости. Поэтому точку оборотной стороны, т.е. с мнимыми координатами, мы станем называть точкою *мнимою*. Однако, требуется оговориться относительно этого названия, не совсем совпадающего с общепринятым, т.е. обыкновенно *мнимою точкою* называют точку с координатами комплексными, тогда как мы имеем в виду чисто мнимые величины, вида $\pm ci$. Кроме того, иногда термин мнимая точка, мнимая ветвь кривой относят к таким точкам или ветвям, у которых одна координата мнима или комплексна, тогда как другая (обыкновенно абсцисса), — действительна. В подобных случаях мы будем говорить о полу-мнимости, т.е. о полу-мнимых точках и полу-мнимых ветвях кривой.

Ради сохранения однородности измерения величин, необходимо и площадь на положительной стороне плоскости считать величиною первого измерения, а всякий отрезок на ней — величиною измерения $1/2$, потому что он получается через извлечение корня квадратного из 1.

Итак, если у нас есть квадрат с площадью $+b$ и квадрат с площадью $-b$, то сторона первого квадрата будет $\pm\sqrt{b}\sqrt{1}$, а второго будет $\pm\sqrt{b}\cdot i$. Так сохраняется однородность величин, по существу однородных, и не вносится, практически, никаких изменений в обычное трактование положительной (доселе только и бывшей известной) стороны плоскости; теперь мы должны только мысленно заменять выражение «столько-то основных единиц» выражением «столько-то основных единиц в степени $1/2$». Новая интерпретация мнимостей заключается в открытии оборотной стороны плоскости и приурочении этой стороне — области мнимых чисел. Мнимый отрезок относится, согласно этой интерпретации, к противоположной стороне плоскости; там находится своя координатная система, в одном случае совпадающая с действительной, а в другом — расходящаяся с нею. Для нас теперь, повторяем, плоскость стала



Чертеж 15-й

прозрачной, и мы видим обе системы осей зараз, так, что можем представить плоскость так, как это сделано на чертеже 15-м, где пунктиром проведена мнимая система осей.

Возвращаясь с разъясненной точки зрения к площади треугольника, об инвариантности которой шли рассуждения в § 2, мы можем понять, как, при положительном детерминанте замещения D, равном единице, т.е. при коллинеациях, соответствующих настоящим движениям, площадь все же может изменить свой знак. В самом деле, подставляя в выражение для площади [1] мнимые координаты ix_k и iy_k $(k = 1, 2, 3)$ вершин, и вынося мнимую единицу i за знак детерминанта, мы получаем действительную величину детерминанта, равную площади треугольника с соответствующими действительными координатами вершин, но имеющую противоположный знак: мнимое преобразование координат переменило смысл обхода, ибо перевернуло треугольник плашмя, перевернуло же потому, что перенесло его на отрицательную сторону плоскости.

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = i\xi_1 & y_1 = i\eta_1 \\ x_2 = i\xi_2 & y_2 = i\eta_2 \\ x_3 = i\xi_3 & y_3 = i\eta_3 \end{array}\right\} \qquad [17]$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \xi_1 i, & \eta_1 i, & 1 \\ \xi_2 i, & \eta_2 i, & 1 \\ \xi_3 i, & \eta_3 i, & 1 \end{vmatrix} = i^2 \begin{vmatrix} \xi_1, & \eta_1, & 1 \\ \xi_2, & \eta_2, & 1 \\ \xi_3, & \eta_3, & 1 \end{vmatrix}, \qquad [18]$$

и следовательно,

$$\Delta' = -\Delta . \qquad [19]$$

Для определенности дальнейших рассуждений подведем итоги и дадим несколько определений:

I. *Действительная точка* есть такая точка, обе координаты которой действительны: $R(a,b)$. Она лежит на положительной стороне плоскости (на чертеже — верхней) и определяется пересечением двух прямых на положительной стороне плоскости.

II. *Мнимая точка* есть такая точка, обе координаты которой мнимы: $R(ai, bi)$. Определяется мнимая точка двумя прямыми на отрицательной стороне плоскости на чертеже — оборотной.

III. Всякая прямая, проходящая через две действительные точки, есть прямая *действительная*. Она расположена на верхней стороне плоскости, и уравнение ее удовлетворяется действительными точками.

IV. Всякая прямая, проходящая через две мнимые точки, есть прямая *мнимая*. Она расположена на отрицательной (нижней) стороне плоскости, и уравнение ее удовлетворяется точками мнимыми.

§ 6. Алгебраические действия над комплексными числами приводят, в итоге, к комплексам же и только к ним. Поэтому координаты точек, полученные из уравнения любой плоской кривой, могут быть либо действительными, либо чисто мнимыми, либо комплексными, — и никакими иными, — иначе говоря, только одного из нижеследующих трех типов: a, ai, $a+bi$, где a и b суть действительные числа, положительные или отрицательные. Следовательно, из различных сочетаний координат этих трех типов возникает возможность девяти различных видов точек плоскости, как она рассматривается в аналитической геометрии — и только их; эти девять видов распадаются на шесть существенно различных родов:

I. a, b точки действительные.

II. $\left.\begin{matrix} a, bi \\ ai, b \end{matrix}\right\}$ точки полумнимые.

III. ai, bi точки мнимые.

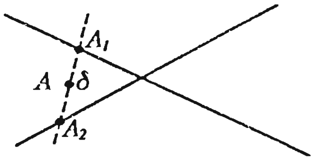
IV. $\left.\begin{matrix} a, b+ci \\ a+di, b \end{matrix}\right\}$ точки полукомплексные.

V. $a+di, b+ci$ точки комплексные.

VI. $\left.\begin{matrix} a+di, bi \\ di, b+ci \end{matrix}\right\}$ точки мнимо-комплексные.

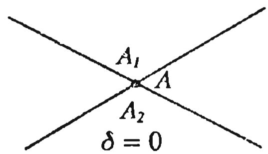
Сочетания, соединенные скобкою, относятся к точкам, подобным между собою, но с измененными названиями координат.

Таковы шесть родов точек плоскости (обращаем внимание, что сказано *«плоскости»*, а не «на плоскости»). Никакие операции анализа не дадут чего-либо, неизобразимого этими точками; и, следовательно, для точного совпадения анализа и геометрии нужно только дать наглядность в с е м точкам. До сих пор выяснялся геометрический образ, соответствующий как действительным, так и мнимым точкам; требуется же теперь геометрически приспособить прочие четыре рода. Начнем с точек полумнимых.

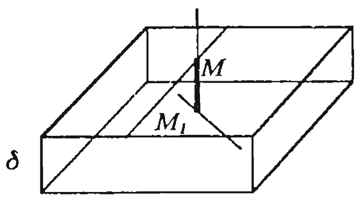


Чертеж 16-й

Пусть в пространстве даны какие-нибудь две прямые. Вообще говоря, они не пересекаются между собою, но тем не менее между ними существует кратчайшее расстояние, — общий их перпендикуляр. Эта линия единственна; поэтому мы можем сказать, что две прямые вполне характеризуют некоторый отрезок (кратчайшее между ними расстояние) и на нем — некоторую точку, которая хотя и может двигаться по отрезку, но лишь в известной области, м е ж д у прямыми (чертеж 16-й), т.е. м е ж д у точками A_1 и A_2. Станем сближать между собою прямые. Тогда область произвольности A_1A_2 точки A становится все теснее, и в пределе точка делается вполне определенною, именно обращается в точку пересечения двух линий и сливается с A_1 и A_2. Но, как ранее точка A все время находилась м е ж д у данными линиями, так и о предельном случае мы можем продолжать говорить, что A — между линиями (чертеж 17-й). Представим себе далее (чертеж 18-й), что у нас, вместо бесконечной пло-



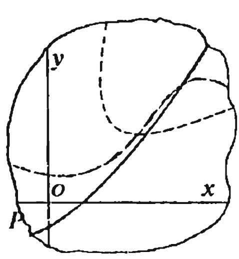
Чертеж 17-й



Чертеж 18-й

скости, — бесконечная пластина, — слой переменной толщины с параллельными гранями. Чертежом представлен вырезок из этого слоя. На одной стороне этого пласта проведем одну линию, на другой — другую. Отыщем, далее, кратчайшее расстояние обеих линий: оно будет равно δ и направлено нормально к граням. Делаем теперь толщину слоя δ все меньшей и меньшей. Тогда каждая линия, оставаясь на той стороне пласта, на которой она начерчена, станет приближаться к линии, что на другой стороне. В пределе, когда обе грани сольются, пересечение линий на разных сторонах плоскости, получившейся как предел вышеозначенного пласта, определит собою некоторую точку. Точка эта будет *полумнимой*, ибо через нее проходит одна прямая действительная и одна мнимая, которые могут быть сочтены за косоугольные координаты ее; в частном случае эти прямые могут быть перпендикулярными между собою и параллельными осям. А что одна из этих прямых, именно нижняя, будет мнимою, другая же, верхняя, — действительною, это явствует из разъяснений, сделанных ранее. Полумнимая точка находится между проведенными линиями, стало быть, — между тех граней, на которых означенные линии проведены. Значит, действительные точки расположены сверху, мнимые — снизу, те и другие *на* соответствующих сторонах, а полумнимые — *внутри*, в самой плоскости, *между* ее сторонами. Но было уже сказано, что полумнимая прямая проходит через две полумнимые точки; следовательно, она также лежит *внутри* плоскости, между ее гранями.

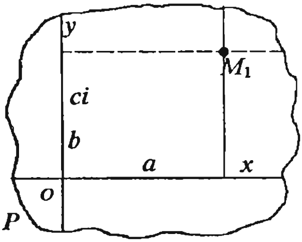
Всякий геометрический образ — геометрическое место точек — назовется мнимым, полумнимым или действительным, смотря по тому, какие точки лежат на этом «месте», мнимые, полумнимые или действительные. Действительный образ чертится, как обычно, на верхней стороне плоскости; мы станем обозначать его сплошною линией. Полумнимый — чертится внутри плоскости, и обозначением его будет пунктир. Наконец мнимый образ должен чертиться на нижней стороне плоскости; а на верхней, как бы просвечивая, он пусть обозначается черточками (чертеж 19-й).



Чертеж 19-й

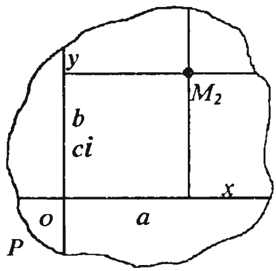
Теперь осталось рассмотреть точки полукомплексные, точки комплексные и точки мнимо-комплексные, т.е. те, координаты которых суть:

$$\left.\begin{matrix} a,\ b+ci \\ a+di,\ b \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} a+di \\ b+ci \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} a+di,\ bi \\ di,\ b+ci \end{matrix}\right\} \qquad [20]$$



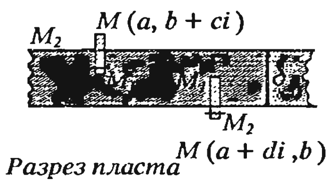
Чертеж 20-й

Пусть дана точка M $(a,\ b+ci)$. Чтобы построить ее, надо (чертеж 20-й) взять линию, параллельную оси ординат, на расстоянии a, и найти ее пересечение с параллелью оси абсцисс, на расстоянии $b+ci$. Это значит, что надо взять по оси y отрезок b на верхней плоскости, затем от конца b отложить на нижней стороне ci и провести через конец так полученной суммы линию, параллельную оси x. Точка пересечения этой линии с линией, проведенной раньше, будет M_1. Но ведь мы могли бы поступить и иначе: сначала взять на оси y отрезок ci, а затем уже b, и тогда получилась бы точка пересечения M_2 на том же месте, что и M_1, но не в том же отношении к сторонам плоскости. Тут точка была бы действительной, тогда как ранее она была полумнимой. Между тем, искомая точка M должна быть единственной, и этой единственности ее можно добиться, если тот и другой образ ее, действительный и полумнимый, считать в м е с т е за о д н у точку. Вместе они образуют одну точку,



Чертеж 21-й

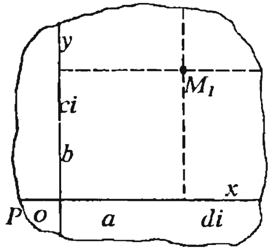
одновременно находящуюся на верхней стороне плоскости и м е ж д у сторонами ее. Если переход к пределу еще *не* совершен. т.е., если $\delta \neq 0$, и вместо плоскости у нас все еще пласт, то можно уподобить полукомплексную точку M гвоздю,



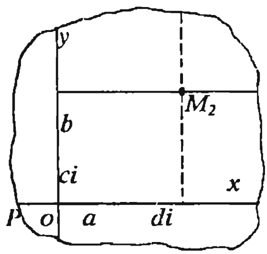
Чертеж 22-й

вогнанному до половины глубины в этот пласт. (Чертеж 22-й).

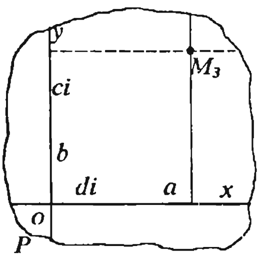
Остается, наконец, рассмотреть комплексную точку *M* (*a*+*di*, *b*+*di*). Тут, при различной последовательности сложений, возможны *четыре* возможности; эти четыре возможности приводят, как видно на чертежах 23, 24, 25, 26-ом, к точкам: действительной, полумнимой, еще полумнимой и просто мнимой, находящимся на одном и том же месте пространства, но в разных отношениях к сторонам плоскости. Весь столбик четырех точек, из которых две — на наружных сторонах плоскости и две — на внутренних, внутри ее, образует о д н у точку *M* (*a*+*di*, *b*+*di*), так что мы ее можем представлять себе в виде штифта, проходящего через всю толщу пласта насквозь и выходящего на обратной стороне ее.



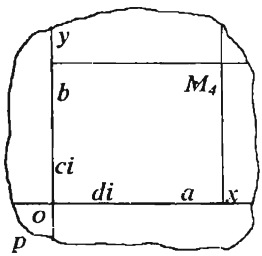
Чертеж 23-й



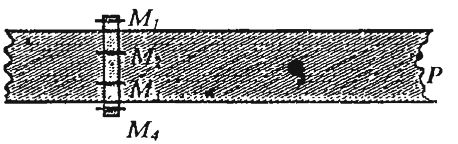
Чертеж 24-й



Чертеж 25-й

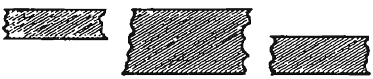


Чертеж 26-й



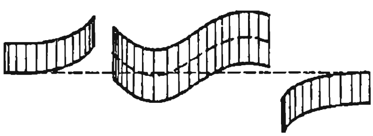
Чертеж 27-й. Стросние точки.

Такой результат легко было бы предвидеть: ведь, очевидно, что точка комплексная должна быть представлена таким образом, чтобы при частных ограничениях, т.е. полагая действительные или мнимые компоненты ее координат нулю, мы могли получить из комплексной точки точку действительную, полумнимую и мнимую. Следовательно, комплексная точка объединяет в себе все частные виды точек, а плоскость P есть носительница именно комплексных точек, тогда как прочие точки суть образования *на* ней и *в* ней. Это — точки, как бы имеющие некоторую в ы с о т у . Поэтому, таковы же и линии, проходящие через подобные точки: линия прямая, проходящая через две комплексные точки, прорезывает плоскость насквозь; проходящая через две полукомплексные точки — делает надрез с верхней стороны плоскости, а проходящая через две мнимо-комплексные точки надрезывает плоскость с нижней стороны. Если бы посмотреть на эти прямые в микроскоп при бесконечном увеличении, то мы увидели бы полоски, как это изображено на чертеже 28-ом; плоскость этих полосок — перпендикулярна к сторонам поверхности координатной плоскости.



Чертеж 28-й. Бесконечно увеличенные комплексные прямые.

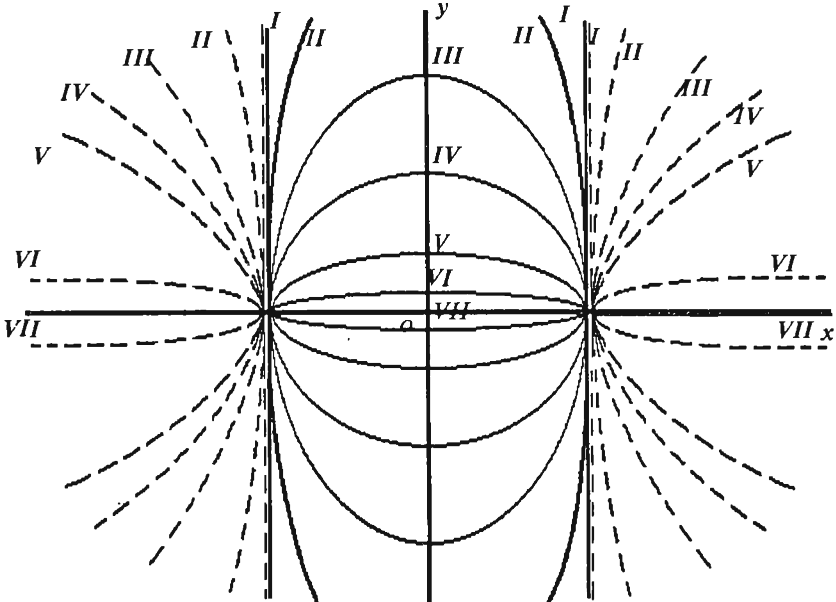
Подобно прямым, и кривые линии, уравнение которых удовлетворяется комплексными, полукомплексными или мнимо-комплексными точками, либо прорезают плоскость насквозь, либо надрезывают ее сверху или снизу. Бесконечно увеличенные в направлении, нормальном к плоскости своей, они представились бы цилиндрическими поверхностями, образующие которых нормальны к сторонам координатной плоскости. (Чертеж 29-й). Выражаясь несколько условно, скажем: линии действительные, мнимые и полумнимые бесконечно ниже, нежели линии полукомплексные и мнимо-комплексные; а линии этих



Чертеж 29-й. Бесконечно увеличенные комплексные кривые.

двух последних родов ниже, но не бесконечно, линий комплексных. Условность такого выражения — в том, что, конечно, ни одна линия не имеет высоты, или иначе говоря, высота всякой линии равна нулю; но высоты линий, если брать их *до* перехода к пределу, стремятся к нулю с различною интенсивностью, с различною быстротою. Последнее выражение заимствовано нами у Буссинеска, говорящего о дифференциале следующее: «Дифференциал не обозначает вполне, или, как говорят, объективно малой разности; он обозначает ее только субъективно, т.е. по нашему понятию, обозначает ее *напряжением*, с которым мы заставляем ее стремиться к нулю и рассматриваем только пределы, к которым будут стремиться результаты исчислений. Идея, которую имел Лейбниц, заставить подобное напряжение фигурировать в формулах, так же проста, как и замечательна, т.к. она позволяет производить уничтожения, нисколько не нарушая правильности формул». Вот таким-то напряжением и представляем мы себе высоту поверхности, точек и линий. И представление это необходимо, — несистематически же давно существует в науке: разве не так именно мыслятся в физике элементарные магниты, двойной магнитный и электрический слой и т.д. Полное отрицание за ними протяжения просто уничтожило бы их магнитное или электрическое действие, придание же их протяжению — конечных размеров нарушило бы элементарный характер этих образований. (Полагаю, что как применительно к этим физическим образованиям, так и в отношении разъясненных образов геометрических, следовало бы воспользоваться понятием актуально бесконечно малых и что мы имеем право толковать толщину плоскости как отнюдь не нулевую величину, но — актуально бесконечно малую[2)], и, соответственно с этим, — толщину магнитного листка, двойного слоя и т.п. Но в настоящей работе, посвященной вопросам иного порядка, не считаю уместным входить в эти, доселе еще недоразрешенные, тонкие проблемы и потому довольствуюсь пока понятием о напряжении, хотя и вижу его логическую недостаточность).

§ 7. Итак, согласно предлагаемому толкованию мнимостей, кривая может уходить с лица поверхности вглубь ее толщи и тогда протекает на том или другом участке своего течения наподобие подземных рек, изображаемых на карте пунктиром, — чтобы затем найти себе выход наружу. Это, с точки зрения поверхностных процессов на плоскости, есть качественное изменение хода кривой; но по существу оно не нарушает связности кривой, коль скоро она рассматривается как образ, хотя и плоский, но все же пространственный: предлагаемое толкование дает возможность геометрически понять соотношение всех ветвей ее между собою. — На нескольких примерах поясним такое применение предлагаемого толкования.



