Bodenbeschaffenheit, Beleuchtung die für die Variation maßgebenden Faktoren. Sie bestimmen die Formeneinheiten, aus deren Variation im einzelnen sich die Gesamtvariation zusammensetzt. Die Variationsmittelpunkte bilden die Zahlen 3 und 5. Die Gesetzmäßigkeit, die im Hervortreten dieser Zahlen zum Ausdruck kommt, kann nur in inneren Ursachen begründet sein. Beobachtung und Experiment zeigten, daß die einzelnen Gruppen einen einheitlichen Ursprung hatten. Ob letztere das erste Resultat eines Vorganges innerhalb der Art darstellen, dessen Ende die Auflösung der Art in einzelne selbständige Arten bedeutet?

Petzvals Theorie der Tonsysteme.

Herausgegeben von Dr. phil. L. Erményi, Ingenieur in Wien.

Einleitung.

In dem Vorworte zu der in Bd. 50 dieser Zeitschrift veröffentlichten Abhandlung *„Theorie der Störungen der Stützlinien von † Josef Petzval"*, in welchem eine gedrängte Charakteristik dieses Mathematikers enthalten ist, wird erwähnt, daß derselbe unter den verschiedenen Zweigen der angewandten Mathematik auch die Akustik bearbeitet und auch darin Hervorragendes geleistet habe. Hatte er schon im Jahre 1859 eine Theorie der Schwingungen gespannter Saiten aufgestellt, so beschäftigte er sich gegen Ende der 1860er Jahre, wie dies aus den vom Herausgeber kürzlich gefundenen Handschriften hervorgeht, insbesondere mit folgenden Gegenständen: *Theorie der Tonsysteme, Bildung der Akkorde, rationelle Tastatur, mathematische Grundsätze zur Bildung einer neuen Harmonielehre.*

Leider sind durch die in Petzvals Biographie[1]) geschilderten beklagenswerten Umstände auch seine akustischen Arbeiten fast gänzlich verloren gegangen, und haben sich von manchen nur noch einzelne Bruchstücke gefunden. Am verhältnismäßig vollständigsten sind die handschriftlichen Aufzeichnungen über seine Theorie der Tonsysteme, wahrscheinlich deshalb, weil sie aus der letzten Zeit seiner lehramtlichen Tätigkeit stammen. Diese Theorie hatte er in den Jahren 1870—1877 an der Wiener Universität zum Gegenstande seiner Vorträge gewählt, die sehr zahlreich besucht wurden, nicht nur weil der Gegenstand neu

1) Dr. Josef Petzvals Leben und Verdienste von Dr. Erményi. 2. wesentlich vermehrte Ausgabe. Halle a. S. 1903, W. Knapp.

war, sondern auch, weil Petzval, gewohnt selbst den trockensten Gegenstand durch seine Vortragsweise fesselnd zu gestalten, der mathematischen Entwickelung dieser Theorie durch geistreiche Ausfälle gegen d'Alembert, Rameau, Helmholtz u. a., sowie durch humoristische Einstreuungen eine besondere Anziehungskraft zu verleihen verstand.

Daß man damals die Ergebnisse seiner akustischen Untersuchungen für bedeutende hielt, geht auch aus dem Umstande hervor, daß im Jahre 1871 sein früherer Assistent, der Realschul-Professor Ševčik, an der Wiener technischen Hochschule die venia legendi für die mathematische Theorie der Tonsysteme und Schwingungen gespannter Saiten erlangen und darin durch eine Reihe von Jahren eine entsprechende Lehrtätigkeit entfalten konnte. Die Erklärung dafür kann nur in dem Umstande erblickt werden, daß in dem Habilitations-Gesuche ausdrücklich und auch von der zur Beurteilung desselben eingesetzten Kommission, welcher Petzvals Leistungen auf diesem Gebiete bekannt sein mußten, besonders hervorgehoben worden ist, daß Ševčik die Vorlesungen „genau nach Petzval" zu halten gedenke.

Als Petzval nach Vollendung seiner Tonsysteme sich auch an die anderen vorgenannten Arbeiten machte, schwebte ihm wohl die Überzeugung vor, daß hiezu ein Musiker von Fach der viel geeignetere Mann wäre, als ein schlichter Mathematiker, der zu dergleichen Darstellungen gar keinen Beruf in sich fühlt. Er war auch bemüht, einen solchen zu gewinnen. Aber da ergab sich die gewiß sehr merkwürdige Erscheinung, daß alle von ihm eingeladenen Musiker, die mathematisch gebildeten nicht ausgenommen, sich dem Einflusse des herrschenden chromatischen Tonsystems nicht zu entziehen vermochten und sich mit einem anderen als dem 12-stufigen System zu befreunden gänzlich außer stande waren. So blieb ihm nichts übrig, als eine solche Darstellung seiner Studien in einer den mathematischen Wissenschaften möglichst homogenen Fassung, wenn auch ohne Beruf, Neigung und Geschick, selbst zu versuchen, und in einer von den musikalischen Inkonsequenzen tunlichst befreiten Darstellung wenigstens die Elemente einer mathematischen Harmonielehre aufzustellen, wie sie zum gründlichen Verständnisse der Tonsysteme überhaupt notwendig sind. Dieser Umstand ist die Ursache, daß sich Petzval mit seinen musikalischen Ansichten und den geltenden Anschauungen der Musiker in mancher Beziehung nicht in voller Übereinstimmung befindet. Indessen ihm war es auch gar nicht darum zu tun, in diesen Kreisen irgendwie aufklärend oder belehrend zu wirken, vielmehr stellte er sich lediglich die Aufgabe, ein Problem der Akustik auf mathematischem Wege einmal gründlich und erschöpfend zu lösen. Den Anlaß hiezu haben ihm zunächst die damals neuen und epochemachenden Arbeiten von Helmholtz gegeben, der in seiner Lehre von den Tonempfindungen u. a. auch ein neues 30-stufiges Tonsystem aufgestellt und dieses an einem Harmonium „in natürlicher reiner Stimmung" praktisch durchgeführt hat.

Die Frage der Tonsysteme wollte also Petzval allgemein behandeln und kritisch untersuchen. Er sagte, daß das beste Tonsystem zu allen Zeiten der Gegenstand der Bemühungen der Tonliebhaber war, und daß denn auch eine ziemliche Anzahl in Vorschlag gebracht worden sei. Da sie aber alle erhalten worden seien auf dem Wege des Versuches und des arithmetischen Herumtastens, auf welchem man zwar sehr gute Tonsysteme, ja sogar das beste erfinden, aber nie beweisen kann, daß man das beste habe, so könne dieser offenbar sehr interessante Gegenstand noch nicht als erledigt betrachtet werden. Es bleibe der mathematischen Analysis vorbehalten, die allgemeine Formel, oder die Formeln, wenn es mehrere voneinander verschiedene gibt, anzugeben, in welcher oder in welchen alle erdenklichen Tonsysteme, sowohl die, welche man bereits kennt, sowie auch jene, welche man noch nicht kennt, enthalten sind, wodurch dann die Auffindung des besten unter ihnen sich als ein einfaches Maximum-Problem gestaltet.

Die Methoden, die er dabei anwandte, sind durchaus originell, und sind die gefundenen Ergebnisse ohne Zweifel ein bemerkenswerter Beitrag für die Tonlehre. Eine nachträgliche Veröffentlichung seiner Theorie ist jedenfalls begründet. Die gefundenen handschriftlichen Aufzeichnungen sind im Anfange so gehalten, als ob Petzval die Abhandlung zur Veröffentlichung bestimmt hätte, was er auch an der einen und anderen Stelle ausdrücklich sagt. Aber im weiteren Verlaufe scheint er diese Absicht wieder fallen gelassen zu haben, zumal die Aufzeichnungen immer lückenhafter, unzusammenhängender werden, und schließlich ganz augenscheinlich nur zu dem Zweck gemacht worden sind, für den mündlichen Vortrag als Behelf zu dienen. Druckreif sind also diese Aufzeichnungen nicht. Es blieb daher nichts übrig, als dieselben umzuarbeiten, beziehungsweise das Skelett aus dem vielen, sonst sehr interessanten Beiwerke herauszuschälen, es teilweise zu ergänzen, und so die eigentliche Theorie in ihrer rein mathematischen Form herzustellen.

Die sämtlichen gefundenen Handschriften, die sich auf die erwähnten Gegenstände beziehen, hat der Herausgeber dem Musik-Archiv der Stadt Wien übergeben, weil er der Meinung ist, daß die Gedanken, die Petzval in seinen Aufzeichnungen niedergelegt hat, nicht spurlos verschwinden sollten, zumal es nicht ausgeschlossen ist, daß sich einmal ein in der Mathematik wie in der Musik gleich bewanderter Fachmann findet, der dieselben verwertet und im Geiste Petzvals weiterführt.