Чертеж 30-й.

Изменение вида коники при изменении параметра p от $-\infty$ до 0. Сплошная черта обозначает действительные ветви, а пунктирная — полумнимые. При дальнейшем изменении p от 0 до ∞ ветви кривой получают тот же вид, но с взаимным обращением значений сплошной черты и пунктира: тогда сплошная черта означает полу-мнимые ветви, а пунктир — действительные

Пусть имеется уравнение гиперболы в каноническом виде:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad [21]$$

которое можно переписать еще так:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2, \qquad [22]$$

или

$$y^2 = px^2 - q,$$

$$\text{где} \quad p = \frac{b^2}{a^2}, \ \text{а} \quad q = b^2. \qquad [21']$$

Тогда все ветви, выражаемые данным уравнением, как действительные, так и полумнимые, составляют своею совокупностью *одну* кривую. Пусть теперь величина полуоси a остается конечной и неизменной, тогда как полуось b меняет свой размер, так что, следовательно, меняется и p. Теперь,

если $p = \infty$, то кривая распадается на пару прямых, параллельных оси y *и проходящих на расстоянии* $\pm a$ *от нее, причем каждую прямую надо считать парной, из слившихся действительной и полумнимой прямой;*

если $p > 1$, то образуется действительная гипербола, из пары ветвей, и полумнимый эллипс, соприкасающиеся в вершинах; по мере уменьшения b они будут сжиматься к оси x; приравняв нулю левую часть уравнения [21], получим уравнение пары действительных ассимптот, касательных к действительным ветвям кривой;

если $p = 1$, то тогда действительные гиперболы становятся равносторонними, а полумнимый эллипс — полумнимою окружностью, ассимтоты же полумнимой окружности будут соответствовать изотропам действительной окружности;

если $0 < p < 1$, то все ветви кривой еще более спадаются, полумнимый эллипс делается сжатым; в пределе,

если $p = +0$, то все ветви сжимаются в пару слившихся на оси x прямых; это — две спавшихся ветви бесконечно тонкой действительной гиперболы и бесконечно тонкий полумнимый эллипс. Обычно говорят, что бесконечно тонкая гипербола распадается на пару действительных прямых; но это неверно, ибо тут смешивается *предельное значение* (при $p = +0$) с *значением на пределе* (при $p = 0$). На самом деле имеется здесь пара действительных отрезков, разделенных отрезком полумнимым;

если $p = 0$, то вместо кривой образуется по оси x *провал*, щель; кривая, проваливаясь в нее, мгновенно выворачивается; то, что было *на* поверхности, входит в ее толщу, а что было в толще — выходит на поверхность, и потому,

если $p = -0$, то спавшаяся кривая представляет собою действительный средний отрезок (бесконечно тонкий действительный эллипс) и полумнимые бесконечные придатки его (бесконечнотонкая полумнимая гипербола);

если $-1<p<0$, то получается сжатый действительный эллипс и полумнимая сжатая гипербола;

если $p=-1$, то эллипс превращается в действительную окружность, а гипербола делается равностороннею полумнимою гиперболой;

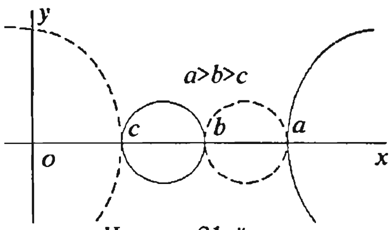
если $-\infty<p<-1$, то окружность вытягивается в действительный эллипс, гипербола расширяется, оставаясь полумнимою и,наконец,

если $p=-\infty$, то снова образуются две пары слившихся прямых, параллельных оси y и проходящих в расстоянии $\pm a$ от нее, но теперь уже эллипс обращается в действительные прямые, а гипербола — в полумнимые.

Такова связная картина всех превращений к о н и к и при изменении одной полуоси.

Весьма наглядно, при пользовании предлагаемым толкованием мнимостей, поведение кривых в о с о б ы х т о ч к а х. Рассмотрим, например, простую кривую третьего порядка, представляемую уравнением

$$y^2+Ax^3+Bx^2+Cx+D = 0, \qquad [23]$$



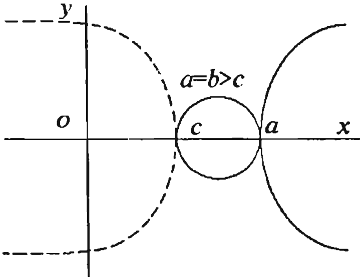
Чертеж 31-й

которое, ради удобства, можно привести к виду

$$y^2 = (x-a)(x-b)(x-c). \qquad [23']$$

Течение кривой представлено на чертеже 31-ом. Как видно, принадлежность замкнутого овала в кривой объясняется существованием полумнимых ветвей, его привязывающих к кривой. Станем теперь менять величину параметров a, b, c:

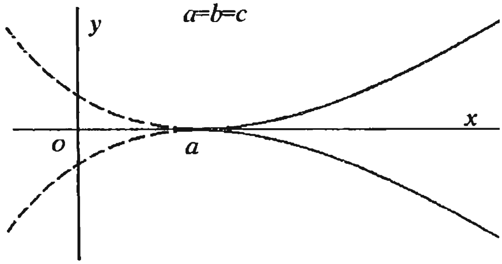
если $a=b>c$, то овал прилипает к кривой (чертеж 32-й);



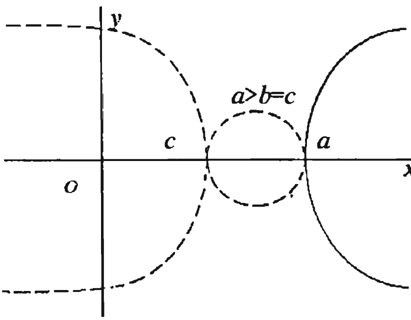
Чертеж 32-й

если $a=b=c$, то петля затягивается в точку, так что образуется точка возврата (чертеж 33-й);

если $b=c>a$, то овал, оставаясь отделенным от кривой или, точнее, висящим на полумнимых ветвях, затягивается в точечную петлю; это — изолированная точка, и понятно, почему ее должны мы рассматривать как принадлежащую к кривой, хотя она и кажется отделенной при обычном способе изображения (чертеж 34-й).



Чертеж 33-й



Чертеж 34-й

§ 8. *Обобщение предлагаемого истолкования мнимостей с плоскости — на всякие поверхности.* — Мы рассматривали доселе мнимости, как линейные протяжения на оборотной стороне координатной плоскости. Но так как основа интерпретации тут — в наличности оборотной стороны, а *не* в характере кривизны данной координатной поверхности, то естественно распространить предлагаемую интерпретацию на всевозможные поверхности, рассматриваемые как носительницы гауссовых криволинейных координат на них. И тогда возникает необходимость уяснить себе, а как же, в таком случае, должны быть поняты поверхности односторонние. — По общему смыслу наших рассуждений, должно, по-видимому, получиться, что на поверхностях односторонних мнимостей не бывает, или же что там — одни только мнимости. Но это заключение необходимо, конечно, провести аналитически. Можно было бы поставленный вопрос расширить и далее, воспользовавшись доказанным мною (в лекциях по «Энциклопедии Математики», читанных в 1919-1920 академическом году в Сергиево-Посадском Институте Народного Образования) делением поверхностей на четносторонние и нечетно-сторонние; тогда мнимости возможны на первых и, на ряду с действительными координатами, невозможны на вторых. Но в настоящей заметке достаточно обсудить и более узкий вопрос о поверхностях одно- и двусторонних, как типичных представительницах своих классов.

Итак, пусть имеется поверхность S, данная в гауссовых уравнениях:

$$x=\varphi(u, v), \quad y=\chi(u, v), \quad z=\psi(u, v), \tag{24}$$

где u и v суть криволинейные координаты на ней. Тогда кривая на этой поверхности выразится уравнением, связывающим координаты u и v:

$$\sigma(u, v) = 0. \tag{25}$$

Согласно традиции, идущей от Гаусса, станем обозначать: частные производные — соответственными буквенными индексами, поставленными при функциях, а вторые частные производные — такими же двумя индексами, так что:

$$\left.\begin{gathered}\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\varphi_u, \ \frac{\partial\varphi}{\partial v}=\varphi_v, \ \frac{\partial\chi}{\partial u}=\chi_u, \ \frac{\partial\chi}{\partial v}=\chi_v, \ \frac{\partial\psi}{\partial u}=\psi_u, \ \frac{\partial\psi}{\partial v}=\psi_v, \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}=\varphi_{uu}, \ \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}=\varphi_{uv}, \ \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}=\varphi_{vv} \text{ и } m.\partial.\end{gathered}\right\} \tag{26}$$

Далее, обозначаем функциональные детерминанты:

$$\chi_u\psi_v-\psi_u\chi_v=A,\ \psi_u\varphi_v-\varphi_u\psi_v=B,\ \varphi_u\chi_v-\chi_u\varphi_v=C \qquad [27]$$

$$\text{и } \varphi_u^2+\chi_u^2+\psi_u^2=E,\ \varphi_u\varphi_v+\chi_u\chi_v+\psi_u\psi_v=F, \quad \varphi_v^2+\chi_v^2+\psi_v^2=G \qquad [28]$$

$$A^2+B^2+C^2=R \quad [29] \qquad +\sqrt{R}=+\sqrt{A^2+B^2+C^2}=T \quad [29']$$

И, по Р.Гоппе:

$$\begin{aligned} X\varphi_{uu}+Y\chi_{uu}+Z\psi_{uu}&=L\\ X\varphi_{uv}+Y\chi_{uv}+Z\psi_{uv}&=M\\ X\varphi_{vv}+Y\chi_{vv}+Z\psi_{vv}&=N, \end{aligned} \qquad [30]$$

где X, Y, Z определены уравнениями [31].

Возьмем на поверхности S точку M (x, y, z), определяемую криволинейными координатами (u, v). Тогда косинусы углов нормали к поверхности в этой точке M с осями координат будут:

$$X=\frac{A}{T},\ Y=\frac{B}{T},\ Z=\frac{C}{T}; \qquad [31]$$

дифференциал дуги кривой, выражаемой уравнением [25], будет:

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2, \qquad [32]$$

$$\text{а} \quad \frac{ds^2}{\rho}=-(dxdX+dydY+dzdZ)= =Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2. \qquad [33]$$

Станем теперь, исходя из точки M, делать обход по поверхности, выражаемый уравнением [25] и, наконец, вернемся в ту же точку M, которую теперь, в качестве конечной, обозначим через $\overline{M}$. Ясно, что пространственные координаты ее $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ соответственно равны координатам x, y, z, так что

$$\overline{x}=x,\quad \overline{y}=y,\quad \overline{z}=z \qquad [34]$$

Но направление нормали к поверхности может оставаться прежним, так что

$$\bar{X} = X, \quad \bar{Y} = Y, \quad \bar{Z} = Z, \tag{35}$$

а может также измениться на обратное, так что

$$\bar{X} = -X = -\frac{A}{T}, \quad \bar{Y} = -Y = -\frac{B}{T}, \quad \bar{Z} = -Z = -\frac{C}{T}. \tag{36}$$

Первый случай соответствует поверхности двусторонней, второй же — односторонней. Оставляя в стороне первый, как не занимающий нас в настоящем параграфе, рассмотрим более внимательно второй. Итак, спросим себя, отчего же, формально-аналитически, произошло в этом втором случае такое обращение нормали. Очевидно, от того, что, хотя пространственные координаты конца обхода $\bar{M}$ и тождественны с таковыми же начала его M, *но криволинейные координаты* $\bar{u}$ и $\bar{v}$ *не* тождественны с таковыми же u и v. Иначе говоря, хотя точка $\bar{M}$ есть одна и та же, что и M, точка в пространстве, но она — не одна и та же точка в отношении поверхности S. Однако, при этом $\bar{u}$ и $\bar{v}$ таковы, что, в силу [34], должны быть совместными равенства:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(u, v) &= \varphi(\bar{u}, \bar{v}) \\ \chi(u, v) &= \chi(\bar{u}, \bar{v}) \\ \psi(u, v) &= \psi(\bar{u}, \bar{v}) \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Другими словами, функции x, y, z вполне инвариантны относительно подстановки вместо u и v величин $\bar{u}$ и $\bar{v}$, но X, Y, Z не инвариантны и, оставаясь неизменными по абсолютной величине, меняют знак свой.

Из равенств [37] может быть определена совершаемая при этом подстановка:

$$\left.\begin{aligned} \bar{u} &= g(u, v) \\ \bar{v} &= h(u, v) \end{aligned}\right\}, \tag{38}$$

инвариантами которой являются функции [24]. Обозначая функциональный определитель

$$g_u h_v - g_v h_u = \frac{\partial(g, h)}{\partial(u, v)} = (g, h) = f, \tag{39}$$

в силу инвариантности функций φ, χ, ψ, мы можем написать

$$\left\{\begin{array}{l}\bar{A}\cdot f = A\\ \bar{B}\cdot f = B\\ \bar{C}\cdot f = C\end{array}\right\} \qquad [40]$$

Чтобы знаки $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ были обратны знакам X, Y, Z, необходима и достаточна перемена знака либо у всех трех числителей выражения [31], т.е. у A, B, C, либо у знаменателя T. Но, как непрерывная, функция T может изменить знак только проходя чрез 0 или чрез ∞, а для этого необходимо, чтобы A, B и C, все три зараз, прошли чрез 0 или чтобы прошла чрез ∞ хотя бы одна из этих величин, и при этом на произвольном пути между $\bar{M}$ и M, т.е.чтобы миновать это изменение при переходе от $\bar{M}$ к M было невозможно. Но это будет так — лишь при прохождении через особую линию на поверхности S. Быть так для любой точки M — не может. Поэтому, рассматривая более общий случай, оставим в стороне предположение о перемене знака у T и обсудим перемену знаков у A, B и C. Но для изменения знаков у A, B и C, необходимо, как видно из формулы [40], чтобы получился таковой либо у A, B и C, либо чтобы знак детерминанта замещения f был отрицательный. Первое предположение требует перехода A, B и C либо чрез нуль, либо чрез бесконечность, а для этого опять необходимо, чтобы наш обход пересек особую линию поверхности S. Оставляя этот случай, как исключительный и уже исключенный, сущий вне рассмотрения, предполагаем, следовательно, отрицательный знак детерминанта замещения:

$$f < 0. \qquad [41]$$

Простейшею линейною подстановкою переменных u и v будет подстановка вида:

$$\bar{u} = \frac{a_{11}u + a_{13}}{b_{11}u + b_{13}}; \quad \bar{v} = \frac{a_{22}v + a_{23}}{b_{22}v + b_{23}}. \qquad [42]$$

Функциональный определитель этой подстановки есть:

$$f = \frac{(a_{11}b_{13} - a_{13}b_{11})(a_{22}b_{23} - a_{23}b_{22})}{(b_{11}u + b_{13})^2(b_{22}v + b_{23})^2}. \qquad [43]$$

Отрицательный знак он может иметь либо в зависимости от такового же у числителя, либо в зависимости от такового же у знаменателя. — В первом случае, т.е. когда постоянное число

$$(a_{11}b_{13}-a_{13}b_{11})(a_{22}b_{23}-a_{23}b_{22}) < 0, \quad [44]$$

$$\text{а} \quad (b_{11}u+b_{13})^2(b_{22}v+b_{23})^2 > 0\,, \quad [45]$$

мы имеем дело с такою поверхностью, у которой обращение по нормали происходит при обеих гауссовых координатах действительных или обеих — мнимых, ибо и в том и другом случае знаменатель определителя существенно положителен. Не трудно признать в ней поверхность односторонною.

Если же при наличии неравенства [44] , имеет место еще неравенство

$$(b_{11}u+b_{13})^2(b_{22}v+b_{23})^2 < 0, \quad [46]$$

то, значит, одна из координат, либо $\bar{u}$, либо $\bar{v}$ стала мнимой, вида

$$\bar{u} = \frac{a_{11}u+a_{13}}{b_{11}u+b_{13}}i \quad [47]$$

или

$$\bar{v} = \frac{a_{22}v+a_{23}}{b_{22}v+b_{23}}i\,. \quad [48]$$

Тогда, следовательно, дело идет о поверхности двусторонней, ибо изменять знаки у косинусов углов нормалей не приходится.

Таким образом, переворот нормали определяется тем, остаемся ли мы на той же самой стороне (т.е. на поверхности односторонней), или переходим на другую сторону, одна координата которой действительная, а другая — мнимая (поверхность двусторонняя).

Во втором случае, т.е, когда постоянное число

$$(a_{11}b_{13}-a_{13}b_{11})(a_{22}b_{23}-a_{23}b_{22}) > 0, \quad [49]$$

а неравенство [46] сохраняет свою силу, переворота нормали нет, т.е. нет ни при обеих действительных, ни при обеих мнимых координатах. Если же имеет место неравенство [45], то нормаль переворачивается при одной мнимой координате и не переворачивается при координатах, обеих действительных или обеих мнимых.

Итак, при наличии определенного преобразования, знак числителя f в [43] будет определенным, — либо положительным, либо отрицательным. И вот, относительно этого самого, одного и того же, преобразования, поверхность односторонняя и поверхность двусторонняя ведут себя прямо противоположно. Если оно переворачивает нормаль у одной поверхности, то не переворачивает — у другой, и наоборот. В итоге, по отношению к данному преобразованию имеем:

Одно и то же преобразование		
	Поверхность односторонняя.	Поверхность двусторонняя.
Обе координаты u и v действительны или обе мнимы.	Нормаль переворачивается. Нормаль не переворачивается.	Нормаль не переворачивается. Нормаль переворачивается.
Одна из координат u и v действительная, а другая — мнима.	Нормаль переворачивается. Нормаль не переворачивается.	Нормаль не переворачивается. Нормаль переворачивается.

Что касается до криволинейных отрезков, то этот вопрос решается рассмотрением элемента дуги ds. В выражении [33] для $\frac{ds^2}{\rho}$ входят величины dx, dy, dz и dX, dY, dZ; после линейного преобразования [38] первые свой знак меняют во всяком случае, вторые же могут изменить его, или не изменить, причем это, раз преобразование установлено, зависит от рода поверхности. Соответственно изменению или неизменению знака, ds будет мнимым или действительным: когда ds окажется действительным на поверхности односторонней, то оно будет мнимым на поверхности двусторонней, и наоборот. — Этим кратким указанием ограничимся.

§ 9. В качестве предварительного сообщения, к изложенному выше пусть присоединится еще несколько мыслей, по широте своего охвата и по ответственности не притязающих, в этом кратком изложении, на полную обоснованность. Но ради закругленности теории мнимостей представляется полезным наметить ходы дальнейшей разработки и некоторые возможные применения. А кроме того, мне хотелось не оставить без отклика отпразднованный 14 сентября 1921 года, на пороге нового духовного синтеза, шестисотлетний юбилей кончины величайшего из выразителей целостного миропонимая. Думается, предложенное здесь истолкование мнимостей, в связи со специальным и с общим принципами относительности, по-новому освещает и обосновывает то Аристотеле-Птолемее-Дантово миропредставление, которое наиболее законченно выкристаллизовано в «Божественной Комедии».

Напомним, для начала, самый остов Дантовой космологии. Сделать это тем более необходимо, что в комментариях на «Божественную Комедию» обычно дается изображение: сфера Земли, окруженная сферами небесных светил, небом неподвижных звезд, кристалльным небом и, наконец, эмпиреем, причем Дантов путь, по выходе его из недр Земли, начерчен ломанной линией, спирально переходящей по концентрическим сферам и загибающейся на 180°, к зениту Сиона. Но этот чертеж не соответствует ни повествованию Данта, ни основам его космологии. Картина этой вселенной неизобразима эвклидовскими чертежами, как Дантовская метафизика несоизмерима с философией Канта[3)]. Математиками, — Хальстедом (1905), Вебером (1905), Симоном (1912), — уже отмечено предвосхищение Дантом неэвклидовой геометрии, например, в вопрошании явившегося Господа царем Соломоном, домогающимся узнать:

> ... можно ль треугольник начертить в полукруге, без «прямого» при процессе черчения?...