I. Begriff eines Tonsystems.

Bekanntlich hat ein jeder elastischer Körper mehrere einfache Schwingungsreihen, die er entweder einzeln oder auch mehrere zusammen anzunehmen vermag, und zu denen ebensoviele Töne gehören. Ihre Schwingungszahlen in der Sekunde sind die Wurzeln einer transzendenten Gleichung und können in eine steigende Reihe, nach einem gewissen Gesetze fortschreitender Glieder geordnet werden. Die erste und kleinste dieser Schwingungszahlen entspricht dem sogenannten *Grundtone*, die anderen entsprechen den verschiedenen *Obertönen* dieses elastischen Körpers. Z. B. eine wagerecht gespannte, homogene und überall gleich dicke Saite kann eine Reihe von Tönen geben, deren Schwingungszahlen in der Sekunde

$$(1) \qquad \zeta,\ 2\zeta,\ 3\zeta,\ 4\zeta,\ 5\zeta,\ 6\zeta,\ 7\zeta, \ldots$$

sind, unter ζ die Anzahl der Schwingungen des tiefsten oder Grundtones verstanden. Hervorgerufen werden diese Töne und zwar der Grundton durch einfaches Anschlagen der Saite, die Obertöne hingegen, wenn man die Saite in der Hälfte, im Drittel, Viertel ... ihrer Länge leicht mit dem Finger berührt und dann anschlägt. Sie heißen auch Aliquot- oder Flageolett-Töne. Der erste Oberton, dem die Schwingungszahl 2ζ angehört, hat die Eigenschaft, das menschliche Ohr beinahe auf dieselbe Weise anzuregen, wie der Grundton selbst, daher man in einem jeden Tongebilde einen derselben für den anderen setzen kann, ohne den Charakter dieses Tongebildes wesentlich zu ändern. Deshalb werden auch in der Musik beide mit ein und demselben Namen bezeichnet. Heißt z. B. der eine C, so heißt der andere ebenso.

Daher folgende allgemeine Regel: *Man kann die Schwingungszahl ξ eines beliebigen Tones ein oder auch mehrere Mal mit 2 multiplizieren oder dividieren, ohne den Namen des Tones zu ändern.* Gehört also die Schwingungszahl ξ zum Tone X, so gehört auch die Schwingungszahl $2^n \xi$ zu einem Tone namens X, unter n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl verstanden.

Das zweite dieser beiden X heißt nach dem musikalischen Sprachgebrauche die n^{te} *Oktave* des ersten, das Warum ist hier nicht wesentlich. Hieraus folgt unmittelbar, daß die unter (1) aufgezeichneten Töne einer Saite nicht alle verschiedene Namen tragen, sondern in Gruppen mit einem und demselben Namen zerfallen. Insbesondere gehören die Schwingungszahlen: ζ, 2ζ, 4ζ, 8ζ, 16ζ, ... alle zu Tönen einerlei Namens, z. B. namens C, und diese Töne heißen: Grundton, 1^{te}, 2^{te}, 3^{te} und höhere Oktave von C.

Ebenso tragen alle Töne mit den Schwingungszahlen 3ζ, 6ζ, 12ζ, $24\zeta, \ldots$ einerlei Benennung G; zu ihnen gehört auch der Ton mit $\frac{3}{2}\zeta$ Schwingungen in der Sekunde, wiewohl er in der Reihe (1) nicht vorkommt, mithin kein Oberton der Saite ist, und da $\frac{3}{2}\zeta$ zwischen ζ und 2ζ enthalten ist, so fällt dieser Ton in den Bereich der 1ten Oktave und heißt Quinte des Grundtones C. Hieraus folgt, daß *allgemein die Schwingungszahl der Quinte aus jener des Grundtones erhalten wird durch Multiplikation mit* $\frac{3}{2}$.

So hat also die Quinte von G oder die zweite Quinte von C die Schwingungszahl $\frac{3^2}{2^2}\zeta = \frac{9}{4}\zeta$. Dieser Ton wird samt den Tönen mit $\frac{9}{8}\zeta$, $\frac{9}{16}\zeta$, $\frac{9}{32}\zeta, \ldots, \frac{9}{2}\zeta$, 9ζ, $18\zeta, \ldots$ Schwingungen in der Musik mit D bezeichnet und der erste von ihnen die *Sekunde* des Grundtones C genannt. Zu diesem C gehört ferner ein Ton, von welchem das C die Quinte ist, seine Schwingungszahl ist $\frac{2}{3}\zeta$. Dieser Ton heißt F, seine Oktave hat $\frac{4}{3}\zeta$ Schwingungen und wird die *Quarte* des Grundtones genannt. Obschon kein Oberton der Saite, steht er mit dem Grundton doch in naher Verwandtschaft, weil C ein Oberton von F ist.

In der Reihe (1) befinden sich noch die Schwingungszahlen

$$5\zeta, \quad 10\zeta, \quad 20\zeta, \ldots$$

Die ihnen entsprechenden Töne heißen alle E. Zu ihnen gehört auch der in die erste Oktave fallende mit $\frac{5}{4}\zeta$ Schwingungen, welcher die *große Terz* des Grundtones genannt wird. Man erhält mithin die Schwingungszahl der großen Terz aus jener des Grundtones durch Multiplikation mit $\frac{5}{4}$.

Endlich werden in der Reihe (1) auch Schwingungszahlen 7ζ, 14ζ, $28\zeta, \ldots$ wahrgenommen. Die diesen Zahlen entsprechenden Töne nennt Petzval *Ais.* Zu ihnen gehört auch der Ton mit $\frac{7}{4}\zeta$ Schwingungen in der Sekunde, der ebenfalls in den Bereich der ersten Oktave fällt, und den er die *reine Septime* des Grundtones nennt.[1])

---

1) Hier weicht Petzval von der allgemein gebräuchlichen Bezeichnungsweise wesentlich ab. Nach dieser versteht man unter *ais* den Ton mit der reinen Schwingungszahl $\frac{5}{3} \cdot \frac{25}{24} = \frac{125}{72}$ und nennt ihn die übermäßige Sexte; die Töne

Um die Aufzählung der dem Grundtone verwandten Töne vollständiger zu machen, ist noch zu bemerken, daß die Quinte G auch eine große Terz besitzt mit der Schwingungszahl $\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} \zeta = \frac{15}{8} \zeta$; sie heißt H.

Auch die Quarte F besitzt eine große Terz mit der Schwingungszahl $\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} \zeta = \frac{5}{3} \zeta$. Sie führt den Namen A.

Stellt man nun die aufgezählten, dem Grundtone C verwandten Töne, die sämtlich in der ersten Oktave enthalten sind, in eine Gruppe zusammen, geordnet nach ihren Schwingungszahlen, von der kleinsten angefangen, so erhält man die Tonreihe:

$$\text{(2)} \qquad \begin{array}{cccccccc} C & D & E & F & G & A & H & C. \\ \zeta & \frac{9}{8}\zeta & \frac{5}{4}\zeta & \frac{4}{3}\zeta & \frac{3}{2}\zeta & \frac{5}{3}\zeta & \frac{15}{8}\zeta & 2\zeta. \end{array}$$

Hier fehlt die Septime mit der Zahl von $\frac{7}{4} \zeta$ Schwingungen. Sie würde den Platz zwischen A und H einnehmen und nach dem in der Musik angenommenen Bezeichnungsgebrauche *Ais*, d. h. erhöhtes A, heißen ist aber nicht eingeschaltet worden, weil sie auch in den herrschenden Tonsystemen der modernen Musik eigentlich nicht vorkommt.

Diese hier angeführten Töne bilden eine kleine, nur aus 7 Noten bestehende Melodie, welche nicht gar so übel klingt und den Leuten nur deshalb unangenehm ist, weil sie sie gar zu oft hören müssen. Demungeachtet bildet sie aber doch ein schon deshalb merkwürdiges Liedchen, weil es nach Belieben heiter oder schwermütig klingt. Heiter, lustig, munter, hart (dur), wenn man es in der Ordnung (2) der Töne von C angefangen absingt. Traurig, weich (moll), wenn man es von A anfängt und in der Ordnung

$$\text{(3)} \qquad \begin{array}{cccccccc} A & H & C & D & E & F & G & A \\ \eta & \frac{9}{8}\eta & \frac{6}{5}\eta & \frac{27}{20}\eta & \frac{3}{2}\eta & \frac{8}{5}\eta & \frac{9}{5}\eta & 2\eta \end{array}$$

abspielt. Unter den Tönen stehen auch hier dieselben Schwingungszahlen wie in (2), nur η anstatt $\frac{5}{3} \zeta$ gesetzt und reduziert auf die 1. Oktave.

---

h und *b* heißen Septime, und zwar *h* mit der reinen Schwingungszahl $\frac{15}{8}$ die große Septime, und *b* mit der reinen Schwingungszahl $\frac{15}{8} \cdot \frac{24}{25} = \frac{9}{5}$ die kleine Septime.

Die Reihe (2) heißt die *C*-Dur-, die Reihe (3) hingegen die *A*-Moll-Tonleiter (Skala) und heißen in denselben beziehentlich

der 1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8. Ton
Prim	Sekunde	Terz	Quarte	Quinte	Sexte	Septime	Oktave.

Die Tonabstände in diesen 2 Tonleitern sind selbstverständlich nicht dieselben. Mithin gibt es mehrerlei Terzen, Quarten usw., verminderte, kleine, große, übermäßige usw., was in die musikalische Nomenklatur einige Verwirrung zu bringen geeignet ist. Bei der Lösung des arithmetischen Problems jedoch, die hier angestrebt wird, können wir sie abseits lassen. Nur soviel ist nötig zu erwähnen, daß die kleine Terz der Moll-Tonleiter als dritter Ton in derselben entnommen ist und die Schwingungszahl $\frac{6}{5}\eta$ hat, während die große Terz der dritte Ton der Dur-Tonleiter ist mit der Schwingungszahl $\frac{5}{4}\zeta$.

Auch kann erwähnt werden, daß die Moll-Tonleiter nicht immer die (3) gewesen ist. Unter Papst Gregor dem Großen, der anstatt der griechischen die jetzt noch üblichen Buchstabenbenennungen einführte, wurde sie so: *A. B. C. D. E. F. G. A* gesungen, wobei unter *B* das heutige *H* verstanden wurde. Die moderne Musik hingegen braucht nur im Absteigen die Form (3), im Aufsteigen aber einen Zwitter aus halb Dur, halb Moll.

Ungeachtet der allgemeinen Abneigung gegen die beiden Tonleitern bleibt es aber doch Tatsache, daß die sieben verschiedenen Töne derselben sowohl nacheinander, als auch mehrere derselben mit Auswahl gleichzeitig angeschlagen, einen dem Ohre angenehmen Eindruck hervorbringen. Mehrere gleichzeitig erklingende Töne geben einen *Akkord.* So gibt der Grundton mit der großen Terz und Quinte einen Akkord

$$\begin{array}{ccc} C & E & G \\ \zeta & \frac{5}{4}\zeta & \frac{3}{2}\zeta, \end{array}$$

in dem die Schwingungszahlen im Verhältnisse 4, 5, 6 zu einander stehen; er wird der *C*-Dur-Dreiklang genannt und gilt mit allen seinen Versetzungen und insbesondere in der Ordnung der Töne *C*, *G*, *E* und dem Verhältnisse 2, 3, 5 der Schwingungszahlen für den angenehmsten oder konsonantesten aller Akkorde.

Solcher Dur-Dreiklänge lassen sich aus den sieben Tönen der Skala noch zwei bilden, nämlich:

$$\begin{array}{ccccccc} G & H & D & & F & A & C \\ \frac{3}{2}\zeta & \frac{15}{8}\zeta & \frac{9}{4}\zeta & \text{und} & \frac{4}{3}\zeta & \frac{5}{3}\zeta & 2\zeta, \end{array}$$

ihre Schwingungszahlen stehen ebenfalls im Verhältnisse 4, 5, 6. Diese Akkorde heißen daher der *G*-Dur- und der *F*-Dur-Dreiklang. Alle bestehen aus: Grundton, große Terz und Quinte, nur ist im ersten der Grundton *C*, im zweiten *G*, im dritten *F*, Töne, von welchen der erste oder Grundton *C* auch Tonika, der zweite *G* die Oberdominante, der dritte *F* die Unterdominante heißt. Die Tonleiter ist mithin zusammengesetzt aus den Bestandtönen dreier Dur-Dreiklänge.

Auch in der Molltonleiter kann aus Grundton *A*, kleiner Terz *C* und Quinte *E* ein Dreiklang, der auf das Ohr einen angenehmen Eindruck macht, gebildet werden; sein Klang ist aber weich (moll), düster, melancholisch, und es können auch hier wieder 3 solche Molldreiklänge aus den 7 Tönen der Skala zusammengestellt werden, nämlich:

$$\begin{array}{ccccccccccc} A & C & E & \quad & D & F & A & \quad & E & G & H \\ \eta & \frac{6}{5}\eta & \frac{3}{2}\eta, & & \frac{27}{20}\eta & \frac{8}{5}\eta & 2\eta & \text{und} & \frac{3}{2}\eta & \frac{9}{5}\eta & \frac{9}{4}\eta. \end{array}$$

Die Töne des ersten und dritten unter ihnen stehen genau im Verhältnisse der ganzen Zahlen 10, 12, 15. Diese Akkorde klingen gut. Der zweite derselben hat aber die Töne in etwas anderen Schwingungsverhältnissen und klingt auch minder gut. Das Verhältnis 10, 12, 15 ist aber samt dem Wohlklange wieder hergestellt, wenn man anstatt des Tones D mit $\frac{27}{20}\eta$ Schwingungen einen anderen, d mit $\frac{4}{3}\eta$ Schwingungen setzt, der die genaue Quarte des Grundtones A ist. Dieses d ist $= \frac{80}{81} D$, mithin sehr wenig von D unterschieden.

Die Theorie verlangt also zum vollständigen Wohlklang der *C*-Dur- und *A*-Moll-Tonleiter und der darin enthaltenen Dreiklänge sehr nahe aneinanderliegende Töne *D* und *d*, ein Fall, der sich auch bei anderen Anlässen öfter wiederholt. Nebst diesen 6 Dreiklängen ist auch in der Musik von Wichtigkeit der Septimenakkord, der aus Grundton, der großen Terz, Quinte und Septime zusammengesetzt ist:

$$\begin{array}{cccc} C & E & G & Ais \\ \zeta & \frac{5}{4}\zeta & \frac{3}{2}\zeta & \frac{7}{4}\zeta. \end{array}$$

Die Schwingungszahlen dieser Töne stehen in dem einfachen Verhältnisse 4, 5, 6, 7. Dieser vierstimmige Akkord hat die besondere Eigenschaft, daß nach ihm der Dreiklang *FAC* besonders gut klingt, so daß er denselben vorzubereiten, zu verlangen, gewissermaßen dazu zu leiten scheint, und namentlich ist es die Septime, die ihm diesen Charakter verleiht, die daher auch der harmonische *Leitton* heißt, oder mindestens heißen sollte.

Der Septimenakkord scheint eine neue Entdeckung zu sein. Im Altertume unbekannt, kommt er auch in der Kirchenmusik Palestrinas noch nicht vor. In der neueren Musik findet er sich entschieden häufiger, als irgend ein anderer. Nur wird in demselben die reine Septime *Ais* durch einen anderen, wesentlich verschiedenen Ton *B* ersetzt, wodurch er einen schärferen Klang bekommt, dabei aber seinen oberwähnten Charakter nicht wesentlich verändert.

Es kommen in der Musik sehr viele verschiedene Akkorde vor; die hier zur Sprache gebrachten drei, nämlich der Dur-Dreiklang, der Moll-Dreiklang und der reine Septimenakkord, deren Töne beziehentlich in den Verhältnissen 4, 5, 6, dann 10, 12, 15 und endlich 4, 5, 6, 7 stehen, sind die einzigen vorzugsweise wohlklingenden, welche man mit dem Namen *konsonante Akkorde* belegt; die übrigen sogenannten *dissonanten Akkorde* sollen an einem anderen Orte zur Sprache gebracht werden.

Nicht nur in Akkorden, sondern auch nacheinander erklingend, erregen die Töne der zwei in Rede stehenden Tonleitern eine angenehme Empfindung, und es gibt eine große Mannigfaltigkeit von Gesängen, die vorzugsweise aus den Tönen derselben zusammengesetzt sind, und die man auch durch Begleitung mit den eben angeführten Akkorden verschönert. Man sagt von ihnen, daß sie je nach ihrem Charakter, ob heiter oder düster, und je nachdem die Begleitung mit Dur- oder mit Moll-Akkorden vorzugsweise stattfindet, aus *C*-Dur oder *A*-Moll gedichtet seien.