Итак, припомним путь Данта с Вергилием. Он начинается в Италии. Оба поэта спускаются по кручам воронкообразного Ада. Воронка завершается последним, наиболее узким кругом Владыки преисподней. При этом, обоими поэтами сохраняется во все время нисхождения вертикальность — головою к месту схода, т.е. к Италии, и ногами — к центру Земли. Но, когда поэты достигают приблизительно поясницы Люцифера, оба они внезапно переворачиваются, обращаясь ногами к поверхности Земли, откуда они вошли в подземное царство, а головою — в обратную сторону (Ад, песнь XXIII):

74 По клочьям шерсти (Люцифера) и коре льдяной,
Как с лестницы, спускалась тень Вергилья.
76 Когда же мы достигли точки той,
Где толща чресл вращает бедр громаду, —
Вождь опрокинулся туда главой
79 Где он стоял ногами, и по гаду
За шерсть цепляясь, стал всходить в жерло:
Я думал, вновь он возвращался к Аду.
82 «Держись, мой сын!» — сказал он, тяжело
Переводя свой дух от утомленья:
«Вот путь, которым мы покинем зло».
85 Тут в щель скалы пролез он, на каменья
Меня ссадил у бездны и в виду
Стал предо мною, полн благоговенья.
88 Я поднял взор и думал, что найду,
Как прежде Диса; но увидел ноги,
Стопами вверх поднятыми во льду.
91 Как изумился я тогда в тревоге,
Пусть судит чернь, которая не зрит,
Какую грань я миновал в дороге.
94 «Встань на ноги», заговорил пиит ...
(Перев. Д.И.Мина)

Миновав эту грань (которой и до сих пор эвклидовская «чернь не зрит»), т.е. окончив путь и миновав центр мира, поэты оказываются под гемисферою противоположной той, «где распят был Христос»: они подымаются по жерлообразному ходу.

133 Мой вождь и я сей тайною тропою
Спешили снова выйти в Божий свет
И, не предавшись ни на миг покою,
136 Взбирались вверх — он первый, я во след,

Пока узрел я в круглый выход бездны
Лазурь небес и дивный блеск планет,
139 И вышли мы, да узрим своды звездны.

После этой грани поэт восходит на гору Чистилища и возносится через небесные сферы. — Теперь — вопрос: по какому направлению? Подземный ход, которым они поднялись, образовался падением Люцифера, низвергнутого с неба головою. Следовательно, место, откуда он низвергнут, находится не вообще где-то на небе, в пространстве, окружающем Землю, а именно со стороны той гемисферы, куда попали поэты. Гора Чистилища и Сион, диаметрально противоположные между собою, возникли как последствия этого падения, и значит путь к небу направлен по линии падения Люцифера, но имеет обратный смысл. Таким образом, Дант все время движется по прямой и на небе стоит — обращенный ногами к месту своего спуска; взглянув же оттуда, из Эмпирея, на Славу Божию, в итоге оказывается он, *без* особого возвращения назад, во Флоренции. Путешествие его было действительностью; но если бы кто стал отрицать последнее, то во всяком случае оно должно быть признано поэтическою действительностью, т.е. представимым и мыслимым, — значит, содержащим в себе данные для уяснения его геометрических предпосылок[4)]. Итак: двигаясь все время вперед по прямой и перевернувшись раз на пути, поэт приходит на прежнее место в том же положении, в каком он уходил с него. Следовательно, если бы он по дороге не перевернулся, то прибыл бы по прямой на место своего отправления уже вверх ногами. Значит, поверхность, по которой двигается Дант, такова, что прямая на ней, с одним перевертом направления, дает возврат к прежней точке в прямом положении; а прямолинейное движение без переворота — возвращает тело к прежней точке перевернутым. Очевидно, это — поверхность: 1°, как содержащая замкнутые прямые, есть *римановская* плоскость, и 2°, как переворачивающая при движении по ней перпендикуляр, есть поверхность *односторонняя*. Эти два обстоятельства достаточны для геометрического охарактеризования *Дантова пространства*, как *построенного по типу* эллиптической геометрии. Напоминаем, что *Риман*, пользуясь собственно дифференциальными методами исследования, не имел возможности рассмотреть форму полных поверхностей. В силу этого, предметом его геометрических обсуждений были безразлично две, далеко не тождественные между собою, геометрии, из которых одна полагает в основу плоскость эллиптическую, другая же — сферическую. В 1871 г. Ф. Клейн указал, что сферическая плоскость обладает характером поверхности двусторонней, а эллиптическая — односторонней. Дантово пространство весьма похоже именно на пространство эллиптическое. Этим бросается неожиданный пучок света на средневековое представление о конечности мира. Но в принципе относительности эти общегеометрические соображения получили недавно неожиданное конкретное истолкование, и с точки зрения современной физики мировое пространство должно быть мыслимо именно как пространство эллиптическое, и признается конечным, равно как и время, — конечное, замкнутое в себе[5)].

На этом поразительном юбилейном подарке Средневековью от враждебной ему галилеевской науки, дело однако не кончается. И вот некоторые дальнейшие сопоставления.

Вопрос идет о реабилитации Птолемее-Дантовой системы мира. Принцип относительности «доказывается» неудачею опыта Майкельсона и Морлея. Не сомневаясь в общем принципе относительности и лишь несколько недоумевая, что значит в специальном принципе «прямолинейное равномерное движение», коль скоро нет неподвижных координатных осей, я хотел бы, однако, задать простой вопрос о причине неудачи вышеупомянутого опыта. В основу опыта положена гипотеза о движении Земли, и когда последствий этого движения не обнаружилось, тогда стал придумываться ряд чрезвычайных новых гипотез, которыми хотели подпереть первую гипотезу о движении Земли. Но гипотеза, признанная наиболее основательной, — специальный принцип относительности, — будучи вполне приемлемой сама по себе, однако в корень уничтожает самую предпосылку Майкельсона, ибо утверждает, что никаким физическим опытом убедиться в предполагаемом движении Земли невозможно. Иначе говоря, Эйнштейн объявляет систему Коперника чистой метафизикой, в самом порицательном смысле слова. А если так, то не проще ли было бы, чем хватать себя за ухо через голову, начать объяснение Майкельсоновской неудачи наиболее естественным предположением — о л о ж н о с т и его основной предпосылки: предполагали, что опыт удастся, потому, что рассчитывали на скорость Земли (- гипотетическую! -) 30 км/сек; но опыт н е удался, и следовательно прежде всего нужно было заподозрить допущенную гипотезу и подумать, движется ли, в самом деле, Земля? — Земля покоится в пространстве — таково п р я м о е следствие опыта Майкельсона[6]. Косвенное следствие — это надстройка, именно утверждение, что понятие о движении — прямолинейном и равномерном — лишено какого-либо уловимого смысла. А раз так, то из-за чего же было ломать перья и гореть энтузиазмом якобы постигнутого устройства вселенной?

Но, кроме поступательного движения Земли, приходится иметь в виду еще вращательное, и тут, казалось, Коперник что-то «открыл». Этому предположению противостоит обобщенный принцип относительности, в формулировке Л е н а р д а гласящий: «при любых движениях, все явления природы должны протекать совершенно одинаково, будет ли наблюдатель или все окружающее пространство приведено в соответствующее движение». Иначе говоря, применительно к нашему частному случаю, н е т и принципиально н е м о ж е т б ы т ь доказательств вращения Земли, и в частности, ничего не доказывает пресловутый опыт Фуко: при неподвижной Земле и вращающемся вокруг нее, как одно твердое тело, небосводе, маятник так же менял бы относительно Земли плоскость своих качаний, как и при обычном, Коперниковском предположении о Земном вращении и неподвижности Неба. Вообще, в Птолемеевой системе мира, с ее хрустальным небом, «твердью небесною», все явления должны происходить так же, как и в системе Коперника, но с преимуществом здравого смысла и верности земле, земному, подлинно достоверному опыту, с соответствием философскому разуму и, наконец, с удовлетворением геометрии. Но было бы большою ошибкой объявлять системы Коперниковскую и Птолемеевскую р а в н о п р а в н ы м и способами понимания: они таковы — т о л ь к о в плоскости отвлеченно-механической, но, по совокупности данных, истинной оказывается последняя, а первая — ложной. Это прямое подтверждение великой поэмы, хотя и более чем через 600 лет.

Впрочем, и им углубленное понимание Птолемее-Дантовской системы только начинается, ибо современная научная мысль, совершенно неожиданно, подводит нас к Данте-Аристотелевской науке о началах сущего. Специальный принцип относительности выражается иногда в виде признаваемого ему равносильным принципа предельности мировых скоростей: не может быть скоростей больших скорости света $3 \cdot 10^{10}$ см/сек. Но, если это верно, то как же, по общему принципу относительности, может быть допущено движение небосвода вокруг Земли, для какового требуются скорости неизмеримо превосходящие вышеозначенный предел? Так, стравив оба принципа, противники второго, т.е. очевидно защитники коперниканства, думали опровергнуть источник возражений себе, но не вдумавшись достаточно, собственными руками вырыли себе яму.

Что собственно значит предельность величины $3 \cdot 10^{10}$ см/сек ? Это значит вовсе не невозможность скоростей равных и больших c, а — лишь появление вместе с ними вполне новых, пока нами наглядно непредставимых, если угодно — трансцендентных нашему земному, кантовскому опыту, условий жизни; но это вовсе не значит, чтобы таковые условия были немыслимы, а может быть, с расширением области опыта, — и представимыми. Иначе говоря: при скоростях, равных c и тем более — больших c, мировая жизнь качественно отлична от того, что наблюдается при скоростях меньших c, и переход между областями этого качественного различия мыслим только прерывный. Обращаясь к Птолемеевской системе, мы видим, что внутренняя ее область, с экваториальным радиусом

$$R = \left(\frac{23ч\ \ 3м\ \ 56{,}6\ с}{2\pi} \cdot 300000 \right) км,$$

где $23ч\ \ 3м\ \ 56{,}6\ с$ есть продолжительность звездного времени по среднему солнечному времени, ограничивает собою все земное бытие. Это есть область земных движений и земных явлений, тогда как на этом предельном расстоянии и за ним начинается мир качественно новый, область небесных движений и небесных явлений, — попросту Небо[7)]. Этот демаркационный экватор, раздел Неба и Земли, не особенно далек от нас, и мир земного — достаточно уютен. А именно, в астрономических единицах длины радиус его R

равен 27,522 средних расстояний Солнца от Земли. Итак, область небесных движений в 27,5 раз далее от Земли, чем Солнце; иначе говоря, граница ее — между орбитами Урана и Нептуна. Результат поразительный, потому что им Птолемее-Дантовское представление о мире подтверждается даже количественно, а граница мира приходится как раз там, где ее и признавали с глубочайшей древности. Граница мира была з а Ураном, — о котором сведения были уже смутные. Но вдумаемся, что значит этот результат конкретно. — Характеристики тел движущейся системы, наблюдаемой из неподвижной, зависят от основной величины

$$\beta = \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

где v есть скорость движения системы, а c — скорость света. Пока v менее c, β действительно, и все характеристики остаются имманентными земному опыту; при v равном c, $\beta = 0$, и при v большем c, β делается мнимым. В двух последних случаях происходит двукратный качественный скачок соответственных характеристик. Так, в движущейся системе длина тел по направлению движения сокращается в отношении $\beta : 1$, время — в отношении $1 : \beta$, масса — в отношении $1 : \beta$, и т.д.

Следовательно, на границе Земли и Неба длина всякого тела делается равной нулю, масса бесконечна, а время его, со стороны наблюдаемое — бесконечным. Иначе говоря, тело утрачивает свою протяженность, переходит в вечность и приобретает абсолютную устойчивость. Разве это не есть пересказ в физических терминах — признаков и д е й, по Платону — бестельных, непротяженных, неизменяемых, вечных сущностей? Разве это не аристотелевские чистые формы? или, наконец, разве это не воинство небесное, — созерцаемое с Земли как звезды, но земным свойствам чуждое?

Так — на пределе, при $\beta = 0$. Но за пределом, при $v > c$ время протекает в о б р а т н о м смысле, так что с л е д с т в и е п р е д ш е с т в у е т п р и ч и н е. Иначе говоря, здесь действующая причинность сменяется, — как и требует Аристотеле-Дантовская онтология, — причинностью конечною, телеологией, — и за границею предельных скоростей простирается царство целей[8а]. При этом д л и н а и м а с с а т е л д е л а ю т с я м н и м ы м и. Когда для мнимостей н е т конкретного истолкования, такой результат кажется странным, и именно неконкретность мышления о мнимостях до сих пор заставляет избегать сделанные здесь выводы исследователей новой механики. Но пора повергнуть два пугала мысли — мнимость и непрерывность, пора избавиться от horror imaginarii и horror discontinuitatis!

Но, имея в виду предлагаемое здесь истолкование мнимостей, мы наглядно представляем себе, как, стянувшись до нуля, тело проваливается сквозь поверхность — носительницу соответственной координаты, и выворачивается через самого себя, — почему приобретает мнимые характеристики. Выражаясь образно, а при конкретном понимании пространства — и не образно, можно сказать, что пространство ломается при скоростях, больших скорости света, подобно тому, как воздух ломается при движении тел, со скоростями, большими скорости звука; и тогда наступают качественно новые условия существования пространства, характеризуемые мнимыми параметрами. Но, как провал геометрической фигуры означает вовсе не уничтожение ее, а лишь ее переход на другую сторону поверхности и, следовательно, доступность существам, находящимся по ту сторону поверхности, так и мнимость параметров тела должна пониматься не как признак ирреальности его, но — лишь как свидетельство о его переходе в другую действительность. Область мнимостей реальна, постижима, а на языке Данта называется Эмпиреем. Все пространство мы можем представить себе двойным, составленным из действительных и из совпадающих с ними мнимых гауссовых координатных поверхностей, но переход от поверхности действительной к поверхности мнимой возможен только через разлом пространства и выворачивание тела через самого себя. Пока, мы представляем себе средством к этому процессу только увеличение скоростей, может быть скоростей каких-то частиц тела, за предельную скорость c; но у нас нет доказательств невозможности каких-либо иных средств[8b].

Так, разрывая время, «Божественная Комедия» неожиданно оказывается не позади, а впереди нам современной науки.

1922, VII, 3/17.

Сергиев Посад

ПРИМЕЧАНИЯ

Основная часть настоящей работы (§§ 1-7) написана в бытность мою студентом, в августе 1902 года, и тогда же сообщена проф. Л.К.Лахтину и некоторым товарищам, помнится Н.Н.Лузину, ныне проф. 1-го Московского Университета. Весною 1921 года эти параграфы были пройдены заново, и к ним присоединен обобщающий § 8. 28 сентября ст. ст. (10 октября по н.ст.) того же 1921 года эта работа была доложена на очередном вторичном заседании Всероссийской Ассоциации Инженеров (ВАИ), в Москве. Летом 1922 года, в связи с появившейся возможностью напечатания работы, были добавлены § 9 и «Пояснение к обложке».

[1] В хронологической последовательности, сочинения, в которых развивалась концепция комплексной плоскости, должны быть расположены таким порядком:

H.Kühn (1690-1769). — Meditationes de quantitatibus imaginariis exhibentis. Мемуар этот напечатан автором в Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Т. 3, 1750

Henri Dominique Truel в 1786 г. развил теорию изображения комплексных чисел и сообщил ее Августину Normand'у; напечатаны его сообщения были в 1810 году.

Caspar Wessel, — Om Directionens analytiske Betegning. Доложено в 1797 году Датской Академии, напечатано в 1798 г. и вышло в свет в 1799 году; воспроизведено в Arch. for Math. ok. Nat. 18, 1896, а также во французском переводе под заглавием: Essai sur la représentation de la direction. Copenhague, 1897

Gauss применил изображение комплексных чисел посредством точек в своей диссертации Demonstratio nova etc. Helmstedt, 1799 (werke, 5, p. 3; немецкий перевод E.Netto в Ostwald's Klassikern, N 14. Lpz, 1890. (См. также письмо Гаусса к Весселю от 18 декабря 1811 года). О простейших операциях над комплексами Гаусс печатно не говорит ранее 1825 года — Abhandlung über Kartenprojectionen (Astronom. Abh. von Schumacher, Heft 3, Altona 1825; Werke 4, p.189).

Еще: Göttingische gelehrten Anzeigen, Jahr 1831, St. 64, S. 625 и Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio 2-e, Höttingae,1832, p. 16 art. 38 et 39 (Werke,2, p.169).

J.Rob.Argand, — Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques. Paris, 1806. Есть издание 1873 года, сделанное .Hoüel'ем.

Аббат Buée, — Sur quantités imaginaires („Philosofical Transactions", 1806).

Français, — Nouveaux principes de Géométrie de position, et interprétation géométrique des symboles imaginires („Annales des Mathématiques“. T.4, pp.222, 228, 364. T.5, pp.197, 1813 и 1815).

John Warren, — A Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities. Cambridge, 1828. — Дальнейшее развитие своей теории Уаррен дает в Philosophical Transactions, 1829, pp. 241-254, 33—359.

Mourey, — La vrai théorie des quantités negatives et des quantités prétendues imaginaires, Paris, 1828. Есть издание 1861 г.

G.Bellavitis. — Methodo delle equipollenze („Annale delle science del regno Lombardo-Veneto“. T. 7, 1837)

Его же, — Sposizione del metodo delle equipollenze („Memorie della Società Italiana dell scienze“. T.25, Modena, 1854). — Есть французский перевод: Exposition de la methode des equipolences par G.Bellavitis, traduit par Laisant. Paris, 1894.

A.Cauchy, — Sur les quantités géométrques (Cauchy, — Exercices d'Analyse et Physique mathématique. T.4, Paris, 1847, pp. 157-180).

Matzka, — Versuch einer richtigen Lehre von der Realitat der Vorgebliche imaginären Grössen der Algebra. Прага, 1850.

H.Sheffler, — Ueber das Verhaltniss der Arithmetik zur Geometrie, Braunschweig, 1846.

Его же , — Der Situatioknskalkül, Braunschweig, 1851.

A.F.Möbius, — Abhandlungen („Berichte der Königl. Sachs. Ges. d. Wiss“, 1852-1858). Связное изложение мыслей Мёбиуса см. в: Witzschel, — Grundlinien der neueren Geometrie, 1858.

F.Riecke, — Die Rechnung mit Tichtungszahlen. Stuttgart, 1856.

Hoüel, — Sur la méthode d'analyse géométrique de M.Bellavitis. („Nouv. Ann. de Math.“, 2-me série. T.8, 1869).

Его же, — Théorie élémentaire des quantités complexes par Hoüel Partie première, 1867. — Русский перевод в „Математическом Сборнике“ T.5 Вып.1.

F.Gomes Texeira, professeur a l'Université de Coïmbre (Portugal). („Ann. de la Société scientifique de Bruxelle“, 7-e année, 1883, pp.417 -427. — Приложение к „Mathesis“. T.3, 1883. — См. также заметку M.P.Mansion'a. T.3, pp.13-16).

[2] Из числа других геометрических истолкований комплексных чисел следует упомянуть о приурочении их посредством стереографической проекции к сфере *(„Сфера Неймана“)*, хорошо известном из теории функций мнимого переменного.

Грегори (1813-1844) предложил особенное геометрическое представление для мнимых количеств; а Максимилиан Мари дал еще интерпретацию, „с помощью которой он легко объяснил периодичность не только интегралов простых, но и кратных". Но суть этих истолкований мне неизвестна, и я делаю упоминания о них, а равным образом и нижеследующие библиографические указания, из вторых рук.

Gregory, — On the elementary principles of the application of algebraical symbols to Geometry („Cambridge Mathematical Journal". T.2, 1841). — Дальнейшее развитие своей мысли Грегори предложил в сочинении:

Gregory, — Exemples of the Differen. and Integral Calculus. Cambridge, 1841.

Maximilien Marie, — Théorie des fonctions variables imaginaires, Paris, 1874—1876. TT. 1—3.

[3] W.R. Hamilton, — в Dublin Transactions, 17 (1837), p.393.

Его же, –Lectures on Quaternions, Dublin 1853, введение. Подробное изложение этой теории см. в книге:

Otto Stolz und J.A.Gmeiner, — Theoretische Arithmetik, 2-te Auflage. Lpz., 1902, X.Abschnitt, §§ 276 ff.