Anstatt des Grundtones *C* kann man auch einen jeden beliebigen anderen wählen und auf demselben eine Tonleiter gründen, gleichviel ob er in der *C*-Dur-Skala enthalten ist oder nicht. Man hat nur die gegebene Schwingungszahl dieses neuen Grundtones anstatt ζ in die Reihe (2) einzusetzen, um die Schwingungszahlen der neuen Tonleiter zu erhalten. Es sei z. B. *D* der neue Grundton mit der Schwingungszahl $\frac{9}{8}\zeta$, so erhält man, $\frac{9}{8}\zeta$ statt ζ setzend, die neue *D*-Tonleiter

$$\begin{array}{cccccccc} D & e & Fis & G & a & H & Cis & D \\ \frac{9}{8}\zeta & \frac{81}{64}\zeta & \frac{45}{32}\zeta & \frac{3}{2}\zeta & \frac{27}{16}\zeta & \frac{15}{8}\zeta & \frac{135}{64}\zeta & \frac{9}{4}\zeta. \end{array}$$

Vier Töne derselben, *D*, *G*, *H*, *D*, sind auch in der *C*-Skala enthalten, der zweite, mit der Schwingungszahl $\frac{81}{64}\zeta$ versehen, ist mit dem *E* der *C*-Tonleiter, welches die Zahl $\frac{5}{4}\zeta$ trägt, beinahe identisch. Nennt man ihn also *e*, so ist $\frac{e}{E} = \frac{81}{80}$. Ebenso ist der fünfte mit *a* bezeichnete beinahe das A der C-Skala, und es ist wieder $\frac{a}{A} = \frac{81}{80}$. Die beiden mit *Fis* und *Cis* bezeichneten Töne endlich sind von allen in der C-Tonleiter enthaltenen wesentlich verschieden und liegen beziehentlich zwischen F und G, und zwischen C und D, mit der gewissen Bedeutung eines erhöhten F und erhöhten C.

Ähnliche Bewandtnis hat es nun mit allen von verschiedenen Grundtönen ausgehenden Tonleitern. Sie bestehen teils aus Tönen, die auch schon in anderen Tonleitern vorrätig sind, mitunter aus wesentlich verschiedenen, aber oft auch aus solchen, die von den Tönen anderer Skalen nur sehr wenig abweichen. Diese letzteren bilden nun ein sehr lästiges Tonproletariat, welches, wenn zugelassen, in der musikalischen Praxis sowohl wie auch in der Theorie störend auftritt, indem es bei einigen Instrumenten eine Unzahl beinahe gleichklingender Saiten, bei andern eine Unzahl von Bünden verlangt, die beinahe an dieselben Stellen des Griffbrettes fallen usw., und was das schlimmste ist, eine Unzahl von Tonnamen und -zeichen erheischt, welche die Elemente der Tonschrift in eine Art chinesischen, unübersehbaren Alphabets verwandeln würden. Es ist daher immer für wichtig erachtet worden, diese beinahe gleichlautenden Töne zu beseitigen.

Zu diesem Zwecke ist das nächstliegende, zuerst sich darbietende Verfahren folgendes: In der C-Leiter kommt der Ton A als große Terz von F vor mit der Schwingungszahl $\frac{5}{3}\zeta$. In der D-Leiter erscheint ein ähnlicher a als Quinte von D mit der Schwingungszahl $\frac{27}{16}\zeta$, die von $\frac{5}{3}\zeta$ nur um $\frac{1}{48}\zeta$ abweicht. Beide schafft man ab, und ersetzt sie durch einen einzigen Ton A' mit der Schwingungszahl $\frac{161}{96}\zeta$, die zwischen $\frac{27}{16}\zeta$, und $\frac{5}{3}\zeta$ liegt und von jeder dieser beiden Zahlen nur mehr um $\frac{1}{96}\zeta$ verschieden ist.

Dieses Verfälschen der Töne nennt man in der Kunstsprache *temperieren*, und es ist nunmehr A' sowohl die verfälschte oder temperierte Terz von F, wie auch die temperierte Quinte von D. Und es heißt diejenige von der Einheit nur sehr wenig abweichende Zahl, mit welcher man die reine Terz, Quinte, Septime usw. multiplizieren muß, um die temperierte Terz, Quinte, Septime usw. zu erhalten, *die Temperatur* dieser reinen Terz, Quinte, Septime usw. So ist im gegenwärtigen Beispiele $\frac{161}{160}$ die Temperatur der Terz A von F, und $\frac{161}{162}$ die Temperatur der Quinte a von D.

Die Notwendigkeit des Temperierens wiederholt sich sehr oft; denn die Musik benötigt die Töne mehrerer Tonleitern teils um der Höhe der menschlichen Stimme, die sie zu begleiten hat, gerecht zu werden, hauptsächlich aber, weil sie durch den Übergang zu den Akkorden anderer Tonleitern ihre schönsten und überraschendsten Wirkungen erzielt. Jede neue Tonleiter erheischt aber in der Regel auch neue Töne, die mitunter von den Tönen bereits vorhandener und im Gebrauche stehender Tonleitern sehr wenig abweichen und deshalb nicht durch einen besonderen Aufwand von Klangmitteln, z. B. Saiten, Bünde usw. erzeugt, sondern lediglich durch Temperieren hergestellt werden. Nur geschieht dasselbe nicht in der hier auseinandergesetzten, etwas primitiven Weise, weil es meistenteils auch nicht 2 Töne sind, die einen gemeinschaftlichen Repräsentanten erhalten, sondern mehrere. Es spielt dieser Repräsentant einem dieser Töne gegenüber die Rolle einer temperierten kleinen Terz, zum dritten stellt er eine temperierte Quinte, zum vierten eine Septime dar.

Hierbei ist es nun freilich unerläßlich, daß ein jedes der so temperierten Intervalle etwas von seiner Reinheit abgebe; jedoch soll dies in rationeller Weise so eingeleitet werden, daß der Gesamtbetrag der so gebrachten Opfer ein möglichst kleiner sei, das heißt, daß die Temperaturen der sämtlichen Reintöne möglichst wenig von der Einheit abweichen. Einen Ton, der von demjenigen Reintone, den er vorzustellen berufen ist, in merklicher, leicht hörbarer Weise abweicht, nennen die Musiker in ihrer Kunstsprache nicht mehr einen temperierten Ton, sondern einen *heulenden Wolf.*[1]) So wird z. B. ein Ton, dessen Temperatur $\frac{81}{80}$ ist, mithin um $\frac{1}{80}$ oder um noch mehr von der Einheit abweicht, bereits zu den heulenden Wölfen gezählt. Dieser Abstand von der Reinheit wird ein Komma genannt.

Hat man nun auf dem Wege des Temperierens die sehr nahe aneinander liegenden Töne beseitigt, so bleiben offenbar nur solche übrig, die sich in beträchtlichem Abstande von den Werten ihrer Schwingungszahlen befinden. Diese liegen aber vermöge der vorgenommenen Reduktion auf der ersten Oktave zwischen ζ und 2ζ, können somit

1) Diese Bezeichnung entspricht dem historisch-mathematischen (physikalischen) Standpunkte. Heute nennen die Musiker einen solchen Ton schlechtweg einen „falschen". Unter heulendem Wolf verstehen sie den einem Instrumente infolge eines Material- oder Konstruktionsfehlers zufällig anhaftenden unreinen Ton, wie z. B. bei der Orgel, wenn das Spielventil nicht ordentlich schließt, oder bei Blasinstrumenten, wenn sie noch nicht genügend warm geworden sind usw. Dieses ist der moderne physiologische (akustische) Standpunkt; den historisch-physikalischen hat man aufgegeben.

nicht anders als in beschränkter Anzahl vorhanden sein. Sie stellen sozusagen das Tonalphabet vor, und man nennt ihren Inbegriff ein *Tonsystem*.

II. Das 12-stufige, chromatische Tonsystem. Seine Eigenschaften.

Der Begriff des besten Tonsystems ist ein relativer, insofern verschiedene Tonliebhaber auch verschiedene Anforderungen an ein solches stellen werden, je nach dem Instrumente, das sie behandeln, je nach dem Zwecke, den sie verfolgen, und der entweder sein kann, praktische Musik zu machen oder theoretische Forschungen anzustellen, ferner je nachdem sie einer Notenschrift bedürfen oder nicht usw.

Die Allgemeinheit der mathematischen Untersuchung verlangt, daß wo möglich alle diese Anforderungen berücksichtigt werden. Man muß sich daher vor allem die Frage stellen: Welches sind die wünschenswerten Eigenschaften eines guten Tonsystems? Die Antwort darauf findet man am leichtesten, wenn man sich irgend ein Tonsystem, etwa das herrschende, als Beispiel vorlegt und untersucht. Hiedurch wird man nämlich mit einem Male in medias res versetzt, und lernt die Vorzüge kennen, die beizubehalten oder wenn möglich noch zu steigern wünschenswert sind, und die Mängel, welche man entweder ganz zu vermeiden oder wenigstens zu verringern streben wird.

Das gegenwärtig allgemein übliche, im Klavier verkörperte Tonsystem besteht aus nur 12 Tönen; sie sind der Reihe nach mit ihren Schwingungszahlen:

C	*Cis*	*D*	*Dis*	*E*	*F*	*Fis*	*G*	*Gis*	*A*	*B*	*H*	*C*
ζ	$\alpha\zeta$	$\alpha^2\zeta$	$\alpha^3\zeta$	$\alpha^4\zeta$	$\alpha^5\zeta$	$\alpha^6\zeta$	$\alpha^7\zeta$	$\alpha^8\zeta$	$\alpha^9\zeta$	$\alpha^{10}\zeta$	$\alpha^{11}\zeta$	$\alpha^{12}\zeta = 2\zeta$.

Mithin ist $\alpha^{12} = 2$, also $\alpha = \sqrt[12]{2} = 1{,}05946$.

Diese Zahlen stehen in einer geometrischen Progression, die auch ins Unendliche fortgesetzt werden kann, aber darum doch nur diejenigen Töne liefert, die in der ersten Gruppe von zwölfen enthalten sind, und zwar in derselben Ordnung; denn es ist $\alpha^{13}\zeta = \alpha^{12}\cdot\alpha\zeta = 2\alpha\zeta = Cis$, $\alpha^{14}\zeta = \alpha^{12}\cdot\alpha^2\zeta = 2\alpha^2\zeta = D$ usw., was also dieselben Töne in der zweiten Oktave gibt. Man kann sie sich in einen Kreis wie die 12 Ziffern eines Uhrzifferblattes angeordnet denken, und kann jetzt von jeder beliebigen unter ihnen anfangend sehen, daß auf dieselbe Weise, wie die zweite Gruppe aus der ersten gebildet wird, auch die dritte aus der zweiten, die vierte aus der dritten usw. und schließlich die erste aus der letzten hervorgeht.

Ähnlich wie diese 12 Bestandtöne bilden auch die Quinten einen in sich zurückkehrenden Kreis, der von einem beliebigen Tone als nulltem gezählt der siebente ist, nämlich die Quinte dieses nullten. Das gibt den Quintenzirkel:

C G D A E H Fis Cis Gis Dis B F C,

nach welchem offenbar dieselbe Reihe von Quinten abermals erscheint.

Auch die Terzen schließen sich zyklisch zusammen, es sind dies jedoch kleinere, aus nur einigen der 12 Töne gebildete Kreise. Die großen Terzen bilden deren 4, nämlich:

C	*E*	*Gis*	*C*
Cis	*F*	*A*	*Cis*
D	*Fis*	*B*	*D*
Dis	*G*	*H*	*Dis.*

Die kleinen Terzen ergeben hingegen deren 3, nämlich:

C	*Dis*	*Fis*	*A*	*C*
Cis	*E*	*G*	*B*	*Cis*
D	*F*	*Gis*	*H*	*D.*

Es gehen mithin 3 große und 4 kleine Terzen auf die Oktave.

Da zu jedem der 12 Töne die Quinte, die kleine und die große Terz unter eben den 12 Tönen gefunden wird, so kann man auch über jedem derselben als Grundton einen Dur- und einen Moll-Dreiklang konstruieren, und da aus je 3 solchen Dreiklängen eine Tonleiter gebildet werden kann, so ergeben sich aus nur 12 Tönen 12 vollständige Dur- und 12 vollständige Moll-Tonleitern, was unstreitig eine bedeutende Leistung mit wenigen Mitteln ist, die hauptsächlich durch den Umstand möglich wird, daß das Tonsystem ein in sich zurückkehrendes ist, und infolgedessen ein jeder Ton in allen möglichen Eigenschaften erscheint und Dienste leistet, einmal als Grundton, dann als Quinte eines anderen Grundtones, dann als große Terz eines dritten, ferner als kleine Terz eines vierten usw. Diese Eigenschaft des in sich Zurückkehrens ist also eine wünschenswerte, wenigstens insofern, als unter sonst ähnlichen Umständen das in sich zurückkehrende Tonsystem vor einem anderen den Vorzug verdient.

Eine in ähnlicher Weise schätzbare Eigenschaft ist das Fortschreiten der Töne in geometrischer Progression. Sie werden dadurch im musikalischen Sinne, das heißt nach dem Urteile eines geübten Gehörs, äquidistant, und das aus solchen äquidistanten Tönen zusammengesetzte Tonsystem bietet vor einem anderen ähnliche Vorteile, wie ein in gleiche Teile eingeteilter Maßstab vor einem anderen mit ungleicher Teilung. Es erhalten alle gleichnamigen Intervalle einerlei Wert, alle Quinten, großen und kleinen Terzen usw. werden gleich, d. h. entweder gleich rein, oder gleich temperiert, alle Akkorde, alle Tonleitern haben, abgesehen von der Tonhöhe, einerlei Klang und stellen eben darum im Grunde auch nur eine einzige Leiter vor, und ein jedes Tonstück klingt, in jeder beliebigen Tonart vorgetragen, gleich gut oder gleich übel.

Ob sich aber die reine Tonleiter, die doch offenbar im Tonsysteme möglichst getreu wiedergegeben sein sollte, mit der Einteilung in gleiche Teile überhaupt, und mit der 12-Teilung insbesondere vertrage, ist erst die Frage. Untersucht man, um hierüber vorläufigen Aufschluß zu erhalten, die reine Dur-Tonleiter (2), so gewahrt man in derselben mehrerlei Abstände nächster Nachbartöne voneinander. So stehen C und D und F und G, ebenso A und H im Verhältnis $\frac{9}{8}$ zueinander. Diesen Abstand nennt man einen *großen ganzen* Ton. In dieser Weise besteht zwischen D und E, desgleichen zwischen G und A das Verhältnis $\frac{10}{9}$ der Schwingungszahlen. Dieser Abstand wird ein *kleiner ganzer* Ton genannt. Zwischen E und F, ebenso zwischen H und C ist das Verhältnis $\frac{16}{15}$, was ein *großer Halbton* heißt. Beachtet man noch endlich die ebenfalls wichtige kleine Terz mit dem Schwingungsverhältnisse $\frac{6}{5}$ gegen die große Terz mit $\frac{5}{4}$, so stehen diese beiden Terzen im Abstande $\frac{25}{24}$, der ein *kleiner Halbton* heißt.

Die Oktave wäre mithin aus 3 großen ganzen, 2 kleinen ganzen und 2 großen Halbtönen zusammengesetzt. Das 12stufige Tonsystem hebt den Unterschied zwischen großen und kleinen Ganz- und Halbtönen auf und unterscheidet nur ganze und halbe Töne schlechtweg, läßt mithin die Oktave aus 6 ganzen oder 12 halben Tönen bestehen, was, als erste Annäherung betrachtet, auch ohne Widerrede mathematisch korrekt ist. Natürlich ist von diesen Tönen keiner rein, sondern es sind alle mehr oder minder temperiert. Um zu sehen in welchem Maße, berechnet man ihre Schwingungszahlen. Sie sind:

$$
(4)\qquad
\begin{array}{llll}
C & = \zeta & Fis & = \alpha^6\zeta = 1{,}41421\,\zeta \\
Cis & = \alpha\,\zeta = 1{,}05946\,\zeta & G & = \alpha^7\zeta = 1{,}49831\,\zeta \\
D & = \alpha^2\zeta = 1{,}12246\,\zeta & Gis & = \alpha^8\zeta = 1{,}58740\,\zeta \\
Dis & = \alpha^3\zeta = 1{,}18921\,\zeta & A & = \alpha^9\zeta = 1{,}68179\,\zeta \\
E & = \alpha^4\zeta = 1{,}25992\,\zeta & B & = \alpha^{10}\zeta = 1{,}78180\,\zeta \\
F & = \alpha^5\zeta = 1{,}33484\,\zeta & H & = \alpha^{11}\zeta = 1{,}88775\,\zeta.
\end{array}
$$

Es sei nun die Temperatur der Quinte, das heißt diejenige der Einheit nahe Zahl, mit welcher die Schwingungszahl der reinen Quinte $\frac{3}{2}\zeta$ multipliziert werden muß, um die Schwingungszahl der temperierten Quinte des Systems zu erhalten, q, so ist:

$$\frac{3}{2} q = 1{,}49831, \text{ mithin } q = 1 - \frac{1}{886} = \frac{885}{886}.$$

Diese Temperatur q gilt für alle Quinten wegen der absoluten Gleichheit aller gleichnamigen Intervalle.