См. также: E.Study. — Theorie der Gemeinen und Höheren complexen Grössen (Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Lpz, 1898-1904, I A 45 1/0).

[4] Формула Стокса (Stokes) гласит о тождестве двух интегралов, линейного и поверхностного.

$$\int_{(s)} \left\{ \varphi dx + \psi dy + \vartheta dz \right\} = \int\int \left\{ \left(\frac{d\vartheta}{dy} - \frac{d\psi}{dz} \right) \cos(n, x) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{d\varphi}{dz} - \frac{d\vartheta}{dx} \right) \cos(n, y) + \left(\frac{d\psi}{dx} - \frac{d\varphi}{dy} \right) \cos(n, z) \right\} dS,$$

причем левая часть этого тождества может быть переписана в виде:

$$\int_{(s)} \left\{ \varphi \frac{dx}{ds} + \psi \frac{dy}{ds} + \vartheta \frac{dz}{ds} \right\} ds.$$

Тут φ, ψ, ϑ суть три какие-либо, произвольные, конечные, непрерывные и однозначные функции точки в пространстве. S есть некоторая поверхность, ограниченная кривою s, dS и ds — их элементы, n — нормаль к элементу ds. Контур обходится по положительному направлению, т.е. такому которое наблюдателю, стоящему на поверхности S, так, чтобы нормаль n шла от его ног к голове, представляется обратным направлению часовой стрелки (чертеж 13-й).

Одно из наиболее распространенных доказательств теоремы Стокса предложено Друде: оно излагалось с некоторыми вариациями неоднократно. См., напр.:

Paul Drude, — Physik des Aethers auf elektromagnetischer Grundlage, 2-te, Auflage neu bearbeitet von Walter König. Stutgart, 1912, 1/10, §§ 20-25.

О.Д.Хвольсон, — Курс физики. Т. IV, СПБ., 1907. Ч. 2-я, гл. 1-ая, §5, стр.349-355.

Н.Шиллер, — Лекции по теории потенциальной функции, IV, § 25, стр.201-206. („Киевские Университетские Известия" 1884 г.).

[5] О делении поверхностей на одно- и двусторонние, кроме первоначальных заметок Листинга (Listing, Abhandlungen d. Konigl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. 10) и Мёбиуса (Möbius, Gesammelte Werke. Bd. 2, § 484) и не более двух параграфов у Darboux, — Leçons sur la théorie générale des surfaces, Part. 1 (n°n° 231, 232) имеются специальные работы:

N.Delaunay, — Leçons sur les surfaces n'ayant qu'un côté. („Bulletin de la Société Mathémattique de France". T.26, 1898).

Л.К.Лахтин, — Заметка об односторонних поверхностях („Математический сборник". Т.24. Вып. 2, М., 1903, стр.138-193).

Топологическая трактовка в:

M.Dehn und P.Heegaard, — Analysis Situs.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschafften, III A B 2, SS. 153. ff).

Рассмотрение вопроса в порядке чисто топологическом дано мною в курсе лекций по „Энциклопедии Математики".

Настоящее изложение примыкает к „Заметке" Л.К.Лахтина.

ПРИМЕЧАНИЯ РЕДАКТОРА

1. Здесь у автора просматривается не аналитический, а синтетический, целостный подход к изучению свойств пространства и времени, которым дополняется аналитический способ научного исследования. Сочетание обоих способов при приоритетной роли синтетического составляет суть широко применяемой в настоящее время системной идеологии, или системного мировоззрения.

2. О технике использования актуально бесконечно малой ϵ при построении двойственной модели пространственно-временного многообразия, т.е. модели, сочетающей действительные и мнимые точки, см. в послесловии.

3. Отношение Флоренского к философии Канта не было однозначно-негативным. Он обратил внимание, в частности, на исследование тех предпосылок реального познания, которые привели Канта к заключению о необходимости поляризовать человеческий интеллект на рассудок и чувственную созерцательность. В пространственном созерцании вещей Кант обнаружил такие свойства, которые не могут быть выражены логико-понятийным способом. Это как раз свойства вещи, проявляющиеся в отношении к ее зеркальному двойнику. "Что может быть, — писал Кант, — более подобно моей руке или моему уху и во всех отношениях равно им в большей мере, чем их изображение в зеркале? И тем не менее я не могу такую руку, какую видно в зеркале, поставить на место ее прообраза; действительно, если это была правая рука, то в зеркале будет левая, и изображение правого уха будет левым, и никогда оно его не может заменить. Здесь нет никаких внутренних различий, которые мог бы мыслить какой-нибудь рассудок; и все же эти различия внутренние, насколько учат чувства: несмотря на все свое равенство и подобие, левая и правая руки не могут быть заключены между одинаковыми границами (не могут быть конгруэнтны); перчатка одной руки не годится для другой" (см.: Кант И. Соч. в 6-ти томах, т. 4, ч.1, М., 1965, с. 102).

Из этого наблюдения Кант сделал два вывода: (1) наши предметные представления не могут быть представлениями о вещах, каковы они сами по себе и какими бы их познавал чистый рассудок; представления относятся к категории явлений, за которыми скрываются вещи в себе;

(2) представления суть чувственные созерцания, которые нельзя объяснить, опираясь только на чисто рассудочную деятельность, ибо рассудок не способен однозначно предицировать предмет: одними и теми же

признаками рассудок описывает два *разных* предмета: сам предмет и его зеркальный двойник.

При построении геометрического образа зеркального отражения Флоренский показал, что зеркальным двойником действительной точки в аналитической геометрии является мнимая точка. Мнимые объекты выводят нашу способность познания за пределы *чувственного* созерцания, так что внутреннему взору человека открывается *сверхчувственная* (внеэмпирическая) реальность. В то же время он признавал заслугу Канта в подчеркивании различий между дискурсивной деятельностью интеллекта и его способностью к чувственному созерцанию. “< . . . > так или иначе,— писал он, — а наличность фактов, открытых Кантом, доказывает, что могут быть объекты, заведомо различные, но такие, что разница между ними решительно не формулируема рассудком, т.е. различающиеся один от другого не тем или иным признаком, а ipso re, непосредственно. Не в признаках бытия, а в самих недрах его содержится начало различия, и, для рассудка, объекты могут быть различными лишь друг через друга” (см.: Флоренский П. Столп и утверждение истины. М., 1914, с. 636).

4. В письме в Политотдел Флоренский писал: “Надо думать, в основе поэмы Данте лежит некоторый психологический факт — сон, видение и т.п. Всякий факт, раз он подлинно пережит, дает материал для размышления, и вовсе нет надобности уверовать в него, чтобы признать ценность тех или других его элементов. Если я во сне узнаю теорему Пифагора хотя бы от говорящей обезьяны, то от того теорема не делается ложной. Хорошо известно, что множество великих открытий, в том числе математических, было сделано во сне. Моя мысль — взяв подлинные слова Данте, показать, что символическим образом он выразил чрезвычайно важную геометрическую мысль о природе и пространстве”.

5. Вопрос относительно того, является ли мировое пространство эллиптическим (конечным) или гиперболическим (бесконечным), до сих пор в космологии еще не решен.

6. Вопрос о новом, нетрадиционном, с точки зрения теории относительности, истолковании опыта Майкельсона-Морли, в последнее время привлекает внимание многих ученых как в нашей стране, так и за ее пределами.

7. Флоренский ставит мысленный эксперимент, показывающий, каким образом совершается переход в мир сверхсветовых скоростей. Но этот эксперимент он облекает в чувственно-наглядную форму, используя Птолемее-Дантовскую картину мира. С точки зрения механического описания движения как Коперниковская, так Птолемеевская системы отсчета удовлетворяют, по его мнению, принципу относительности, т.е. оказываются равноправными.

8a, 8b. Следует четко различать два способа трансформации пространственно-временного интервала ds^2 теории относительности. Причинно-следственной связи физических событий, охватываемых световым косинусом, соответствует $ds^2 > 0$, если $ds^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$. Сверхсветовое влияние одного события на другое означало бы неравенство $ds^2 < 0$, обеспечиваемое тем, что $|c^2dt^2|$ становится меньше $|dx^2+dy^2+dz^2|$.

Зеркальное же преобразование ds^2, т.е. переход $ds^2 \rightarrow -ds^2$, означает соответствующее зеркальное преобразование всех составляющих ds^2, т.е. $dx^2 \rightarrow -dx^2$, $dy^2 \rightarrow -dy^2$, $dz^2 \rightarrow -dz^2$, $dt^2 \rightarrow -dt^2$, без изменения их абсолютных величин. В "Мнимостях" это различие явно не представлено.

ПОЯСНЕНИЕ К ОБЛОЖКЕ

Обложка настоящей книги резана по дереву Владимиром Андреевичем Фаворским. Как свойственно вообще этому художнику, так и здесь его гравюра не просто украшает книгу, но входит конститутивно в ее духовный состав. Поэтому данная работа Фаворского есть художество, насыщенное математическою мыслию. Опыт такого рода — может быть первый, в наше время возрождающейся гравюры. Кстати, сказать, вот направление искусства, которому в общем синтетическом складе грядущей культуры предстоит еще богатая жатва. Не только из признательности художнику за чуткое сотрудничество, но и по существу культурных задач нашего времени, автору книги казалось полезным дать несколько пояснений обсуждаемой обложки, в связи с кое-какими намеками на возможный смысл изложенной теории мнимостей, применительно к искусству.

Припомним несколько явлений психологии зрения.

Если смотришь на пространство через не слишком широкое отверстие, сам будучи в стороне от него, особенно при не слишком ярком освещении стены с отверстием, то в поле зрения попадает и плоскость стены; но глаз не может аккомодироваться одновременно и на видимом сквозь стену пространстве и на плоскости отверстия. Поэтому, сосредоточиваясь вниманием на освещенном пространстве, в отношении самого отверстия — глаз вместе и видит его и не видит. Он его видел, когда проникал чрез него вглубь пространства, а когда уже проникнул, то перестал видеть, но воспоминание о виденном не может оставить сознание: смутное, почти осязательного порядка, впечатление от этой стены беспрестанно будоражит в сознании то, что было ранее видено. Сознание необходимо раздвояется между образом непосредственно зрительным и образом косвенно, посредственно-зрительным, даваемым чем-то вроде осязания. При этих условиях восприятия в сознании наличны *два* элемента, или *два* слоя элементов, — однородных по своему *содержанию*, но существенно разнородных по своему *положению* в сознании, и в этом смысле не координируемых и взаимно исключающих друг друга.

Вид через оконное стекло еще убедительнее приводит к тому же раздвоению: наряду с самым пейзажем, в сознании налично и стекло, ранее пейзажа нами увиденное, но далее уже не видимое, хотя и воспринимаемое осязательным зрением или даже просто осязанием, например, когда мы касаемся его лбом. Отсюда — живописная и архитектурная проблема современного, т.е. затянутого стеклом, окна, как некоего лже-отверстия и некоей лже-стены; в постройках с обширными стеклянными покрытиями, и даже стеклянными стенами, эта проблема сделалась весьма настойчивой.

Когда мы рассматриваем прозрачное тело, имеющее значительную толщину, например аквариум с водою, стеклянный сплошной куб (чернильницу) и прочее, то сознание чрезвычайно тревожно двоится между различными по положению в нем (сознании), но однородными по содержанию (- и в этом-то последнем обстоятельстве — источник тревоги -) восприятиями обеих граней прозрачного тела. Тело качается в сознании между оценкой его, как *нечто*, т.е. тела, и — как *ничто*, зрительного ничто, поскольку оно прозрачно. *Ничто* зрению, оно есть *нечто* осязанию; но это *нечто* преобразовывается зрительным воспоминанием во что-то *как бы* зрительное. Прозрачное — призрачно.

Сквозящая зелень весенних рощ будит в сердце тревогу вовсе не только потому, что появляется «раннею весною», но и просто по оптической причине — своей прозрачности: давая стереоскопическую глубину пространства, своими точечными листочками, хотя бы и вовсе не «клейкими», эта зелень намечает глубинные точки пространства и, будучи густо распределенною, делает это с достаточной психологической принудительностью. От этого все пространство, овеществляясь, получает зрительно характер стекловидной толщи. Опять: оно *есть* и *не есть*, воистину — наглядно представленное Платоновское τὸ μὴ ὄν. — И еще один пример, особенно внятный. Как-то мне пришлось стоять в Рождественской Сергиево-Посадской церкви, почти прямо против закрытых царских врат. Сквозь резьбу их ясно виднелся престол, а самые врата, в свой черед, были видимы мне сквозь резную медную решетку на амвоне. Три слоя пространства; но каждый из них мог быть видим ясно только особой аккомодацией зрения, и тогда два другие получали особое положение в сознании и, следовательно, сравнительно с тем, ясно видимым, оценивались как полусуществующие.

Итак, в зрительном представлении мира необходимо, наряду с образами собственно зримыми, различать образы отвлеченно-зрительные, присутствующие, однако, в представлении неустранимо, силою бокового зрения, осязания и прочих восприятий, не дающих чистой зрительности, но к ней приводящих, на нее намекающих. Иначе говоря, в зрительном представлении есть образы зрительные, а есть — и *как бы* зрительные. Не трудно узнать в этой двойственности зрительно представляемого двойственную природу геометрической плоскости, причем собственно зрительные образы соответствуют действительной стороне плоскости, а отвлеченно-зрительные — мнимой. Ведь двусторонность геометрической плоскости и есть символ двуразличного положения в сознании зрительных образов, но — взятая предельно, т.е. когда толща разделенных слоев пространства бесконечно мала, а несоединимость тех и других образов предельно велика. Если переднюю сторону плоскости мы *видим*, то о задней только отвлеченно *знаем*. Но отвлеченно знать о некотором наглядном образе, сущность которого — именно в его наглядности, это значит иметь восприятие его каким-то *иным*, не зрительным, способом, но с коррективом на зрительность через отвлеченное понятие или через образ воспоминания. *Действительность*, в этом смысле, есть воплощение отвлеченного в наглядный материал, из которого и было получено отвлеченное; а *мнимость* — это воплощение того же самого отвлеченного, но в наглядном материале инородном. Если угодно, действительность есть адекватность абстрактного и конкретного (тавтегоричность), а мнимость — символичность (аллегоричность). В этом смысле и надлежит говорить о *понятиях ощущений*, как *ощущениях мнимых*, или *ощущениях мнимого*; это есть мнимость предельная. В самом деле, единственное содержание ощущения — это самая его чувственная наличность; мыслимое же ощущение — не просто *ничто*, но — другое ощущение (— ибо всякое понятие связывается с некоторым чувственным субстратом, точкою своего приложения —), апперцепируемое инородным понятием. Уместно вспомнить тут Мейнонговский термин Pseudoexistenz хотя и вне намека на значение его у Мейнонга. Эти особливо установленные в сознании чувственные элементы и мнимые образы вполне соответствуют мнимым геометрическим образам поверхности. Наличие же мнимых восприятий во всяком конкретном опыте побуждает искусствоведение подумать о *мнимом*: теории изобразительных искусств надлежит, следовательно, как-то сказать свое слово о предлагаемом истолковании геометрических мнимостей.

Обратимся теперь к попытке Фаворского — воспользоваться различением двух родов зрительных образов, с тем чтобы художественно выразить теорию мнимостей.

Первая задача, предлежавшая граверу, — это было сохранить и утвердить целостность основной плоскости, потому что без целостной плоскости не было бы возможности не только изображать на сторонах ее, но и различать самые стороны. Эта первая задача осуществлена *надписями*, удерживающими основную плоскость изображения на плоскости страницы, а также обозначениями точек координатных осей буквами *X*, *O*, *У* и вертикалью, проходящею через *X*. Самые буквы *X*, *O*, *У*, достаточно массивные, служат той же цели. Устойчивость главной вертикали подкреплена еще приподнятостью, сравнительно с именем автора, приходящейся над вертикалью фамилии его.

Страница, как таковая — конечно, не белая, а бесцветная: она есть отвлеченная возможность изображений. В этой странице было бы ошибочно видеть бумажный лист, вещество, каковой сам по себе не есть ни плоскость, ни что-либо иное геометрическое; но под страницею надо разуметь бесконечно-тонкое пространство изображений, как бы прозрачную пленку, наложенную на лист. Эта пленка, сама по себе, еще не есть та или другая *сторона* изобразительной плоскости, а — вся плоскость, с обеими своими сторонами и всею своею толщею, хотя бы актуально бесконечно-малою. Эта плоскость художником создана.

Теперь художнику надо наглядно показать, как ту, так и другую сторону этого пленочного пространства в их качественной тональности. Передняя сторона плоскости, как непосредственно зримая, обладает теплотою чувственно воспринимаемого и выдвигается вперед, но никак не ближе к зрителю, чем основная плоскость надписей. Большой прямоугольник, заштрихованный черным штрихом, по черноте штриха и по горизонтальности его, как теплых, дает образ передней стороны плоскости. На прямоугольнике, выступая вперед, изображены, как чисто действительные образы, полуэллипс и малый, сплошь черный прямоугольник — самые теплые и самые выступающие части пленочного пространства. Тонкая белая каемка, показывая их толщину, тем самым еще выдвигает их, приближая к зрителю. Все это — собственно зрительные образы. Им противопоставляется правая от вертикали сторона чертежа, резанная почти исключительно белым штрихом. Это — мнимая сторона плоскости, оборот пленочного пространства, и притом не *какого-либо* его места, а той самой области, что *под* заштрихованным прямоугольником левой части. Главная линия мнимой стороны есть дуга распрямляющейся гиперболы — мнимого придатка действительного эллипса, каковой придаток должно представлять себе касающимся эллипса у его вершины.

Чтобы придать этой линии цветность, гравер сжал ее серией горизонтальных белых штрихов, — и на абстрактной бесцветности пленочного пространства появилась холодная *белая* линия: такого цвета, противоположного теплой черноте передней стороны плоскости, эта оборотная; белый цвет этого оборота удачно показан наверху справа, где помещена белая решетка.

Спрашивается, почему оборот бел? Ясное дело, что раз он должен быть неким остаточным следом от чувственно-воспринятого — черного, то ему, как дополнительному образу или остаточному следу, необходимо быть именно белым. Еще: зрительность, как субстрат действительных образов, выражена присутствием теплой черноты; следовательно, отсутствие зрительности, т.е. некоторое *иное* восприятие, оформленное, *как* зрительное, необходимо представляется негативным — и зрительное, по форме, и незрительное, по содержанию. Выражать это призван белый штрих: он — как штрих, т.е. черный, но лишенный своей черноты, пустой внутри, штрих и не штрих сразу. Таким образом, эта правая часть представлена как бы не нарисованной, а выдавленной, выпуклой, данной не зрению, как таковому, а осязанию. Впечатление *оборотности* этой правой стороны усугубляется от начертанной зеркально и тоже белым штрихом, в нижнем правом углу, буквы *O*: это — не какая-либо новая буква, а то же самое черно-штриховое *O*, что видно в нижнем левом углу, но воспринятое *через* плоскость. Можно пояснить соотношение правого и левого *O* так: представим себе, что на бумаге карандашом было бы написано *O*, которое выдавилось бы выпукло на обороте листа. Эта буква была бы, следовательно, и зрительной, и осязательной. Пусть, далее, этот лист установлен неподвижно. Если бы затем кому-нибудь было предложено изобразить рисунком этот лист, смотря на него спереди и осязая его оборот рукою, то получился бы рисунок, подобный обложке Фаворского, и с таким же размещением. Ведь, проследив ширину листа от *O* к *X глазом*, рисовальщик продолжил бы свое наблюдение — *рукою*, и именно с той точки, где отказался бы служить глаз, т.е. повел бы руку *от* точки *X* к *O*. Следовательно, точки плоскости, постепенно удаляющиеся от вертикали, что через *X*, оказались бы на рисунке тоже удаляющимися от вертикали, но уже не влево, а вправо: движение руки по листу сознавалось бы продолжением движения глаза. Поэтому, точка O, как осязательная, оказалась бы на изображении самой далекой от точки O, как зрительной; соотношение их обеих было бы приблизительно зеркальным, — приблизительно, потому что мера пространства осязательного не тождественна таковой же — зрительного.

То же должно сказать и обо всем чертеже, справа дающем зеркально-зрительную транспозицию осязательного строения оборотной стороны плоскости. Иначе говоря, приходится мыслить пленочное пространство изображения как бы расщепленным на две стороны, с поворотом испода плоскости, как страницы книги, на 180° около вертикальной оси, проходящей через X.

Теперь-то и начинается решение главной трудности гравера — наглядно показать, что обе половины чертежа, правая и левая, не просто приложены друг к другу, хотя бы и разнокачественные, одна чисто-зрительная, другая зрительно-осязательная, но составляют именно две стороны *одной* плоскости. Граверу предстояло показать наглядно, что правая часть чертежа есть только познавательное, но *не* вещественное расщепление плоскости. Это достигнуто, во-первых, тем, что и разъединенные, эти стороны имеют каждая признак другой — в виде небольшого *прорыва* к другой стороне, и этими двумя прорывами взаимная связь сторон вновь восстанавливается. Прорыв сквозь лицевую сторону плоскости произведен в самом выступающем ее месте, там где она наиболее убедительно действительная. Это сделано наглядно, каким-то ясновидческим переносом воспринимающего центра сознания — по ту сторону плоскости. Тогда там воспринимается этот же негативно-белый цвет оборота, с изображенным по нему выпуклым и зеркально обращенным символом мнимости i, подобным зекальному O; оттуда это i было бы видимо начертанным прямо, но отсюда оно воспринимается зеркально: это — отсюда видимое изображение там начертанного i, или оттуда осязаемый выпуклый след здесь начертанного i. Изображенное белым штрихом, это i явно иного характера, нежели буквы X, O, $У$ передней стороны плоскости, и притом оно белее белого оборота плоскости, т.е. отвлеченнее. Этот прорыв лица есть вид, или зрительно-транспонированный рельеф, оборота, *того самого*, что представлен правой половиной чертежа. Но этот прорыв не координирован с лицом плоскости и сразу — ближе черного прямоугольника и дальше его: нельзя координировать однородное, но противоположное по положению в сознании.

Обе стороны плоскости связываются и в правой части чертежа, — обратным прорывом из мнимости в действительность. Но характер прорыва тут уж не наглядный, а отвлеченный, не четкое ясновидение, а расплывчатое воспоминание о покинутом зрительном пространстве, всплывающее на первых порах вступления в пространство осязательное. Таким именно воспоминанием представлена часть узкого черно-штрихового эллипса по диагонально-заштрихованному черным же штрихом полю. Таков лоскуток действительной стороны, хотя и на границе мнимости; находясь среди мнимого пространства, он не координирован с ним. Этот лоскуток, в соединении с бело-штриховым восполнением эллипса по бело-штриховому же полю, передает флюктуацию геометрической фигуры при ее провале сквозь плоскость, когда она не определилась еще, будучи и мнимой, и действительной сразу.

Возвращаемся к прорыву левой части чертежа. Резкий контраст полей, черного и белого, делает это *i* зрительным центром всей страницы, неудержимо сосредоточивающим на себе взгляд, вследствие чего вся левая часть чертежа созерцается *прямым* зрением и потому стоит на странице и в её плоскости крайне устойчиво. Но тогда правая часть изображения, особенно край её, неизбежно видится очень смутно, зрением боковым, которое оттянуто левым прорывом. Вся правая часть, и по характеру резьбы имеющая отвлеченный характер, окончательно теряет конкретность и устойчивость. Туманная плоскоть правой части изображения, отделившись от плоскости страницы, колышется, вращаясь около основной вертикали, находит на зрителя, как бы захлопываемая на лицо книга, при неподвижности левой её крышки. Это впечатление подвижности правой строны чрезвычайно поддержано, во-первых, трех-ступенчатостью её плоскости (решетка, выше её, т. е. ближе к зрителю, горизонтальная штриховка, а еще выше вторая решетка, в квадрате), во вторых как бы перспективным схождением параллелей обеих решеток и горизонтальной штриховки внизу, слева, что опять наводит на мысль о наклонности всей правой части, как если бы лист обложки отогнулся по вертикали и стал бы сам собою открываться; в третьих — тому же композиционному и, вместе, функциональному замыслу способствует некоторое расширение всей правой стороны гравюры, как бы в силу приближения правого её края к глазу.

Наконец, остается сказать еще несколько слов о надписях. Мы начали с того, что ими устанавливается самая плоскость изображения. Но плоскость не могла бы быть установленной ими, если бы они были только *на* её передней стороне: тогда пространство страницы, обрезанное с лица, т. е. ограниченное спереди, углублялось бы беспредельно внутрь страницы, и не могло бы быть речи об обороте плоскости. Следовательно, надписи должны установить не только переднюю границу плоскости, её лицо, но и нижнюю, её оборот, стянув собою все плоское пространство, как бы зажимая его между двумя стеклами. Надписям надлежит определить собою всю толщу плоскости. Фаворский достигает этого, приурочивая буквы или их элементы к *разным* сторонам плоскости, причем МН, например, помещено явно на передней стороне, что показано и горизонтальной штриховкой, присоединяющей пространства этих букв к левому прямоугольнику композиции; М, Т, И в слове "геометрии" отнесены к оборотной стороне, как начертанные белым штрихом, а И, Т, И в слове "мнимости" флюктуируют, частью оставаясь на лице, частью же проваливаясь на изнанку, как бы *прошивая*, простегивая собою толщу плоскости; последняя буква слова "мнимости" особенно выразительно несет ту же функцию.

Но обложка не вполне достигала бы своего назначения, если бы надписи служили только целям графики, а самая графика их была бы чужда их смыслу. Очевидно, графические особенности надписаний должны не только держать плоскость, но и передать звуковое пространство интонаций голоса и выразить звуковую координацию слов. Примером того, как Фаворский решает эту задачу, служит хотя бы помещение фамилии автора выше имени, чем передается соответственное интонационное подчеркивание; далее, в слове “*мнимости*” подчеркнутой оказывается первая его часть, ударяемая, имеющее же смысл пояснительный и произносимое вполголоса “*в геометрии*” — попадает на обложке в мнимую, т.е. полувидимую часть плоскости и т.д.

Таково в основных чертах толкование геометрической композиции Фаворского.

1922. VII. 29 (VIII. 11).

ПЕЧАТНЫЕ ТРУДЫ П.А.ФЛОРЕНСКОГО

«Столп и Утверждение Истины». М. «Путь». 1914.

Первые шаги философии. Сергиев Посад, 1917. Вып. 1.

Смысл идеализма. Сергиев Посад, 1914.

Приведение чисел. Сергиев Посад, 1916.

«Не восхищение непщева». (К суждению о мистике). Серг.Пос., 1915.

Около Хомякова. (Критические заметки). Серг.Пос., 1916.

Вступительное слово пред защитою диссертации. Сергиев Пос., 1914.

Пределы гносеологии. (Основная антиномия теории знания). Серг. Посад, 1913.

Космологические антиномии Канта. Серг. Пос., 1909.

О типах возрастания. Серг. Пос., 1906.

Антоний романа и Антоний предания. Серг. Пос., 1907.

Общечеловеческие корни идеализма. Серг. Пос., 1909.

Собрание частушек Костромской губ., Нерехтского уезда. Со вступительной статьей. Кострома, 1910.

Вопросы религиозного самопознания. Серг. Пос., 1907.

Письма архимандрита Феодора (А.М.Бухарева) к Казанским друзьям. Серг. Пос., 1917.

Соль земли, то есть Сказание о жизни старца Гефсиманского скита иеромонаха аввы Исидора. Серг. Пос., 1909.

Памяти Вл.Фр.Эрна («Христианская мысль», 1917, № 11-12).

Троице-Сргиева Лавра и Россия. (В сборнике «Троице-Сергиева Лавра"). Серг. Пос., 1919.

Данные к жизнеописанию арх. Серапиона (Машкина). Сергиев Посад, 1917.

«К почести вышнего звания». (Черты характера архим. Серапиона Машкина). («Вопросы религии». Вып. I, М. 1906).

К биографии Н.И.Надеждина. («Богословский Вестник», 1916, № 2).

Письма профф. Московской Духовной Академии к А.А.Лебедеву. Серг. Пос., 1916.

Письма прот. В.Н.Амфитеатрова к Машкиным. Серг. Пос., 1914.

Служба Софии Премудрости Божией. Серг. Пос., 1914.

О суеверии. («Новый Путь», 1903. , № 8).

Спиритизм, как антихристианство. («Новый Путь», 1904. № 3).

О символах Бесконечности. («Новый Путь», 1904. № 9).

Об одной предпосылке мировоззрения («Весы», 1904, № 9).

И.Кант. Физическая монадология. Перевод со вступительной статьею и примечаниями. Серг. Пос., 1905.

Догматизм и догматика. (В болгарском журнале «Християнска Мисль», 1907).

Фаллический памятник Котахевского монастыря. («Живая Старина», 1908, № 1).

Р.Зом. Церковный строй в первые века христианства. М., 1906. Перевод.

Храмовое действо, как синтез искусств. («Маковец», 1922, № 1).

Небесные знамения. («Маковец», 1922, № 2).

Земной путь Богоматери. («Возрождение», 1917, № 10).

Вопль крови. М., 1906,

Радость навеки. Серг. Пос., 1907.

Начальник жизни. Серг. Пос., 1907.

Архиепископ Никон — распространитель «ереси». (Материалы к спору № почитании Имени Божия». Изд. 2, М. 1913).

Предисловие «От Редакции» к книге И.Антония Булатовича «Апология веры во Имя Божие». М., 1913.

Ж.Таннери. Курс теоретической и практической арифметики. Рецензия в «Богословском Вестнике», 1913, № 2.

Новая книга по русской грамматике. Рецензия на «Начатки русской грамматики» А.В.Ветухова. («Богословский Вестник, 1909, № 5).

По поводу книги Н.М.Соловьева "Научный атеизм" ("Богословский вестник", 1915, № 6).

Опись панагий Троице-Сергиевой Лавры. (Со вступительной статьей). Сергиев Посад, 1922. (Выходит).

Опись утвари Троице-Сергиевой Лавры (Готовится к печати).

Символы горнего. Анализ икон Троице-Сергиевой Лавры, как опыт иконологии. (Подготовлен к печати).

Вычисление электрического градиента на витках обмотки трасформатора. (Применение интегральных уравнений к некоторым вопросам электростатики и прием решения некоторых интегральных уравнений). М., 1921. («Бюллетени Технического Отдела Главэлектро», Серия IV. Шапирографированное издание.

Ультра-микроскоп со сдвигом. (Новый прием ультра-микроскопического исследования). («Вестник Инженеров», 1922, № 4).

Мнимости в геометрии. Изд. «Поморье» М. 1922 г.

Кроме того, в «Протоколах заседаний Совета Московской Духовной Академии» напечатано, начиная с 1908 года несколько десятков разборов студенческих сочинений, а в 1911-1917 гг. редактировался «Богословский Вестник».

Названные здесь издания исчерпаны.

У АВТОРА СКЛАДА НЕ ИМЕЕТСЯ.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПОМОРЬЕ»

приступило к печатанию труда П.А.Флоренского

У ВОДОРАЗДЕЛОВ МЫСЛИ

(Черты конкретной метафизики)

Под таким заглавием предполагается издать ряд выпусков, объединенных общим замыслом, но так, что каждый выпуск имеет и самостоятельное значение.

Содержание выпусков ближайших таково:

I.

1. На Маковце. 2. Пути и средоточия. 3. Обратная перспектива. 4. Мысль и язык. (Наука, как символическое описание. Диалектика. Антиномии языка. Термин. Строение слова. Магичность слова. Имеславие, как философская предпосылка).

II.

5. Воплощение формы. (Действие и орудие). (Homo faber. Продолжение наших чувств. Органопроекция. Символика сновидений. Пространство тела и мистическая анатомия. Хозяйство. Макрокосм и микрокосм).

III.

6. Форма и организация. (Понятие формы. Целое. Divina sectio. Золотое сечение. Целое во времени. Организация времени. Циклы развития. Signatura rerum. Формула формы).

Дальнейшие выпуски будут примерно содержать:

7. Имя рода. (История, родословие и наследственность).

8. Смысл идеализма. (Метафизика рода и лика).

9. Общечеловеческие корни идеализма. (Философия народов).

10. Метафизика имени в историческом освещении.

11. Имя и личность.

12. Об ориентировке в философии. (Философия и жизнечувствие). (Механистическое миропонимание. Каббала. Оккультизм. Христианство).

13. Земля и Небо (Философия, астрология, естествознание).

14. Символотворчество и закон постоянства.

ПОСЛЕСЛОВИЕ

О воображаемой вселенной Павла Флоренского.

1. Вводные замечания о действительной и воображаемой реальности.

Было бы неблагодарным занятием комментировать результаты научных и философских исследований П.А.Флоренского, ограничиваясь только объемом тех идей, которые явно высказаны на страницах его отдельных, тематически обособленных работ. «Мнимости в геометрии» — это, хотя и очень важный, но все же лишь фрагмент обширного учения, обнимающего так или иначе все стороны человеческого бытия в его взаимоотношении с бытием Бога. В целом это можно было бы назвать, пользуясь историческими реминесценциями, учением о воображаемой вселенной, от которой зависит не только воображение человека, но вся его родовая сущность как человека разумного. В свое время два выдающихся русских мыслителя — Н.И.Лобачевский (1792—1856) и Н.А.Васильев (1880—1940) — создали соответственно воображаемую (неевклидову) геометрию и воображаемую (неаристотелеву) логику.

Флоренский пошел в этом направлении дальше: он не просто заложил основы «мнимой геометрии», но и показал, как язык последней может быть использован для выражения связи между вселенной, которая дается нам извне — на основе чувственных впечатлений, и вселенной, о которой мы судим изнутри — на основании сверхчувственной интуиции.

Речь идет о связи между двумя видами реальности — реальностью чувственной, или эмпирической, и реальностью сверхчувственой, или внеэмпирической. На конфессиональном языке их принято соотносить с дольним и горним мирами, составляющими единый Божественный универсум.

В данном комментарии к книге Флоренского мы постараемся показать, что «Мнимости в геометрии» далеки от того, чтобы их можно было рассматривать как некое математическое упражнение, имеющее тривиальные, с точки зрения современной математики, следствия. Специалисты, выражающие такой взгляд, видимо, плохо знают другие работы ученого или, если и знакомы с ними, то понимают их очень поверхностно. А у автора «Мнимостей в геометрии» логическая необходимость, ведущая мысль к построению новой (топологической) модели пространственно-временного многообразия, прослеживается более-менее четко на всех уровнях логико-математических рассуждений — на чисто логическом, арифметическом, на уровне математического анализа и, наконец, на уровне топологии. Мы попытаемся дать краткий отчет о всех этих уровнях рассуждений, заполняя в них недостающие звенья.

Обратим внимание, прежде всего, на то обстоятельство, что обрисованная в «Мнимостях» топологическая модель пространственно-временного многообразия является, конечно же, незавершенной. Но при всей своей незавершенности она явно демонстрирует двойственный характер пространства-времени. «Все пространство, — пишется на стр. 51, — мы можем представить себе двойным, составленным из действительных и из совпадающих с ними мнимых гауссовых координатных поверхностей, но переход от поверхности действительной к поверхности мнимой возможен только через разлом пространства и выворачивание тела через самого себя». Понятие гауссовой поверхности означает здесь криволинейную поверхность, кривизна которой отлична, вообще говоря, от нуля. Изогнутая поверхность берется для того, чтобы сделать абсолютным различие между ее лицевой (действительной) и обратной (мнимой) сторонами, заполненными соответственно вещественными и мнимыми точками. Ясно, что без нарушения логического закона тождества нельзя представить себе, чтобы две разные точки — действительная и мнимая — совпадали между собой. Но тогда возникает вопрос: как же могут совпадать между собой две разные поверхности — та, что составлена из действительных точек, и та, что составлена из точек мнимых? Из высказывания, помещенного на стр. 33, можно понять, что между каждыми двумя спаренными точками — действительной и мнимой — должно быть некоторое расстояние, которое Флоренский отождествлял с дифференциалом Лейбница. Но в то время он еще не мог оперировать в полной мере понятием бесконечно малой величины в актуальном смысле, разработанным несколькими десятилетиями позже в новой отрасли математики — нестандартном, или не-архимедовом анализе.

Следовательно, при доработке топологической модели требуется восстановить, по крайней мере, одно недостающее в ней звено. При этом полную ясность обретет центральная идея всего построения — идея двойственности пространственно-временного многообразия, утверждающая существование в нем внутренней стороны, изнанки наряду с внешними атрибутами — протяженностью и длительностью.

Для Флоренского математический вывод о существовании «изнанки» пространства-времени был, однако, не самоцелью, а средством представления в терминах пространства и времени человеческой мысли, которая со времени Декарта считалась непротяженной, а потому и внепространственной. На самом деле можно представить себе и внепротяженную мысль, разлитую в мировом пространстве, если она обладает свойством мгновенно связывать любые пространственно удаленные объекты, способные реагировать на ее влияние. Поиск ответа на вопрос, какой должна быть структура пространства и времени, чтобы она согласовалась со столь необычными, с точки зрения здравого смысла, явлениями — вот то, по-видимому, главное, что стимулировало работу над «Мнимостями в геометрии». Поскольку исследование данной проблемы не ограничивалось геометрическими представлениями, а выверялось, как мы уже сказали, на разных уровнях рассуждений, нельзя без хотя бы краткого ознакомления с ними оценить масштабы всего замысла.

2. Логико-арифметический способ выражения связи между двумя видами реальности.

В 1917 г. Флоренский опубликовал книгу «Данные к жизнеописанию архимандрита Серапиона (Машкина)»[1]. Удивительную, полную непрерывных исканий жизнь, как видно по данной книге, прожил Серапион Машкин (1854—1905). Образование начал в частном классическом пансионе, затем прошел пансион школы Правоведения. Поступление экстерном в Морское училище, окончание его в звании гардемарина. За 1,5 года дослужился до мичмана. Затем отставка. Через год — это было в 1877 г. — поступление на естественное отделение физико-математического факультета Санкт-Петербургского университета. Неполный университетский курс, затем поездка на Афон и проживание там в течение 5 лет. И сороколетние поиски решения проблемы, которая постоянно стояла в центре внимания Серапиона. Это была проблема обоснования сознания и самосознания человека.

Церковь традиционно утверждала, что в основе человеческого сознания и самосознания лежит присущий человеку дух, приобщаемый к мировому духу на путях молитвы и аскезы. Но не каждый был способен проникнуться таким мироощущением. В науке велись параллельные поиски связи между духом и телом человека в частности и между внеэмпирической и эмпирической реальностями вообще. Свыше сорока лет усилий — и Серапион самостоятельно пришел к тому выводу, к которому в свою очередь в какой-то мере подвело развитие математики в целом. А именно, что связь между двумя видами реальности выражается в математических понятиях с помощью понятия актуальной бесконечности.

Вот как описывает это открытие сам архимандрит Серапион. Раскрыть сущность сознания и самосознания можно только — к такому выводу он пришел — исходя из требований самообоснованности и самодоказательности. Но за этими терминами вовсе не скрывается какая-либо тавтология. Самообоснованность выражается идеей актуально заданного целого, полагание которого требует бесконечного ряда актов отнесения одного к другому. «Эта Бесконечность, — указывал Серапион, — действительно самообосновывается, так как в ней *дан* бесконечный ряд, она не обрывается на первом, не выводимом из другого, просто данном, а восходит в бесконечность, причем этим не отодвигается только решение, — первое, чтоб никогда не быть данным (в этом отодвигании в неопределенность опять нет решения), а, напротив, дается бесконечность как сво-

---

1 Священник Павел Флоренский. Данные к жизнеописанию архимандрита Серапиона (Машкина). Сергиев Посад, 1917.

его рода конечность, или, лучше сказать, определенность как бесконечная Единица»[2].

После многолетних исканий, комментирует данное открытие Флоренский, упорным трудом самостоятельной мысли о. Серапион вышел, наконец, хотя и с другой стороны, к тем результатам, к которым пришла математика в лице Г.Кантора. То же можно сказать, судя по данной книге, и о самом Флоренском[3].