Nennt man ebenso die Temperatur der großen Terz T, so ist:

$$\frac{5}{4} T = 1{,}25992, \text{ mithin } T = 1 + \frac{1}{126} = \frac{127}{126}.$$

Die Temperatur der kleinen Terz sei mit t bezeichnet; es wird denn für alle kleinen Terzen des ganzen Systems:

$$\frac{6}{5} t = 1{,}18921, \text{ mithin } t = 1 - \frac{1}{111} = \frac{110}{111}.$$

Endlich sei die Temperatur der Septime, welche die reine Schwingungszahl $\frac{7}{4} \zeta = 1{,}75 \zeta$ besitzt, die nur mit der Schwingungszahl des Tones B im Verzeichnisse (4), nämlich $1{,}78180 \zeta$ vergleichbar ist, s, so wird:

$$\frac{7}{4} s = 1{,}78180, \text{ mithin } s = 1 + \frac{1}{55} = \frac{56}{55}.$$

Man sieht hier, daß im 12stufigen Tonsysteme die Quinten der Reinheit sehr nahe kommen, die Terzen sind zwar eben noch nicht heulende Wölfe, aber sehr nahe daran auf diese Benennung Anspruch machen zu dürfen. Die Septime endlich ist entschieden ein heulender Wolf, vorausgesetzt, daß man den Ton B wirklich als den Repräsentanten des sechsten Obertones von C mit der Schwingungszahl $\frac{7}{4} \zeta$ ansieht. Nach einer anderen Ansicht kommt man dem eigentlichen Sachverhalte aber am nächsten, wenn man annimmt, daß die reine Septime in dem 12stufigen Tonsysteme, welches auch das *chromatische* heißt, gar nicht vertreten sei, und daß dieser Ton B gar kein Repräsentant der reinen Septime mit der Schwingungszahl $\frac{7}{4} \zeta$ sei, sondern der eines anderen Reintones mit der einfachen Schwingungszahl $\frac{9}{5} \zeta$, der vermöge dieser Einfachheit ähnlich der kleinen Terz mit der Schwingungszahl $\frac{6}{5} \zeta$, so wie diese, eine selbständige Rolle in der Musik zu spielen berufen ist. Die Theorie wiederspricht indessen dieser Ansicht, indem sie dieses B des chromatischen Systems für den wirklichen Repräsentanten der reinen Septime erklärt und somit zu einem heulenden Wolfe macht. Das soll in der Folge gezeigt werden.

Alle diese, denselben Namen tragenden Intervalle sind auch gleich temperiert, was sich, wie man sagt, dadurch kennzeichnet, daß sie mit den ihnen entsprechenden Reintönen zugleich angeschlagen, gleichviel Schwebungen hören lassen. Darum nennt man dieses Tonsystem auch ein *gleichschwebend temperiertes.* Dies ist aber irrig; die Anzahl der Schwingungen ist vielmehr der Schwingungszahl, der Tonhöhe proportional, und wenn man daher das chromatische System oder irgend ein ähnliches gleichschwebend temperiert nennt, so ist dies nur in demselben Sinne richtig, in welchem man dasselbe *auch gleichstufig* nennen kann.

Es dient vielleicht zur Klarheit, besonders für diejenigen Leser, die mehr mathematisch als musikalisch gebildet sind und für welche diese Abhandlung vorzugsweise verfaßt ist, zu bemerken, daß der Begriff von Intervall und Stufe ein anderer ist in der Musik als in der Geometrie. Sind nämlich M und M' Punkte einer geraden Linie, x und x' ihre Koordinaten, so ist bekanntlich $x' - x$ das zwischen ihnen vorhandene geometrische Intervall. Sind hingegen x' und x Schwingungszahlen zweier Töne statt Koordinaten, so ist das musikalische Intervall zwischen diesen Tönen $\frac{x'}{x}$. Im ersteren Sinne sind also Punkte, denen Koordinaten x_0, x_1, x_2, x_3, ... entsprechen, äquidistant, wenn $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 \ldots$ besteht, d. h. wenn diese Koordinaten eine arithmetische Progression bilden; in der Musik hingegen sind Töne mit diesen Schwingungszahlen äquidistant, wenn $\frac{x_1}{x_0} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} \cdots$ ist, d. h. wenn diese Schwingungszahlen in geometrischer Progression stehen.

Nennt man hiemit im Zusammenhange x die Schwingungszahl eines Tones in einem temperierten Tonsysteme und n die Anzahl der Schwebungen in der Sekunde, die derselbe mit dem Reintone macht, den er darzustellen berufen ist, so ist das System ein gleichschwebend temperiertes, wenn nicht n, wohl aber $\frac{n}{x}$ eine konstante Größe ist, die nur für verschieden benannte Intervalle: Terz, Quinte, Septime, ... andere und andere Werte anzunehmen vermag.

Gegenüber den Vorteilen des 12stufigen Tonsystems sind indessen auch Schattenseiten desselben zu verzeichnen, sogar solche, daß Petzval nicht anstand, dieses heute allgemein verbreitete System keineswegs als das beste zu erklären, nicht etwa in der Absicht, dieses durch ein vollkommeneres zu ersetzen, was er für ein ganz aussichtsloses Beginnen hielt, sondern bloß um zu zeigen, daß die wissenschaftliche Untersuchung unabhängig von der allgemeinen Anschauung ihre eigenen

Wege gehen muß, und um für den Fall, als vielleicht dereinst doch durch mächtige und langandauernde Einflüsse eine zweckmäßige, allgemeine Reform der Musik möglich werden sollte, die Vorarbeiten zu liefern, welche die Art und den Umfang einer solchen Reform zu bestimmen haben.

Die Vereinfachung des Tonalphabets und Zurückführung desselben auf möglichst wenige, z. B. auf nur 12 Töne, wie im chromatischen Systeme, ist allerdings ein Vorteil; es kann aber in der Vereinfachung auch zu weit gegangen sein. Wenn man beispielsweise das Alphabet der deutschen Sprache dadurch vereinfachen wollte, daß man Buchstaben von ähnlichem Klange, wie b und p, d und t, f, v und w usw. je durch ein einziges Zeichen ersetzte, so wäre dies offenbar ein zu weit getriebenes Vereinfachungsbestreben, weil man dann nicht mehr imstande wäre, den richtigen Laut der Worte in der Schrift wiederzugeben. In ähnlicher Weise kann auch in der Vereinfachung des Tonalphabets durch Reduktion auf nur 12 Töne zu weit gegangen sein, wenn dadurch Tonmangel erzeugt ist, infolge dessen wichtige Intervalle und brauchbare Akkorde ausgeschlossen und gewisse musikalische Wirkungen und Feinheiten unerreichbar werden und wenn ferner der Wohllaut der Akkorde dadurch beeinträchtigt wird. Beides ist wirklich der Fall.

Wie bereits bemerkt worden ist, schließt das chromatische Tonsystem den sechsten Oberton des Grundtones, die reine Septime nämlich, die auf die erste Oktave reduziert das Schwingungsverhältnis $\frac{7}{4}$ hat, aus und ersetzt denselben im Dominant-Septimen-Akkord durch einen heulenden Wolf. Hiemit wird aber nicht nur das Intervall $\frac{7}{4}$, sondern werden alle Intervalle, die durch einfache Brüche von der Form $\frac{m}{n}$ ausgedrückt werden und wo entweder der Zähler oder der Nenner die Primzahl 7 ist, ausgeschlossen. In der Tat stehen die Schwingungszahlen der 4 Töne des Dominant-Septimen-Akkordes, z. B. *G*, *H*, *D*, *Eis* im Verhältnisse der Zahlen 4, 5, 6, 7. Fehlt mithin der vierte Ton *Eis*, so fehlt zu *G* das Intervall $\frac{7}{4}$, mithin auch seine Ergänzung zur Oktave: $\frac{8}{7}$, die mit $\frac{7}{4}$ multipliziert das Produkt 2 gibt. Da aber das System über jedem seiner Bestandtöne konstruiert ist, so fehlen die Intervalle $\frac{7}{4} \cdot \frac{8}{7}$ nicht nur zu *G*, sondern zu jedem anderen Tone im ganzen Systeme überhaupt. Zu *H* hat *Eis* das Schwingungsverhältnis $\frac{7}{5}$, dessen Ergänzung zur Oktave $\frac{10}{7}$ ist. Da *Eis* nicht vorhanden ist, so sind auch die Intervalle $\frac{7}{5} \cdot \frac{10}{7}$ im Systeme nicht vorhanden. Zu *D* endlich steht *Eis* im Schwingungsverhältnisse $\frac{7}{6}$, dessen Ergänzung $\frac{12}{7}$ ist. Mithin fehlen im chromatischen Systeme die Intervalle:

$$\overline{\frac{7}{4}\ \frac{8}{7}}\quad \overline{\frac{7}{5}\ \frac{10}{7}}\quad \overline{\frac{7}{6}\ \frac{12}{7}}.$$

Nun ist aber erfahrungsmäßig eine Tonverbindung dem Gehöre desto faßlicher, in je einfacheren Zahlenverhältnissen ihre Bestandtöne stehen, weshalb die durch sehr einfache Brüche $\frac{m}{n}$ ausgedrückten Intervalle in der Musik die meiste Wichtigkeit haben. Die wichtigsten sind:

$$\overline{1\ 2},\quad \overline{\frac{3}{2}\ \frac{4}{3}},\quad \overline{\frac{5}{4}\ \frac{8}{5}},\quad \overline{\frac{6}{5}\ \frac{5}{3}},$$

paarweise so zusammengestellt, wie sie sich zur Oktave ergänzen. Nach ihnen folgen sogleich die obigen im chromatischen Systeme nicht vertretenen. Und es geht daraus hervor, daß ein jedes andere Tonsystem, in welchem auch die reine Septime Platz findet, bloß durch die Anwesenheit dieses einen Tones das chromatische Tonsystem in der Anzahl brauchbarer Intervalle im Verhältnisse 4 : 7 überbieten wird.