Почему же столь важна здесь идея актуальной бесконечности? Важность ее становится очевидной, если хорошенько присмотреться к такому, с виду простому, объекту математики, как натуральный ряд чисел 1,2,3,...,n,... . Идея потенциальной осуществимости в нем вполне понятна. Мы можем опираться на нашу историческую память — память о наших прошлых действиях — чтобы каждый раз, сделав n-ый шаг, т, е. дойдя до числа n, вспомнить о том, что мы неизменно пользовались знаками «+» и «1» в предыдущих шагах, а потому допустим и следующий шаг в виде (n+1). Идея актуальной бесконечности превращает потенциально осуществимую последовательность натуральных чисел в последовательность законченную, данную одновременно всеми своими членами.

Эмпирики, кои в математике представлены когортой интуиционистов и конструктивистов, утверждают, что идея актуальной бесконечности ведет к логическому абсурду, так как нельзя логически непротиворечивым образом представить себе неограниченную последовательность объектов, имеющую начало, но не имеющую конца, несмотря на то, что все объекты, начиная с первого, расположены в строго определенном (индуктивном) порядке. И они в своем эмпирическом созерцании правы. Но эмпирики не понимают того, что актуальной бесконечностью перекидывается мост от одного вида реальности к другому, и поэтому хотя идея актуальной бесконечности и приводит к ряду логических противоречий, но последние не являются логическим абсурдом: они выявляются в математических рассуждениях при самом строгом соблюдении всех законов элементарной логики и именуются антиномиями.

В книге «Столп и утверждение истины» Флоренский показал, как структурируется на языке исчисления высказываний всякая антиномия. „Наши рассуждения об антиномии, — писал он, — естественно возникают из того приема доказательства чрез приведение к нелепости, который в математике применен Евклидом для доказательства 12-го предложения IX-ой книги «Начал», а в философии использован догматиками для коренного ниспровержения скептических доводов против доказуемости истины. Этот прием нередко употреблялся и впоследствии как математиками, так и философами, и даже распространился в широких кругах общества, служа целям салонной и домашней диалектики, как это изображено, например, Тургеневым в «Рудине»"[4].

---

2 Там же, с. 5.
3 Там же, с. 5—6.
4 Флоренский П.А. Столп и утверждение истины, ч.1, М., 1990, с. 150.

Суть приема состоит в следующем. Допустим, что утверждается некоторый тезис p. Затем доказывается, что из него вытекает не-p, т. е. отрицание данного тезиса. Тогда из всего из этого следует не-p, что в исчислении высказываний резюмируется логическим законом

$$(p \supset \neg p) \supset \neg p. \quad (1)$$

Схема логического вывода — правила отделения — выглядит так:

$$\frac{(p \supset \neg p) \supset \neg p,\ (p \supset \neg p)}{\neg p}. \quad (2)$$

Флоренский ставит вопрос относительно того, является ли безусловным, как это обычно полагают, логический закон (1), и отвечает отрицательно. Закон имеет силу лишь при условии, что из не-p не следует p. Если же наряду с формулой $(p \supset \neg p)$ имеет место и формула $(\neg p \supset p)$, тогда получаем антиномию $(p \,\&\, \neg p)$.

Примером антиномии, выраженной на языке исчисления высказываний, является известный с античных времен парадокс Эвбулида «Лжец». Простейший формой его выражения служит высказывание — обозначим его через a — «Это высказывание ложно». Нетрудно убедиться, что из утверждения a в качестве истины следует не-a, а из не-a следует a, т. е. имеем антиномию $a \,\&\, \neg a$ или $a \sim \neg a$, где $\sim$ есть знак логической эквивалентности. Посмотрим теперь, в каких конкретно антиномиях отражается идея актуальной бесконечности. Прежде всего здесь стоит упомянуть об антиномии, выявленной Г.Кантором, когда он актуально бесконечное перенес из области арифметических рассуждений в область разработанной им теории множеств. Легче будет усмотреть, как происходило обобщение понятия (натурального) числа на понятие множества, если учесть, что допустимо отождествление каждого натурального числа n с множеством всех предшествующих ему в натуральном ряду чисел, включая 0. В таком случае, пользуясь индуктивным выводом, можно убедиться в том, что количество (мощность, или кардинальное число) всех подмножеств любого конечного множества M, состоящего из n элементов, равно 2^n. (В число подмножеств от данного множества M входит пустое множество и само множество M (в качестве несобственного подмножества)).

Теория Кантора, ведущая к формулировке соответствующей антиномии, сводится к утверждению, что любое произвольное множество нельзя однозначно отобразить на множество его подмножеств (множество-степень): множество-степень имеет большую мощность, чем исходное множество. Если теперь взять множество *всех* множеств, мы придем к противоречию при оценке его мощности. В самом деле, пусть M будет множеством всех множеств. Его множество-степень U, в соответствии со сформулированной выше теоремой, должно иметь мощность большую, чем мощность множества M, что парадоксально по той причине, что M, по определению, есть множество, содержащее все множества и поэтому имеет наибольшую мощность.

Уже в 900-х годах текущего столетия, очень скоро после того, как были открыты подобные парадоксы, крупнейшие математики и логики пришли к пониманию, что антиномии типа канторовской, вовсе не являются следствием логических ошибок в рассуждениях, а представляют собой новые мыслительные проблемы. Но найти для них логическое оправдание смог только один человек — русский мыслитель Н.А.Васильев. Для этого ему пришлось создать воображаемую (неаристотелеву) логику. Если к воображаемой геометрии пришли почти одновременно три математика — Лобачевский, Больяи и Гаусс, — то судьба воображаемой логики сложилась иначе. Она оставалась в забвении почти 80 лет, если оставить в стороне содержательное обоснование фундаментальных антиномий в работах П.А.Флоренского, Е.Н.Трубецкого и А.Ветухова[5].

Подобно тому, как Лобачевский, открывая свою воображаемую геометрию, выделил в евклидовой геометрии некоторую абсолютную часть, общую для всех — евклидовых и неевклидовых — геометрий, Васильев пошел по тому же пути, изучая возможность создания неклассической логики. Ему удалось показать, что в абсолютную часть логики, которую он назвал *металогикой*, не должны включаться закон противоречия и закон исключенного третьего. Он исходил при этом из очень смелого допущения, что наша обычная логика — логика в целом — содержит, в отличие от металогики, эмпирические элементы. Это касается, прежде всего, факта существования несовместимых предикатов, или несоединяемых признаков, относящихся к одному объекту, и основанному на этом факте закону противоречия. А раз эмпирия вторгается в законы логики, то можно представить себе такой воображаемый мир, где закон противоречия не будет иметь места.

Только металогика, писал Васильев, есть формальная наука логики, ибо только она отвлекается от всего фактического, эмпирического. Она есть логика, пригодная для каждого мира, независимо от того, как устроены объекты любого из этих миров, ибо в ней заключены законы чистой мысли как таковой, законы суждения и вывода вообще. Напротив, законы нашей обычной, аристотелевской логики «суть отчасти законы металогики, отчасти законы природы». Таковым будет, например, закон противоречия с операцией отрицания, которые опираются на эмпирический факт несовместимости[6].

Каким же образом все это обосновывается? Прежде всего отмечается, что наша обычная (полуэмпирическая) логика характеризуется делением всех (утвердительных) суждений на положительные и отрицательные. Всегда считалось, что такое деление для логики неизбежно, и отказаться от него нельзя, поскольку понятия позитивного утверждения и отрицания соотносительны: каждое утверждение предполагает отрицание, и наоборот. Все вроде должно было бы быть в согласии с тем,

---

5 Ветухов А. Основы веры и знания (религии и науки) по данным языка (Заметки по поводу «Теодицеи Свящ. о. Флоренского). Харьков, 1915.

6 Васильев Н.А. Воображаемая логика. Избранные труды. М., 1989, с. 115—116.

что высказано Спинозой: determinatio est negatio (всякое определение есть отрицание).

Васильев, однако, нарушил негласный консенсус большинства логиков относительно того, что указанные выше положения должны рассматриваться в качестве единственно возможных. «Чудовищной, наверное, покажется таким логикам, — писал он в 1912 г., — сама мысль о логике, в которой нет отрицательных суждений. Между тем мы будем защищать эту мысль»[7]. Логика без отрицательных суждений, по Васильеву, — это логика мыслительных операций такого субъекта, который действует без ошибок. Можно представить себе дух, который, будучи способным не образовывать ложных суждений, не образовывал бы и отрицательных суждений, т. е. суждений о ложности. «Такому духу нечего было бы опровергать, а в опровержении ложного весь смысл отрицательных суждений. Отрицательные суждения появляются только в логике несовершенной, в логике, в которой не исключена возможность ошибок»[8].

Если спуститься из дедуктивных высот эмпирея в эмпирическую область действительности, то тут дело обстоит несколько иначе: отрицательные суждения имеют свой чувственно постигаемый коррелят. А именно, *все отрицательные суждения о предметах и восприятиях нашего мира получаются как выводы из положений о несовместимости двух признаков*[9]. Рассуждения в оправдание данного заключения выглядит примерно так. Я не могу видеть непосредственно, что данный предмет не белого цвета. У нас нет отрицательных ощущений, ощущений «не белого». Когда я утверждаю, что предмет не белого цвета, то я несомненно сделал определенный вывод. Я *видел*, что предмет красного цвета, и вывел, что предмет не белого цвета, *зная*, что красное не может быть белым. Таким образом, большие посылки отрицания, т. е. положения о несовместимости типа того, что красное не может быть белым, являясь несомненными до трюизма, выпадают как ненужные звенья в психологическом течении мыслей, и мы сразу от восприятия красного цвета предмета переходим к суждению: «он не белого цвета». Но эта сокращенность психологического процесса не может быть аргументом против его силлогической природы в логическом отношении[10]. Поэтому надо считаться с тем, что отрицательные суждения в нашей обычной логике бывают двух типов: во-первых, — большие посылки отрицания (красное не есть белое, признак N исключает признак P); во-вторых, — выводные суждения, которые получаются из первых путем силлогизма[11].

В этих условиях и раскрывается истинный статус логического закона противоречия. В нем выражается несовместимость утверждения и отрицания, но ведь отрицание есть то, что несовместимо с утверждением. Поэтому «закон противоречия уже заключается в определении отрица-

7 Там же, с. 117.
8 Там же, с. 118.
9 Там же, с. 105.
10 Там же, с. 61.
11 Там же, с. 61.

ния»[12]. И строить логику, свободную от закона противоречия, — это значит, по Васильеву, строить логику, где как раз не было бы отрицания, сводящегося на несовместимость.

Назовем отрицательные суждения, обусловленные фактором несовместимости, отрицаниями второго рода, и заметим, что новая логика не выводит за свои пределы отрицательные суждения первого рода, т. е. те суждения, которые, как указано выше, проистекают из-за ошибок рассуждений и образуют класс ложных суждений. Под эгидой этого непременного условия Васильев освободил традиционную логику от эмпирического содержания и выделил тем самым в ней ту абсолютную часть, которая могла бы послужить уже общей основой для всех возможных логик — как логики традиционной, классической, так и неклассической. В результате выявилось различие между тремя такими понятиями логики:

1) как собственно металогики с одной единственной — утвердительной — формой суждения и с законом исключительного второго (утверждение — истина, отрицание — ложь);

2) как обычной (полуэмпирической) логики с двумя формами суждения — утвердительной и отрицательной — и с законом исключенного третьего;

3) как воображаемой логики с тремя формами суждения — утвердительной, отрицательной и индифферентной — и с законом исключенного четвертого.

Поскольку воображаемая логика подчиняется принципам металогики, то в ней наряду с законом исключенного четвертого неукоснительно соблюдается принцип (закон) абсолютного различия между истиной и ложью. Поэтому в воображаемой логике Васильева индифферентные суждения, антиномически сочетающие в себе утверждение и отрицание, не могут быть источником исходящего от субъекта противоречия. Если я буду утверждать, поясняет эту мысль автор, что этот NN есть зараз человек и не человек, то я, конечно, нарушу закон противоречия, но если я всегда буду утверждать данное суждение, если я буду твердо стоять на своем, то я отнюдь не нарушу закона абсолютного различия истины и лжи[13]. Закон абсолютного различия между истиной и ложью вместе с законом исключенного четвертого позволяют в неаристотелевой логике признать истинность только за одним из трех высказываний: *p*, не-*p*, (*p* и не-*p*), т. е. или *p*, или не-*p*, или (*p* и не-*p*), четвертого не дано.

Для своей нетривиально противоречивой логики, логически оправдывающей антиномии, Васильев предложил два типа естественной интерпретации — чисто эмпирическую и метафизическую. Последняя — наиболее существенная — до сих пор оставалась незамеченной. А ведь он недвусмысленно указывал, что подобно тому, как метафизика открывает нам внеопытное (внеэмпирическое) бытие, металогика — внеопытное

12 Там же, с. 61.
13 Там же, с. 107.

познание[14]. И если приходится по неизбежности объединять опытные и сверхопытные положения, то новая логика вынуждает использовать для этого антиномически-противоречивую форму. Но это уже не обычная логика — необычная в том смысле, что она выражает на своем языке идею бесконечности[15], в ней учитывается связь конечного и бесконечного.

Мы несколько уклонились в сторону от текстов самого Флоренского. Но без тщательной выверки логических оснований антиномий трудно было бы последовательно подойти к идее двойственности пространственно-временного многообразия. Поэтому в заключение данного параграфа продемонстрируем на одном конкретном примере эффективность законов не-аристотелевой логики.

Долгие и не очень результативные поиски способов решения логических антиномий привели многих современных логиков и методологов к пессимистическому выводу о самой возможности положительного результата. Так, например, на XIV Международном философском конгрессе (Вена, 1968) Бенсон Мэйтс высказал мысль, что «никакие интуитивные решения таких антиномий, как антиномия Рассела и парадокс «Лжец», никогда не будут найдены. Это особенно относится к парадоксу «Лжец», который тщательно изучается в течении по меньшей мере 2400 лет, и хотя многие подходы к нему привели к ряду интересных и разнообразных результатов, мы едва ли бы преувеличили, если бы сказали, что прогресса в этом вопросе не достигнуто ни на одну йоту»[16].

Воображаемая логика Васильева позволяет разрешить парадокс Лжеца бесповоротно и окончательно. Убедимся в этом. Исходное условие парадокса состоит в том, что некто, кого называют Лжецом, делает одно единственное высказывание: «Это высказывание ложно». Не меняя в нем ничего по существу, его можно выразить в следующей эквивалентной форме:

«Это предложение не принадлежит классу (всех) истинных предложений». (*)

Обозначим выражение (*) через a и запишем вытекающее из него противоречие в символической форме. Получим:

$$T(a) \sim F(a)\text{ , или } T(a)\ \&\ F(a)\text{ ,} \qquad (3)$$

где $T(a)$ обозначает, что a относится к классу истинных предложений, $F(a)$ — что a принадлежит к классу ложных предложений, $\sim$ — знак эквивалентности (означающий, как и обычно, что в данном случае из $T(a)$ следует $F(a)$ и из $F(a)$ следует $T(a)$), $\&$ — знак конъюнкции. Согласно закону исключенного четвертого истинным может быть только одно из трех суждений: либо a, либо не-a, либо (a и не-a). Выбор в качестве истинного суждения не-a противоречит исходному утверждению (*). Он был бы правомерен, если бы $a \supset \neg a$, но не было обратной импликации:

14 Там же, с. 177.
15 Там же, с. 123.
16 Mates B. Philosophical scepticism and the logical antinomies // Akten des XIV Intern. Kongr. für Philosophie. Wien, 1968, Bd. 3, 169.

$\neg a \supset a$. Выбор конъюнкции (a и не-a) противоречит металогическому принципу абсолютного различия между истиной и ложью, так как конъюнкция (a и не-a) эквивалентна сочетанию $T(a)$ & $F(a)$, т. е. сочетанию истины и лжи. Остается принять, в качестве истинного, высказывание a о том, что оно ложно.

Антиномия Лжеца как процесс (противоречие) и его результат (разрешение) служит самым ярким выражением связи между мыслью (логосом) и ее предметным выражением. Истина есть соответствие одного другому, но истине положены конечные пределы, выход за которые превращает ее в ложь. Осознание таких пределов — предпосылка возникновения родового сознания человечества и сознания отдельного человека. Флоренский о границах истинной мысли пишет следующее: «В неопределенной возможности, мысли пред-лежащей, — двигаться всячески, в безбрежности моря мысли, в текучести потока ее, ею же ставятся себе твердые грани, неподвижные межевые камни, и притом ставятся как нечто клятвенно признанное нерушимым, как ею же установленное, т. е. символически, посредством некоторого сверх-логического акта, волею сверхличною, хотя и проявляющеюся через личность, воздвигнутые в духе конкретные безусловности: и тогда возникает сознание»[17]. Условие его возникновения — включение мыслительной способности человека во вселенский Λογοσ[18].

3. Конечное и бесконечное: расширение языкового контекста исследования.

Флоренский предупреждал, что работа с логико-математической и прочей научной символикой превращается в бесплодную игру, если за математическими символами не видят «реальности самого явления»[19]. То же касается и символов конечного и бесконечного: они становятся ненужными или даже излишними в научной эвристике, если за ними не угадывается связь между эмпирической и сверхэмпирической реальностью. Одним из ярчайших примеров выражения этой связи в математической символике служит соотношение между рациональными и иррациональными числами. Последнее детально анализируется автором в «Столпе и утверждении истины».

Если мы обратимся к рассмотрению класса рациональных чисел, у нас не будет особых затруднений с обоснованием их существования. Ведь для каждого из таких чисел найдется эмпирический эквивалент, т. е. некоторая величина, которая получается либо при реальном, либо при мысленном измерении каких-либо физических параметров внешнего мира. И совсем другое дело — числа иррациональные. Ведь их существование противоречит всему тому, что можно характеризовать понятием *меры*, и

17 Флоренский П.А. У водоразделов мысли. М., 1990, с. 225.
18 Там же, с. 163.
19 Там же, с. 119.

обусловлено концепцией несоизмеримости. Речь идет ближайшим образом о несоизмеримости геометрических отрезков. Тот геометрический факт, что, скажем, диагональ квадрата несоизмерима с его стороной, не имеет под собой ни чувственно-созерцательной, ни чувственно-деятельной — эмпирической — основы. «Это свойство сказанных линий, — писал Флоренский, — было известно уже пифагорейцам, и открытие его относится к основателю союза. Нетрудно догадаться, какое ошеломляющее впечатление должно было произвести открытие этой теоремы на изобретателей. Одним из основных убеждений школы было признание универсальной роли числа; а под *числом* тогда разумелось именно целое число. И вот оказывается, что имеются объекты в области созерцания, которые никаким числом не выражаются, никаким числом не управляются, как бы лишены сущности, ибо сущность объекта, для пифагорейцев, есть выражающее ее число. Получилось, будто люди заглянули незаконно в какую-то мистическую бездонность...»[20].

Рассматривая вслед за Кантором бесконечные последовательности рациональных чисел, сходящихся к числам иррациональным, Флоренский делает ряд глубоких комментариев относительно того, что же представляет собой переход к иррациональному числу. Рассматривается конкретно бесконечное множество рациональных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots, a_{n+m}, \ldots$, расположенных в порядке написания так, что после каждого числа следует число, ближайшее к нему, а перед каждым, кроме первого, есть ближайшее число, ему предшествующее. Взгляд на подобный ряд как на некоторый единый объект α позволяет символически выразить α в виде равенства по определению:

$$\alpha =_{def} (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots, a_{n+m}, \ldots)\,. \qquad (4)$$

Полагание α чем-то единым, или целостным, оправдывается действительно только тогда, когда эта последовательность сходится. А критерий ее сходимости, по Кантору, состоит в следующем. Последовательность (4) сходится в том случае, если каково бы ни было число $\sigma > 0$ (т. е. сколь бы малым мы его ни взяли), всегда найдется n настолько большое, что разница между членом a_n и любым последующим членом a_{n+m} окажется меньше (по абсолютной величине) числа σ, сколь бы ни было велико число m. В символической записи неравенство, лежащее в основе критерия сходимости, имеет вид:

$$\left| a_n - a_{n+m} \right| < \sigma\,. \qquad (5)$$

Данный критерий сходимости освобождает нас от того, чтобы проводить различия между последовательностями, которые сходятся к числам рациональным, и теми, которые сходятся, но не имеют рациональных пределов. Те и другие объединяются понятием *фундаментальной* последовательности. Фундаментальные последовательности, не имеющие рациональных пределов, отождествляются с иррациональными числами. Их Флоренский характеризует в категориях имманентного и трансцендент-

---

20 Флоренский П. Эмпирея и эмпирия // Богословские труды, сб. 27, М., 1986, с. 309—310.

ного (запредельного), говоря о членах фундаментальной последовательности α и о трансцендентности самого α. Ведь, переходя к α, мы, по словам автора, совершаем скачок, не довольствуясь позитивистским (эмпирическим) обеспложиванием своего разума. Тут своего рода свободный подвиг, состоящий в том, что преодолевается самодовольство рассудка, разрывается логический круг его конечных понятий, и исследователь вступает в новую среду — в среду сверхконечного, рассудку недоступного и для него даже нелепого[21].

«Это значит, — читаем мы в другом месте, — что хотя α трансцендентно для всех a_i, «непостижимо» с точки зрения a_i, но все a_i имманентны для α, насквозь для него прозрачны. Можно сказать, что с точки зрения a_i нельзя видеть всех трансцендентных корней a_i, того трансцендентного освещения a_i, которое, однако, явно и очевидно с точки зрения α. Имманентность и трансцендентность в области сущностей разума подобна таковым же в области сущностей онтологии: Бог трансцендентен для мира с точки зрения мира, но мир не трансцендентен Богу, а всецело пронизывается Божественными энергиями»[22].

Мы расширили здесь языковой контекст исследования, воспользовавшись некоторыми элементами языка школьной геометрии и языка математического анализа. Но для целей дальнейшего освещения проблемы нам придется проделать то же самое — выразить соотношение между конечным и бесконечным — на языке элементарной арифметики, который сочетается необходимым образом с языком логики (первопорядкового исчисления предикатов). Разумеется, здесь может быть дан только эскиз того, что при детальном изложении потребовало бы гораздо большего текстуального объема.

В основе элементарной арифметики — ее содержательного или формализованного варианта — лежит, как известно, аксиоматика Пеано. Аксиомы, или постулаты Пеано, представляют собой следующие высказывания о числах при условии, что N — множество натуральных чисел:

P1. — нуль есть натуральное число, т. е. принадлежит множеству натуральных чисел;

P2. — если n — натуральное число, то и следующее за ним число n' тоже принадлежит множеству натуральных чисел;

P3. — если m и n — натуральные числа, то из $m' = n'$ следует, что $m = n$;

P4. — если n — натуральное число, то $n' \neq 0$;

P5. — пусть $K \subseteq N$ (т. е. пусть K является подмножеством N), причем K обладает следующими свойствами: (1) 0 принадлежит K и (2) если n принадлежит K, то n' принадлежит K; тогда K = N.

Постулаты приобретают наиболее прозрачный смысл, если выписать отдельно индуктивное определение числа, состоящее из трех пунктов:

---

21 Флоренский Павел. Столп и утверждение истины. М., 1914, с. 513.
22 Там же, с. 511—512.

(1) 0 является натуральным числом; (2) если n — натуральное число, то следующее за n, т. е. n' — натуральное число; (3) никаких других натуральных чисел, кроме тех, которые получаются согласно (1) и (2), нет. Как видно, (1) и (2) в данном определении совпадают с P1 и P2. Содержание (3) отражается в формулировке постулата P5. Далее в аксиоматику Пеано (P3 и P4) входит условие тождества и различия, состоящее в том, что числа, порожденные различным образом в результате применения (1) и (2) (соответственно P1 и P2), должны быть различными объектами; и, напротив, два числа совпадают друг с другом, если совпадают числа, (непосредственно) следующие за ними.

Обращаем внимание на постулат P5, который представляет собой формулировку принципа индукции на языке теории множеств. Он служит гарантией того, что в натуральный ряд чисел не могут быть включены чужеродные элементы наряду с объектами, подпадающими под понятие натурального числа, фиксируемое дефиницией из трех пунктов. Действительно, принципом индукции выделяется минимальная часть из всевозможных множеств, в которое входят в качестве элементов натуральные числа. Поэтому полуформальная аксиоматика Пеано, представляемая в том виде, как она выписана выше, считается полной в смысле категоричности. Категоричной называется аксиоматика, имеющая с точностью до изоморфизма одну модель (на которой она интерпретируется). Формализованная аксиоматика Пеано утрачивает свойство категоричности. Поэтому ей, наряду с обычной, стандартной моделью, удовлетворяют и нестандартные модели, содержащие неизвестные объекты, близкие, однако, по своим свойствам к объектам обычной арифметики.

Итак система Пеано строится на основании представления, что мы можем необходимые множества объектов (см. P5) брать в готовом виде, сравнивать их между собой, так что множество N натуральных чисел определяется как бы «снизу», т. е. путем построения его элементов индуктивным способом, и «сверху», путем выявления того общего (общих свойств), которое имеется у сходных множеств вне зависимости от способа упорядочения их элементов. Неопределенный термин «*сходство*» приобретает вполне точное значение в идее (однозначного) соответствия, используемой при логическом определении числа (Фреге, Рассел) и в канторовском понятии равномощных множеств. Идея соответствия не сводится к идее порядка. «Тип порядка и мощность множества, — писал по этому поводу Флоренский, — логически различны; но не следует думать, будто этим логическим различием можно пренебречь хотя бы в практическом пользовании...»[23]. Свойства натуральных чисел, по Флоренскому, раскрываются во всей полноте тогда, когда идея индуктивного, т. е. внешнего, накопления (число как сумма, совокупность и т. п.) дополняется идеей качественного единства, что означало бы конец колебаниям между пониманием числа как агрегата и числа как формы[24]. Если

---

23 Флоренский П.А. Пифагоровы числа. // Труды по знаковым системам: ученые записки Тартуского государственного университета. Тарту, 1971, вып. 284, с. 508.

24 Там же, с. 506—507.

судить по пятому постулату Пеано, то целостный характер множества натуральных чисел обеспечивается его сопоставлением, *соотношением* с другими множествами, из которых и делается единственный (стандартный) выбор. Но это означает, что множество натуральных чисел как целостное образование — форма, род, или эйдос, существует в определенной сверхэмпирической «среде», представляющей собой совокупность других родов, или эйдосов. (То, что данная «среда» дифференцирована эйдетически, отличает ее от привычного нам понятия среды, в которой существуют индивиды).

Математика не может обходиться без постулата о существовании такой сверхэмпирической среды, как и без постулата о существовании актуальной бесконечности, поскольку из этих постулатов выводятся те эмпирические (рекурсивно) проверяемые свойства чисел, которые принципиально не могут быть выведены каким-л. другим способом. Так что можно с полным основанием говорить о конструктивном, в некотором смысле, созидательном характере связи бесконечного и конечного. Впервые это обстоятельство было вскрыто австрийским математиком К.Гёделем (1931 г.) в его известных теоремах о неполноте формализованной арифметики.

Если говорить очень кратко, суть открытия Гёделя сводится к следующему. Пятый постулат Пеано, в том виде, как он сформулирован выше, не может быть непосредственно переведен на алгоритмизированный язык, представлен в формализованном виде. Алгоритмизированный характер имеет следующая формулировка принципа математической индукции:

Утверждение справедливо для всякого натурального n, если:

1) оно справедливо для n=1 и 2) из справедливости утверждения для какого-либо произвольного натурального n=k следует его справедливость для n=k+1.

Так, например, на основе этого принципа легко убедиться, что сумма (S_n) n первых чисел натурального ряда равна:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (6)$$

То, что сделал Гёдель, состоит в учете различия между двумя разными смыслами используемого в логике квантора общности, которые можно передать словами «для всякого» и «для всех». В принципе индукции квантор общности используется в смысле «для всякого», т. е. всякая арифметическая формула, выведенная с помощью данного принципа, является результатом «пошагового», индуктивного построения последовательности натуральных чисел. Гёдель же построил такое арифметическое утверждение, в которое органически входит квантор общности в смысле «для всех». «Для всех» означает, что ряд натуральных чисел принимается как множество, одновременно заданное всеми своими членами, но в него не допускаются никакие чужеродные элементы, т. е. объекты не удовлетворяющие пятому постулату Пеано. Полученная таким способом формула Гёделя проверяется эмпирически, т. е. индуктивным, или точнее, рекурсивным методом при подстановке в нее любого (произвольного) натурального числа. Квантор для «всех» реализует выполнимость квантора «для всякого», (т. е. выполнимость арифметической формулы для всякого n).

При нестандартной интерпретации формализованной аксиоматики Пеано (т. е. при интерпретации формальной системы арифметики нанестандартных моделях), множество натуральных чисел расширяется за счет включения в него незнакомых объектов со свойствами, в некотором смысле близкими, как уже было сказано выше, к свойствам натуральных чисел. Конкретнее, множество натуральных дополняется некоторым числом c, таким, что от него может быть образован ряд чисел

$$c+1,\ c+2,\ c+3,\dots,c+n,\dots, \tag{7}$$

а само оно удовлетворяет соотношениям:

$$c>1,\ c>2,\dots,c>n,\dots \tag{8}$$

Числа последовательности (7) являются бесконечно большими. Их называют гипернатуральными числами или иначе: трансфинитными неканторовскими числами. Такие числа позволяют совершить естественный переход к не-архимедову математическому анализу.

4. Антиномичный подход к изучению пространственно-временных отношений.

Математика с давних пор занята исследованием метрических и топологических характеристик пространственно-временного многообразия. Но все традиционные исследования оставались как-то в стороне от вопроса, поставленного Флоренским, а именно от вопроса о существовании внутренней стороны, «изнанки» пространства-времени. Возможно, это обусловлено тем, что допущение о двойственном характере пространственно-временных отношений неизбежно упирается в те самые антиномии, для которых не существовало, до работ Н.А.Васильева, логического оправдания. Теперь страх перед противоречиями-антиномиями окончательно преодолен. И сама математическая логика становится ориентиром в поисках необычного, неосязаемого, сверхэмпирического в пространственно-временном универсуме. Первый шаг на данном пути — открытие фактора поляризации пространственно-временных отношений на внешние и внутренние. Последний шаг — завершение построения геометрической модели Флоренского.

Чтобы понять, что лежит в основе поляризации пространственно-временных отношений на внешние и внутренние, надо обратить внимание в первую очередь на двойственный способ представления отношений на языке логики — в экстенсиональном и интенсиональном аспектах. В математической логике отношения и свойства объединяются под (общим) названием предикатов. Одноместному предикату соответствует свойство, многоместному — n-местное отношение, когда $n > 1$. И экстенсиональные и интенсиональные аспекты отношений определяются по аналогии с экстенсионалами и интенсионалами свойств. Экстенсионал свойства представляется в виде множества объектов (вещей), обладающих данным свойством. В интенсиональном же аспекте свойство есть атрибут, присущий вещи. Аналогично, экстенсионалом n-местного отношения называется множество упорядоченных n-ок объектов, в интенсионале отношения учитываются атрибуты объектов, благодаря которым составляется отношение между выделенными объектами.

Экстенсиональный способ отображения свойств и отношений очень удобен в математике. У.В.Куайн, например, отмечает, что ясность в этой отрасли знания часто приобретается именно за счет обсуждения классов (множеств), а не отдельных свойств. «Какие бы выкладки, — пишет он, — мы ни производили с привлечением понятия о свойстве, все они могут быть выполнены с неменьшим успехом при использовании понятия о классе всех вещей, обладающих этим свойством. При этом достигается большая ясность, поскольку, когда мы говорим о классах, у нас имеется четкое представление об их тождестве и различии: это зависит от того, состоят или не состоят эти классы из одних и тех же элементов»[25].

Два класса, состоящие из одних и тех же элементов, совпадают между собой. К этому утверждению сводится содержание принципа экстенсиональности (объемности), который относится к числу фундаментальных положений теории множеств и оснований математики. Нетрудно убедиться на конкретных примерах, что интенсионально заданное свойство (будем говорить для краткости «интенсионал свойства») однозначно определяет его экстенсионал в рамках некоторого интервала абстракций, т. е. последний может быть получен из первого при условии, что мы умеем различать атрибуты всех объектов из универсума рассуждений. Обратное утверждение было бы, однако, неверным: интенсионал не определяется недвусмысленно экстенсионалом. Одному и тому же классу могут соответствовать два или больше свойств, которые отождествляются, как говорят, с точностью до объема.

Возникает вопрос, сколь универсальными могут быть свойства при свертывании вещей в классы. Оказывается, процесс универсализации имеет свои пределы, выход за которые ставит нас перед фактом наличия противоречий— антиномий. Во втором параграфе был описан парадокс Кантора. Здесь мы поясним суть проблемы на примере антиномии Рассела. Последняя связана с подразделением всех множеств на удобные для математического использования и неудобные. Удобные — это те, которые не принадлежат самим себе в качестве собственных членов. Их называют *нормальными.* Ненормальные выступают как члены самих себя. Так, скажем, множество больших планет солнечной системы не является планетой и, следовательно, не принадлежит самому себе. Тут все нормально. А множество всех понятий ненормально, поскольку «множество всех понятий» само есть понятие и, стало быть, принадлежит самому себе.

Так же, как и в случае парадокса «Лжец», легко убедиться с помощью простейших рассуждений, что множество (всех) нормальных мно-

---

25 Куайн У.В. Основания математики // Математика в современном мире. М., 1967, с. 99—100.

жеств одновременно и нормально, и ненормально. Разрешить данную антиномию можно только при условии понимания природы подобных антиномий вообще. К.Гёдель заметил, что парадоксы теории множеств представляют собой очень серьезную проблему, но не столько для математики, сколько для логики и философии[26]. За этим высказыванием скрывается, похоже, следующее обстоятельство. Исходным отношением математической теории множеств, как и в логической теории исчисления классов, служит отношение *принадлежности* элемента множеству (классу). Но множества бывают разные. Одно дело — принадлежность натурального числа, допустим, числа 5, множеству натуральных чисел, другое — принадлежность Земли множеству больших планет Солнечной системы. В первом случае отношение принадлежности оправдывается теоретической необходимостью, во втором — эмпирической схемой обобщения. Понимание этого крайне важного обстоятельства и наводит естественным образом на мысль о том, как разрешить антиномию. Надо выявить водораздел между теоретическими (внеэмпирическими) и эмпирическими абстракциями и обобщениями, которые опираются на одно и то же отношение принадлежности элемента классу. Заинтересованный читатель может познакомиться с процедурой разрешения антиномии в соответствующей литературе[27].

Здесь же наша задача состоит в том, чтобы расселовскую конъюнкцию оппозиций распространить на многоместные предикаты, причем такие предикаты, которыми могли бы быть представлены пространственно-временные отношения. В практике научного исследования мы привыкли иметь дело с тем типом этих отношений, в которых не фиксируются какие бы то ни было конкретные (частные) атрибуты вещей. Такие отношения задаются сугубо экстенсиональным способом и называются *внешними*. Они действительно имеют внешний характер в том смысле, что свойства вещей остаются безразличными к ним и не меняются с их изменениями. Однако попытка свести всевозможные пространственно-временные отношения к внешним приводит примерно к такому же парадоксу, как антиномия Рассела[28]. Т. е. наряду с внешними отношениями выявляются *внутренние* пространственно-временные отношения так, что оба типа отношений взаимно исключают и дополняют друг друга. Из противоположного характера внутренних отношений следует, что свойства и состояния объектов, вступающих в данные отношения, зависят от самих этих отношений и вне их просто не существуют.

Подходящий пример в случае двухместного предиката — изучаемое в психофизиологии и гносеологии отношение между воспринимающим (субъектом) и воспринимаемым (объектом). Стороны его объединяются понятием вторичных качеств вещей, т. е. таких качеств, которые зависят от обоих членов бинарного отношения, от объекта и субъекта.

---

26 См. по кн.: Hao Wang. From mathematics to philosophy. N.Y., 1974, p. 187.
27 Антипенко Л.Г. Проблема неполноты теории и ее гносеологическое значение. М., 1968, с. 190—193.
28 Там же, с. 64.

Сколь-нибудь общепринятого взгляда на природу связи между внешними и внутренними отношениями до сих пор так и не сложилось. Известно, что логические позитивисты — Б.Рассел, Л.Виттгенштейн и др. — признавали только отношения внешние. Внутренние же — изгонялись как из логики, так и философии. «Внешние отношения, — пишет разбирая данный вопрос Б.Дальбом, — использовались Джеймсом Муром и Расселом в качестве главного оружия против идеализма. Центральное значение имели, конечно, те отношения, которые соотносят познающего с познаваемым, перципиента и его ощущения с воспринимаемым объектом и т. п., где внутренние отношения обеспечивают интимную сторону идеализма, которая была утрачена, когда уверовали в то, что эти отношения внешние»[29].

На пути к полному выяснению данного вопроса находились исследования Флоренского. Он определил внутреннее отношение между двумя объектами, разнесенными в пространстве, как особый путь между ними, по которому расстояние между тем и другим оказывается равным нулю. «Геометрия учит, — указывал он в одном месте, — что каково бы ни было расстояние между двумя точками в пространстве по кратчайшей между ними, — кроме того, всегда может быть осуществлен путь, по которому расстояние их равно нулю. Линия этого пути есть так называемая изотропа. Устанавливая сообщение между точками изотропическое, мы непосредственно соприкасаем друг с другом любые две точки»[30]. Геометрия, в которой исчезает расстояние между двумя пространственно удаленными друг от друга точками, и создавалась автором путем расширения ее точечного многообразия до сочетания действительных и мнимых точек.

5. Топологические характеристики внешних и внутренних отношений.

Флоренский, как видно из последней цитаты предыдущего параграфа, подошел к рассмотрению дилеммы, согласно которой точки пространственно-временного многообразия ведут себя по-разному: в одном случае они раздельны, и любая часть пространства может быть отделена от смежной; в другом — этого сделать не удается, так как любые две смежные точки, приходя в соприкосновение, «слипаются» друг с другом. В топологии данная дилемма соотносится с понятием отделимого (хаусдорфова) и неотделимого топологического пространства. Здесь кроется очень важная топологическая проблема, к окончательному решению которой подводят «Мнимости в геометрии».

Обратимся к анализу некоторых необходимых для наших целей топологических понятий. Важнейшее из них — топологическое пространство. Его определение сводится к следующему.

---

29 Dahlbom B. Structure, mind and meaning. Gotenburg, 1977, p. 124.
30 Флоренский П.А. У водоразделов мысли. М., 1990, с. 292.

Пусть задано некоторое множество X. Назовем его элементы *точками*, а само X — пространством. Пусть далее, помимо X, задано некоторое семейство Т множеств, элементы которого суть подмножества X. И пусть семейство Т обладает такими свойствами:

(а) объединение любого числа множеств из Т принадлежит Т;

(б) пересечение любого конечного числа множеств из Т принадлежит Т;

(в) пустое множество $\varnothing$ и всё пространство X принадлежит Т.

В таком случае говорят, что на множестве X введена *топология* Т; пару $\langle X, T\rangle$ (или, более вольно, само X, лишь подразумевая присутствие Т) называют *топологическим пространством*, а подмножества X, входящие в Т — открытыми подмножествами топологического пространства $\langle X, T\rangle$[31].

Любая точка открытого множества является внутренней, т. е. имеет окрестность, целиком содержащуюся в открытом множестве. Это столь важная характеристика открытого множества, что его можно определить как множество, все точки которого суть внутренние. Например, введение *естественной топологии* на геометрической плоскости сводится к заданию такого множества точек на плоскости, которое удовлетворяет критерию внутренней точки. Конкретное же определение внутренней точки здесь таково. Точка x называется внутренней точкой (плоскостного) множества A, если найдется такое $\delta > 0$, что круг с центром в точке x радиуса δ целиком входит в A. Аналогичным образом вводится естественная топология в многообразии точек трехмерного (физического) пространства, где вместо круга с центром в точке x радиуса δ рассматривается соответствующая сфера. Наконец, столь же естественной представляется и топология множества точек (точечных событий) в четырехмерном пространстве — времени Минковского, которой охватывается множество точек всех возможных мировых линий.

Теперь уместно дать определение хаусдорфова топологического пространства. Пространство X называется *хаусдорфовым*, или *отделимым*, если для любых различных точек x и y существуют непересекающиеся открытые множества U и V, содержащие соответственно точки x и y. Иначе говоря, пространство X является отделимым по определению, если для любых его произвольных точек x и y можно указать такие их окрестности, которые не имеют общих точек.