Diese oder ähnliche Betrachtungen waren es vermutlich, die den berühmten Kontrapunktisten Joh. Philipp Kirnberger und vielleicht auch seinen großen Lehrmeister Sebastian Bach veranlaßten, diesem wichtigen Tone die verdiente Aufmerksamkeit zu schenken. Ersterer suchte ihn in das Tonsystem unter dem Namen *J* einzuführen, zeigte seine Verwendung in einigen von ihm komponierten Musikstücken und stellte zu Berlin ein Orgelregister mit dieser *J* benannten reinen Septime auf, welches aber, nachdem die auf Kirnberger folgenden Organisten nichts damit anzufangen wußten, später wieder beseitigt worden ist. Fasch, ein Schüler Kirnbergers, erneuerte die Bestrebungen seines Lehrers, diesen Ton der Musik zu erhalten, mit demselben geringen Erfolge. Das Urteil der musikalischen Zeitgenossen Faschs und Kirnbergers war über dieses Intervall ungefähr auf folgende zwei Punkte zurückzuführen: a) das Intervall $\frac{7}{4}$ ist ein von Kirnberger neu erfundenes, ein Ton, der Vorzeit unbekannt; b) ist aber nichts anderes als eine temperierte Septime, d. h. ein temperierter heulender Wolf. Dieses Urteil hält nicht Stich, denn es kann dagegen folgendes bemerkt werden. Zu a): Das Intervall $\frac{7}{4}$ ist zwar weder auf den Tasten des

Klaviers, noch auf den in Bünde geteilten Griffbrettern anderer Saiteninstrumente, noch auch in der musikalischen Notenschrift vorhanden; denn wäre es wirklich da, so hätte ja Kirnberger es nicht unter der Bezeichnung J einzuführen gebraucht. Es klingt aber als Oberton mit einer jeden angeschlagenen Saite im allgemeinen mit und kann als Klangbestandteil durch einen Helmholtzschen Resonator nachgewiesen werden. Auch isoliert als Flageolett-Ton ist es jedem Musiker bekannt und wird erhalten, wenn man eine Saite im siebenten Teile der Länge leise mit dem Finger berührt und dann anschlägt. Ja man kann sich auf diese Weise den ganzen reinen Septimen-Akkord vollkommen frei von jeder Temperatur oder Verfälschung vorführen, indem man eine Saite der Reihe nach im vierten, fünften, sechsten und siebenten Teile ihrer Länge berührt und anschlägt und kann bei dieser Gelegenheit mit sich eins werden, ob man die reine Septime für eine Konsonanz oder Dissonanz zu halten hat. Neu oder unbekannt waren daher alle diese Töne nicht, nur eines scheint den um die Theorie der Schwingungen gespannter Saiten wenig bekümmerten Musikern unbekannt gewesen zu sein, daß nämlich diese Töne im Verhältnisse 4, 5, 6, 7 ihrer Schwingungszahlen zueinander stehen. Zu b) kann bemerkt werden, daß dies den Begriff des Temperierens völlig umkehren hieße. Sonst ist nämlich der untemperierte oder unverfälschte Ton rein, der temperierte verfälscht; hier wären hingegen der untemperierte falsch und der temperierte rein. Das sind die Folgen des Gebrauches oder Mißbrauches sinnabschwächender, fremdsprachlicher Benennungen, anstatt der ehrlichen deutschen Ausdrücke! Sagte man schlicht und gerade: Verfälschen und nicht Temperieren, so wäre eine solche Begriffsverwirrung unmöglich. Es scheint also hier wieder einer der so häufig vorkommenden Fälle vorzuliegen, daß das Urteil eines einzigen gründlichen Denkers, wie Kirnbergers, richtiger ist, als das Gesamturteil aller seiner Zeitgenossen. Die reine Septime mit dem Schwingungsverhältnisse $\frac{7}{4}$ ist also und bleibt ein Ton von hoher Wichtigkeit in der Musik, und eine Theorie der Tonsysteme, die auf dieselbe keine Rücksicht nimmt, kann auch auf Allgemeinheit keinen Anspruch erheben. Es wird daher in dieser Abhandlung der Septime $\frac{7}{4}$ dieselbe Aufmerksamkeit geschenkt, wie den anerkannt konsonanten Intervallen und namentlich den beiden Terzen.

Nicht nur die durch einfache Brüche von der Form $\frac{m}{n}$ ausgedrückten Intervalle, in denen die Primzahl 7 vertreten ist, sind der Beachtung wert; auch die Primzahlen 11 und 13, mithin die Intervalle:

$$\overline{\frac{11}{6}\ \frac{12}{11}},\quad \overline{\frac{11}{7}\ \frac{14}{11}},\quad \overline{\frac{11}{8}\ \frac{16}{11}},\quad \overline{\frac{11}{9}\ \frac{18}{11}},\quad \overline{\frac{11}{10}\ \frac{20}{11}},$$

$$\overline{\frac{13}{7}\ \frac{14}{13}},\quad \overline{\frac{13}{8}\ \frac{16}{13}},\quad \overline{\frac{13}{9}\ \frac{18}{13}},\quad \overline{\frac{13}{10}\ \frac{20}{13}},\quad \overline{\frac{13}{11}\ \frac{22}{13}}$$

sind womöglich nicht ganz außer Acht zu lassen, und ein Tonsystem, das sie besitzt, wird wenigstens zu Studien über die Charakteristik der Akkorde, welche einfachen Zahlenreihen entsprechen, einigen Vorzug verdienen. Selbstverständlich kommt ihnen die Wichtigkeit, welche die Konsonanzen haben, nicht zu, diese wird sogar beinahe Null, wo die 7 nicht vertreten ist. Den genauen numerischen Wert der Wichtigkeit dieser Intervalle aber hier anzugeben ist schon deshalb unmöglich, weil gründliche Studien über die psychische Charakteristik der Intervalle, Akkorde und Tonarten bisher sehr vernachlässigt worden sind. Daher denn auch die moderne Musik nach **Petzvals** Ansicht über die Charaktere Dur und Moll, hart und weich damals noch nicht hinausgekommen war. Nur von **Koch** ist ihm eine Auswahl verschiedener 7- und mehrtöniger Tonleitern mit ihrer psychischen Charakteristik und naturgemäßen harmonischen Begleitung vorgelegen, die aber nicht veröffentlicht worden war. Käme es nun, meinte er, dereinst zur Geltung, was dieser scharfsinnige und vielerfahrene Tonforscher findet, z. B. die folgende über dem Grundtone *as* aufgebaute Tonleiter, welche die unten angesetzten Schwingungszahlen hat und in angemessener Begleitung im echten Stile einer würdigen Kirchenmusik gehalten ist:

as	*ais*	*ces*	*des*	*es*	*eis*	*ges*	*as*
ζ	$\frac{12}{11}\zeta$	$\frac{6}{5}\zeta$	$\frac{4}{3}\zeta$	$\frac{3}{2}\zeta$	$\frac{18}{11}\zeta$	$\frac{9}{5}\zeta$	2ζ,

so gewänne die Primzahl 11 in der Musik eine vorher nie geahnte Geltung.

In ähnlicher Weise vermöchten aber vielleicht auch andere einfache Intervalle sich Geltung zu erringen. Deren besitzt nun aber das chromatische Tonsystem nur wenige. Man bekommt eine Übersicht über dieselben, wenn man die Dezimalbrüche in den Schwingungszahlen des Verzeichnisses (4) in Kettenbrüche und diese in einfache Näherungsbrüche verwandelt; dies gibt:

C	*Cis*	*D*	*Dis*	*E*	*F*	*Fis*	*G*	*Gis*	*A*	*B*	*H*	*C*
ζ	$\frac{18}{17}\zeta$	$\frac{9}{8}\zeta$	$\frac{44}{37}\zeta$	$\frac{63}{50}\zeta$	$\frac{4}{3}\zeta$	$\frac{58}{41}\zeta$	$\frac{3}{2}\zeta$	$\frac{100}{63}\zeta$	$\frac{37}{22}\zeta$	$\frac{16}{9}\zeta$	$\frac{17}{9}\zeta$	2ζ,

eine Reihe, in der man die oben angeführten einfachen und wichtigsten Intervalle nur spärlich vertreten sieht. Es ist also nicht unbegründet, wenn man sagt, daß das chromatische System an Tonmangel leide.