Большинство топологических пространств, встречающихся в математической практике, как подчеркивает В.А.Успенский, оказываются хаусдорфовы; таковы, в частности, все так называемые метризуемые пространства. «В нехаусдорфовых пространствах могут возникать неожиданные явления: например, одна и та же последовательность может иметь два разных предела»[32].

---

31 Успенский В.А. Что такое нестандартный анализ? М., 1987, с. 80.
32 Там же, с. 82—83.

Надо прямо сказать, что понятие топологически отделимого пространства возникло в порядке обобщения коцепций метризуемого пространства. Однако в самой этой концепции до сих пор не преодолены трудности, выявленные в свое время еще Зеноном Элейским в форме так называемого метрического парадокса[33]. Неясным, в частности, остается ответ на вопрос, как, скажем, можно образовать из нуль-мерных объектов — геометрических точек — протяженный геометрический отрезок и почему множество всех точек отрезка не сливается в один нераздельный точечный конгломерат. Для нас здесь, в частности, важно добиться ясности в вопросе о том, почему отдельные точки из несчетного множества (континуума) точек геометрического отрезка не «слипаются» друг с другом.

Многое для разрешения данной трудности дает переформулировка понятия отделимого множества в терминах нестандартного, или не-архимедова, анализа. На языке геометрии различие между стандартной и нестандартной аксиоматиками математического анализа определяется отношением к аксиоме Архимеда, называемой еще аксиомой измерения. Как известно, она утверждает, что для любых двух отрезков a и b можно меньший из них (a) отложить столько раз вдоль большего, чтобы в сумме получить отрезок, превосходящий по длине больший отрезок (b). «Отложить столько раз» здесь непременно означает «конечное число» раз при условии, что отрезок a может быть сколько угодно мал: допустимо его неограниченное деление на меньшие части[34].

На протяжении многовековой истории развития математики постулат Архимеда считался настолько самоочевидным, что над альтернативами ему редко кто задумывался всерьез. В выпущенных в 1899 г. «Основаниях геометрии» Д.Гильберт изучал возможности построения неархимедовой геометрии, но не сделал попытки распространить ее принципы на математический анализ. Поэтому нестандартный анализ, возникший всего лишь 2-3 десятилетия тому назад — пока что непривычная идеология в математике, хотя ее истоки, как отмечал П.Флоренский, восходят к Лейбницу[35]. Принципиальнейший его момент состоит в том, что бесконечно малые рассматриваются здесь не как переменные величины, сколь угодно приближающиеся к нулю, а как величины постоянные.

Если, скажем, $\varepsilon > 0$ — одна из таких бесконечно малых, то определение ее как числа бесконечной малости сводится к следующему. Складывая число ε с самим собой, можно переходить к числам $\varepsilon + \varepsilon$, $\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon$, $\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon$ и т. д. Число это будет удовлетворять понятию бесконечно малого, если все полученные из него указанным способом числа будут всегда меньше единицы[36]. Если постулировать существование бесконечно малых, можно придти к выводу о существова-

33 Анисимов Н.Г. О теоретических основаниях системного мышления. // Проблемы философской методологии. М., 1989, с. 62—65.

34 Гильберт Д. Основания геометрии. М.-Л., 1948, с. 87.

35 Некрасова Е.А. Неосуществленный замысел 1920-х годов создания «Symbolarium'a» (словаря символов) и его первый выпуск «точка» // Памятники культуры: новые открытия. Ежегодник—1982. Л., 1984, с. 109.

36 Из этого ясно, почему в нестандартной математике не выполняется постулат Архимеда.

нии чисел бесконечно больших, ибо таким, в частности, будет число, обратное ε , так как оно всегда больше любой конечной суммы единиц:

$$1 < \frac{1}{\varepsilon},\ 1 + 1 < \frac{1}{\varepsilon},\ 1 + 1 + 1 < \frac{1}{\varepsilon},\dots .$$

Определяемые указанным способом бесконечно малые и бесконечно большие числа называются *нестандартными* в отличие от обычных стандартных, действительных чисел. К ним, с некоторыми оговорками, применимы, согласно принципу переноса, все законы обычных алгебраических операций — сложения, вычитания, умножения, деления и т. п. Расширенное за счет новых чисел поле действительных чисел называется полем *гипердействительных* чисел. Понятием гипердействительного числа объединяются таким образом числа стандартные и нестандартные, причем гипердействительные числа, не являющиеся бесконечно большими, называются конечными. К конечным относятся числа как стандартные, так и нестандартные. Если учесть, что 0 удовлетворяет определению числа бесконечной малости, то каждое конечное гипердействительное число a можно выразить в виде суммы $b + \varepsilon$, где b — стандартное число, а ε — бесконечное малое. Число b называется стандартной частью конечного гипердействительного числа a, что записывается так:

$b = st(a)$.

Все наши рассуждения о нестандартных числах базируются не только на их номинальных определениях, но и на соответствующем решении проблемы их существования. А истоки решения данной проблемы коренятся в открытии нестандартных моделей арифметики, о которых неслучайно говорилось в предыдущем параграфе. Нестандартная арифметическая модель с гипернатуральными числами подводит к положительному решению вопроса о существовании чисел бесконечной малости.

Еще два-три определения понадобятся для того, чтобы выразить на языке не-архимедовой математики критерий отделимости топологического пространства. Числовая ось, которая заполняется гипердействительными числами вместо одних чисел действительных, позволяет наглядно представить отношение близости. Два гипердействительных числа называются *бесконечно близкими*, если их разность бесконечно мала. Из свойств бесконечно малых следует, что отношение бесконечной близости есть отношение эквивалентности. Это означает, в частности, что отношение бесконечной близости рефлексивно (каждое x бесконечно близко самому себе), симметрично (если x бесконечно близко к y, то y бесконечно близко к x) и транзитивно (если x бесконечно близко к y, а y бесконечно близко к z, то x бесконечно близко к z). Как известно, всякое отношение эквивалентности разбивает множество, на котором оно определено, на попарно непересекающиеся классы, причем любые два элемента одного класса эквивалентны, а любые два элемента разных классов не эквивалентны. В нашем случае отношение близости разбивает числовую ось гипердействительных чисел на непересекающиеся классы такие, что элементы каждого из классов бесконечно близки друг к другу, а элементы из разных классов — нет. Классы, содержащие стандартные действительные числа, называются *монадами*.

В терминах монад критерий отделимости топологического пространства формулируется следующим образом с учетом того, что гипердействительные числа ассоциируются с точками. Пространство X отделимо тогда, и только тогда, когда в его нестандартном расширении монады любых двух стандартных точек не пересекаются. «Другими словами, — указывает В.А. Успенский, — отделимость пространства означает, что не существует (возможно, нестандартной) точки, которая была бы бесконечно близка к двум различным стандартным точкам»[37]. О понятии нестандартного расширения топологического пространства мы получаем представление на основе превращения числовой оси действительных чисел в числовую ось гипердействительных чисел.

Как видно из последней формулировки, заполнение промежутков, или пробелов, между действительными числами линейного континуума числами бесконечной малости является необходимым условием хаусдорфовости топологического пространства. Следующий шаг состоит в том, чтоб на конкретном механизме взаимосвязи между точками выяснить, при каком условии монады любых двух стандартных точек не перекрываются. Это подводит нас к выяснению условия *достаточности* отделимости топологического пространства. Но здесь мы свели понятия внешних и внутренних отношений пространственно-временного многообразия к топологическим понятиям отделимого и неотделимого пространства.

6. Структура пространства-времени в геометрической модели Флоренского.

Какой путь ведет к выполнению условия достаточности того, чтобы топологическое пространство было отделимым? Судя по общему замыслу «Мнимостей в геометрии» путь этот гениально прост. Вводятся в рассмотрение два класса стандартных точек — точек действительных и точек мнимых — индексируемых соответственно вещественными и мнимыми числами. Действительные и мнимые точки размещаются на числовой оси так, что за каждой действительной точкой следует мнимая, и наоборот, т. е. они чередуются. Такое внедрение в числовую ось мнимых точек служит гарантией того, что монады любых двух стандартных точек не будут пересекаться между собой.

Переведем все сказанное на математический язык, обратившись сразу к четырехмерному пространственно-временному многообразию Минковского. В псевдоевклидовой геометрии специальной теории относительности в качестве «расстояния» между двумя точками (точечными событиями) выступает пространственно-временной интервал Δs. Выражение его квадрата, записанное в дифференциальной форме, имеет следующий вид:

---

37 Успенский В.А. Что такое нестандартный анализ? М., 1987, с. 90.

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Зеркальной инверсии этой величины в контексте мнимостей в геометрии будет соответствовать преобразование

$$ds^2 \to -ds^2 . \qquad (9)$$

Его локальный вариант определяется сдвигом бесконечно малых отрезков dt, dx, dy, dz на величину бесконечной малости (дифференциал Лейбница) ε . (Надо иметь ввиду, что здесь используются сразу два разных типа величин бесконечной малости). Обозначим величину дифференциала пространственно-временного интервала, которая получается после сдвига компонентов ds^2 на ε (для определенности полагаем $\varepsilon > 0$) через ds'. Тогда получаем:

$$(ds')^2 = c^2(dt - \varepsilon)^2 - (dx - \varepsilon)^2 - (dy - \varepsilon)^2 - (dz - \varepsilon)^2. \qquad (10)$$

Если $(ds')^2 = -ds^2$, то это влечет:

$$-dt^2 = (dt-\varepsilon)^2,\ -dx^2 = (dx-\varepsilon)^2,\ -dy^2 = (dy-\varepsilon)^2,$$
$$-dz^2 = (dz-\varepsilon)^2.$$

Все четыре уравнения однотипны. Поэтому достаточно рассмотреть, скажем, квадратное уравнение для dx. После преобразования оно приобретает вид:

$$dx^2 - \varepsilon \cdot dx + \frac{\varepsilon^2}{2} = 0 .$$

Решение его дает: $dx_{1,2} = \frac{\varepsilon}{2}(1 \pm i)$. (11)

Мы видим, что некоторая точка x на оси абсцисс как бы расщепляется на две точки $x + \frac{\varepsilon}{2}$ и $x \mp i\frac{\varepsilon}{2}$. Разность между ними и составляет выражение (11). То же самое имеет место для dt, dy и dz.

Как нетрудно убедиться, модуль ρ комплексного числа, стоящего в правой части соотношения (11), равен $\frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2}$, а аргумент $\theta = \frac{\pi}{4}$, т. е. $dx_{1,2} = \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. В общем случае аргумент — необязательно должен быть равен $\frac{\pi}{4}$, он может варьироваться в известных пределах и быть функцией от времени и пространства. При значениях θ, близких к нулю или $\frac{\pi}{2}$, происходит разделение действительных и мнимых точек, в результате которого пространство приобретает свойство топологической неотделимости: однородные точки «слипаются» и образуют неделимую среду мгновенных влияний, не зависящих от расстояния между объектами.

Символически разделение точек выглядит так. Ограничимся для простоты только координатным измерением пространства по оси абсцисс. Тогда обобщенное значение dx при зеркальном преобразовании будет иметь вид:

$$dx_{1,2} = \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2}(\cos\theta \pm i\sin\theta) .$$

При обычных действиях над комплексными числами $\operatorname{Re}(dx) = 0$ при $\theta = \frac{\pi}{2}$. Однако если рассматривать действия над комплексными числами в рамках неархимедова анализа, радиальный вектор комплексного числа, представленного на плоскости Коши, может совпадать с осью абсцисс или осью ординат лишь в тех пределах, которые допускает величина бесконечной малости ε. Поэтому выражение для dx при $\theta = \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$ приобретает вид:

$$dx_{1,2} = \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \pm i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right] \approx i\frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2}.$$

Поскольку вещественная часть комплексной величины dx из этой величины выпадает, расстояние между двумя ближайшими друг к другу действительными точками исчезает, становится как бы мнимым. И все точечное вещественное многообразие выступает как единый, цельный и неделимый агрегат, напоминающий по своим свойствам абсолютно упругое тело, способное передавать звуковое возмущение с бесконечной скоростью.

В зеркальном мире поворот радиального вектора комплексного числа на плоскости Коши должен совершаться не против часовой стрелки, а по часовой стрелке, начиная со значения $\theta = \frac{\pi}{4}$. Разделение точек происходит при $\dot{\theta} = \varepsilon$.

Такова микрокоординатная структура четырехмерного пространственно-временного многообразия Минковского. В интегральной форме его координаты приобретают вид:

$$\begin{cases} \vec{r}_c = \vec{r} + i\vec{r}\,' \\ t_c = t + it' \end{cases}$$

Для нашего реального мира $\vec{r}\,' \equiv t' \equiv 0$, для зеркального мира (т. е. для изнанки пространства-времени) $\vec{r} \equiv t \equiv 0$; при этом r и t изменяются от $+\infty$ до $-\infty$. Флоренский пришел к этим соотношениям, исходя из чисто математических соображений относительно новой, оригинальной интерпретации комплексных чисел.

7. Заключение.

В заключении остановимся на одном из парадоксов математической теории меры, пути разрешения которого тоже были намечены Флоренским. Здесь вопрос ставится о том, как можно составить из геометрических точек нечто протяженное, скажем, конечную длину линейного отрезка. Поиском ответа на такой вопрос занимался еще в античное время Зенон Элейский, известный больше по названным его именем апориям движения. Зенонова метрическая апория множества имеет для математики не менее фундаментальное значение, чем парадоксы движения. Она опирается, как теперь четко выяснено современными исследованиями[38], на две основные аксиомы. А именно: при делении всех величин на положительные и «безразмерные» Зенон предполагает, что (1) сумма бесконечного числа равных положительных величин произвольной малости с необходимостью должна быть бесконечной; (2) сумма любого конечного или бесконечного числа «безразмерных» величин с необходимостью должна равняться нулю. Отсюда проистекает следующая дилемма: если отрезок линии разлагается на множество равных элементов, тогда возможны два и только два случая: либо эти элементы обладают одинаковой положительной длиной и их совокупность имеет бесконечную протяженность (по аксиоме 1), либо длина этих элементов равна нулю и их совокупность имеет нулевую протяженность (по аксиоме 2). «Первое положение этой дилеммы, — пишет Грюнбаум, — является справедливым, однако оно не имеет отношения к современной аналитической геометрии пространства и времени. Если мы хотим решить проблему, которая стоит перед нами, то нам нужно опровергнуть второе положение этой дилеммы в контексте современной математики»[39].

Посмотрим, насколько приблизилась к решению этой задачи современная аналитическая (точечная) теория множеств и какой вклад внес в нее Флоренский. Считается, вообще говоря, что ключ к решению содержит канторовская теория трансфинитных чисел — ординальных и кардинальных, предоставляющих возможность дать оценку непрерывному множеству точек, имеющему мощность континуума. С канторовской теорией множеств сопрягается математическая теория меры. В теории меры мера множества вводится как понятие, обобщающее представление о длине отрезка, площади плоской фигуры и объема тела на множества более общей природы. Так, скажем, плоская мера, или мера в смысле Жордана, есть не что иное, как определенная площадь квадрируемой области. Более обобщенное понятие — мера Лебега — вводится для характеристики как множеств, лежащих на плоскости, так и множеств, расположенных на прямой или в трехмерном пространстве. Лебеговский метод ограничения множеств аналогичен известному с античных времен методу квадрирования плоских фигур. Его мы и будем иметь ввиду во всех дальнейших рассуждениях.

---

38 См., например: Грюнбаум А. Философские проблемы пространства и времени. М., 1969.
39 Там же, с. 204.

Три важнейшие свойства меры определяются следующими высказываниями: (1) мера любого множества неотрицательна; (2) мера суммы конечной или счетной системы попарно непересекающихся множеств равна сумме их мер; (3) при перемещении множества как твердого тела его мера не меняется.

Поскольку точка является нуль-мерным объектом, мера множества рациональных точек на интервале (0,1) будет равна нулю. Мера же множества иррациональных точек на том же интервале принимается равной 1, хотя оба множества удовлетворяют свойству плотности, что означает: между любыми двумя точками интервала (0,1) найдутся соответственно как рациональные, так и иррациональные точки. Результат этот объясняется тем, что удаление рациональных точек из интервала (0,1) не меняет мощности данного множества. Необходимое условие наличия на множестве конечной, отличной от нуля, меры, заключается таким образом, в требовании, чтобы данное множество обладало мощностью континуума. Оно выступает как естественное согласование школьной геометрии с геометрией аналитической. Но является ли сформулированное условие не только необходимым, но и достаточным условием для существования на множестве конечной меры? Другими словами, разрешается ли канторовской теорией континуума парадокс Зенона?

Сам Г.Кантор указал пример так называемого тернарного точечного множества, мощность которого равна мощности континуума, а мера равна нулю[40]. И этот пример являет собой differentia specifica парадокса Зенона. Каков же выход из затруднения?

Флоренский впервые разъяснил, что из линейного континуума точек — рациональных и иррациональных, взятых самих по себе, вообще нельзя сконструировать никакой протяженности, если говорить о мере множества в терминах протяженных величин. Протяженный континуум, писал он, удается построить лишь на фоне подразумеваемой интуиции *сплошного*, а когда эта интуиция откровенно изгоняется вон, то никакого континуума не получается. «Да и понятно, когда мы не имеем способности созерцать hiatus, пробел между точками, усматриваемый только созерцательно, мы не можем и строить континуума, ибо не знаем, имеет ли пробелы то, что мы построили, или «связано», как выражается Кантор: континуум и лже-континуум на наш только логический вкус ничем не отличаются»[41].

Флоренский аргументировал, что протяженный континуум можно построить лишь тогда, когда мы поймем, что точка в математике играет двойную роль, символизируя в своих предельных значениях «полноту» и «пустоту» (пробел), единицу и нуль. «Единица и нуль, как значения точки, — разъяснял он, — суть пределы; но можно использовать точку и как стремящегося к этим пределам; тогда она понимается как *диффереи-*

---

40 См.: БСЭ, 3-е изд., т, 11, с. 340.
41 См.: Некрасова Е.А. Неосуществленный замысел 1920-х годов создания «Symbolarium'а» (словаря символов) и его первый выпуск «Точка» // Памятники культуры: новые открытия. Ежегодник—1982, Л., 1984, С. 108.

циал, и притом дифференциал в двояком смысле: либо как «дух возникающей величины» <...>, кирпичик, из которого строится величина, как пользуются обычно дифференциалом в математическом естествознании; тут дифференциал имеет тайную наклонность сближаться в мысли (несмотря на все заверения в противном со стороны теоретиков) с актуально бесконечно малым; в этом своем смысле он есть некая единица, и не без причины дифференциалы Лейбница были родными братьями его *монад*, уже знакомых единиц. Либо точка получает смысл «духа исчезнувшей величины», точнее исчезающей, и тогда есть своего рода нуль: это — Ньютоновские флюксии, которые и обозначались-то, кстати сказать, у Ньютона *точкою*, поставленною над буквенным символом соответственной величины»[42].

Построить протяженный континуум, по Флоренскому, значит учесть оба рода бесконечно малых величин — дифференциалы Ньютона и дифференциалы Лейбница. Естественное отождествление дифференциалов Лейбница с актуально-бесконечно малыми позволяет разрешить метрический парадокс Зенона. Процедура разрешения состоит в том, что пробелы между действительными числами линейного континуума заполняются числами бесконечной малости ε. И как только в континуум входят не только рациональные и иррациональные точки как нуль-мерные объекты, но и объекты с отличной от нуля мерой, мера всего соответствующего множества точек уже не может оказаться равной нулю. Внедрение чисел бесконечной малости в континуум не меняет его мощности, так как множество действительных и множество гипердействительных чисел равномощны.

Л. Г. Антипенко

42 Там же, с. 109—110.

СОДЕРЖАНИЕ

Павел Александрович Флоренский
«Мнимости в геометрии»
М. «Лазурь». 1991, с. 96

Предисловие, послесловие, комментарии и общая редакция
Леонида Григорьевича Антипенко.
Издание подготовлено по книге, вышедшей в 1922 году
в издательстве «Поморье».
Обложка и оформление художника *Владимира Андреевича Фаворского*
реконструированы и воспроизведены на компьютере *Владимиром Викторовичем Гурьяновым.*
Набор и воспроизведение рисунков — *Владимир Гурьянов* и *Алексей Александрович Кольцов.*

Подписано к печати 20.12.91. Заказ 2639. Тираж 5000 экз

Типография МИФИ, Каширское шоссе, 31