Diese Betrachtungen hatte indessen Petzval nicht dazu angestellt, um den Mangel zu beweisen, der sich in einem nur 12stufigen Systeme von selbst versteht, sondern zu dem Zwecke, um mit Klarheit darzutun, was unter Tonmangel und Tonreichtum zu verstehen ist, wie es Systeme geben kann, die bei einer großen Anzahl von Tönen dennoch an Tonmangel leiden, endlich wie man diese in Rücksicht auf Tonreichtum oder -mangel zu beurteilen habe.

Daß im chromatischen Tonsysteme der Wohlklang der Akkorde durch die übertemperierten und auch wirklich übel klingenden Terzen beeinträchtigt sei, wird wohl ziemlich allgemein von den Musikern zugestanden, jedoch in einer Weise, die zu einem gründlichen Urteile über dasselbe System in dieser Beziehung keinen genügenden Anhalt gewährt. Sie sagen nämlich gewöhnlich: „Die Quinten wären schon gut und rein genug, wenn nur die Terzen reiner wären!“ Hierauf kann man erwidern: Wenn die Quinten nur eben rein genug sind und nichts weiter, so müssen die Terzen auch gut genug sein, denn im Tonreiche gilt dasselbe, was anderwärts als Regel feststeht, nämlich, man kann niemand etwas geben, was man nicht einem anderen wegnimmt. Haben daher die Quinten an Reinheit nur eben genug und kann man ihnen nichts nehmen, so kann man auch den Terzen nichts geben. Andererseits könne man auf eine Tatsache hinweisen, die beinahe zu beweisen scheint, daß das Urteil der Musiker keineswegs das Urteil des Volkes sei, nämlich auf die, daß oft in Konzerten nach einem in möglichst reinen Tönen ausgeführten Streichquartette sich ein Klavierspieler hören läßt mit seinen falschen Terzen und heulenden Septimen, dem aber gleichwohl vom versammelten Publikum wütend applaudiert wird. Hieraus scheine beinahe hervorzugehen, daß die chromatischen Terzen nur dem verfeinerten Gehör der Musiker von Fach übel klingen, für das übrige Menschengeschlecht jedoch rein und wohlklingend genug seien, wenn man nicht etwa annehmen will, daß der Applaus gar nicht der Musik gelte, sondern nur der brillanten Technik des Virtuosen. Wiewohl nun übrigens inbezug auf Wohlklang und Übelklang niemand anderer, als eben der Musiker urteilsfähig ist, so hat doch sein Urteil hier nur dann wissenschaftlichen Wert, wenn es auf der genauen Kenntnis der Charakteristik der konsonanten Intervalle und der Gewichte ihrer Verfälschungen gegründet ist, und wenn er infolge dieser Kenntnis imstande ist, seine Angaben in wenigstens sehr angenäherten Zahlenwerten zu machen. Es kommt also, wenn auch nicht alles, doch mindestens sehr viel auf die genaue numerische Kenntnis der Empfindlichkeit der Konsonanzen an, ohne sie kann man weder über ein vorgelegtes Tonsystem ein endgültiges Urteil fällen, noch auch die Berechtigung der zahlreichen, der ersten Klasse angehörigen Systeme dieser Art, mit denen sich diese Abhandlung beschäftigt, über jeden Zweifel erheben. In der Tat, wenn sich nachweisen ließe, daß die Quinte keine größere Verfälschung verträgt, als $\frac{1}{886}$, wie im chromatischen Systeme, so wären alle Tonsysteme der ersten Klasse unbrauchbar, weil in ihnen allen die Quinte stärker belastet ist. Und hiemit wäre dann natürlich auch die Berechtigung dieser Abhandlung teilweise aufgehoben. Die ältere Musikliteratur bietet nun über diesen wichtigen Punkt wenig Brauchbares; in der neueren Zeit sind jedoch dankenswerte Bestrebungen aufzuzeichnen, die hiezu als Vorarbeiten gelten können. Man hat nämlich versucht, die Abstufungen der Intervalle in Reinheit festzustellen. Helmholtz hat diese sogar durch eine Kurve bildlich dargestellt. Das jedoch, was man in der Theorie der Tonsysteme braucht, ist nicht diese Kurve, weil hier wenig darauf ankommt, ob eine Dissonanz etwas mehr oder weniger dissoniert, sondern es sind dies die möglichst genauen Werte der Krümmungshalbmesser an den Scheitelpunkten, oder was dasselbe ist, die zweiten Differentialquotienten der Ordinaten, und um beurteilen zu können, ob positive und gleich große negative Verfälschungen auch gleich unangenehm wahrgenommen werden, auch noch allenfalls die dritten. Nicht aus einer gewissen Analogie mit einem im widerstehenden Mittel schwingenden Punkte, von welcher leicht zu beweisen ist, daß sie nicht besteht, sind diese fundamentalen Kenntnisse zu ziehen, wie Helmholtz getan, sondern aus einer gründlichen, auf sorgfältig angestellte Beobachtungen gestützten Theorie.

Es ist nicht zu bezweifeln, daß die rastlos fortschreitende Akustik mit der Zeit auch diese Daten mit zureichender Genauigkeit liefern wird.

Durch die bisherigen Auseinandersetzungen erfährt der Begriff eines Tonsystems eine Erweiterung; man sieht nämlich, daß nicht nur Tonsysteme von der Art des hier als Beispiel gewählten chromatischen, in welchem sämtliche gleichnamige Intervalle einerlei Wert besitzen, sondern daß auch andere mit verschieden temperierten Quinten und Terzen in Anwendung gekommen sind. Sie heißen in der musikalischen Sprache *ungleich temperierte Tonsysteme.* Sie werden aufgestellt zu dem doppelten Zwecke: Um einigen Tonarten einen vollkommeneren Wohllaut zu verschaffen und den anderen einen verschiedenen psychischen Charakter zu verleihen. Berühmte Musiker, wie Kirnberger und

Malcolm, ebenso Euler und Györy sind auf dem äußerst mühsamen Wege des arithmetischen Versuches zu solchen Tonsystemen gelangt. In allen sind einige wenige Tonarten wohllautend, die übrigen desto übelklingender; eine reine Septime ist nirgends zu finden.

Allgemeineren Anklang fanden jedoch diese Versuche nicht. Dies hindert übrigens nicht, daß sie die Aufmerksamkeit des Arithmetikers für sich in Anspruch nehmen, schon weil die ungleich schwebend temperierten Tonsysteme die allgemeine Form, die gleichschwebend temperierten nur der besondere Fall sind, sich also mit den ersten mehr Zwecke und diese zugleich genauer erreichen lassen müssen, als mit den letzteren.

Solange man also die Theorie der Tonsysteme als ein arithmetisches Problem behandelt, wird man immerhin, um wissenschaftlich zu Werke zu gehen, die Tonsysteme einteilen können, ja sogar müssen, in gleichschwebend und ungleichschwebend temperierte. In den einen besitzen sämtliche gleichnamigen Intervalle: Quinten, Terzen, Septimen usw. einerlei Wert, in den anderen sind diese Werte von Tonart zu Tonart verschieden. Um dem in allen mathematischen Wissenschaften notwendigen Streben erst nach Einfachheit, dann aber nach Allgemeinheit gerecht zu werden, sind zuerst die gleichschwebend temperierten Tonsysteme in Angriff zu nehmen. Dann kann man aber zu den ungleichschwebend temperierten übergehen, wenn auch nur um das vorgelegte arithmetische Problem zur allgemeinen Lösung zu bringen, ohne Rücksicht darauf, ob sie die Musik als brauchbar anerkennt oder nicht.

Aus dem bisher Gesagten geht nun wohl genügend hervor, sowohl was man ein Tonsystem nennt, wie auch welches die allgemeinen Forderungen sind, welche man an ein solches zu stellen bisher für gut befunden hat. Man wird sagen: Ein Tonsystem ist eine geschlossene und in sich zurückkehrende Tonperiode, deren Bestandtöne sowohl ihrer Zahl nach, wie auch vermöge ihrer Schwingungsverhältnisse sich geeignet erweisen, um damit gute Musik zu machen. Unter guter Musik versteht man aber nicht nur wohlklingende Musik, sondern auch die unbeschadet ihres Wohlklanges oder vielleicht auch ohne Rücksicht auf denselben einen mannigfachen psychischen Charakter hat. Der Tonsetzer will nämlich mit der Gewalt der Töne das Gemüt des Menschen beherrschen und will ihn nach seinem Belieben in eine lustige, traurige, andächtige, kriegerische usw. Stimmung versetzen. Das Tonsystem darf daher nicht zu wenig Töne enthalten, weil daraus Tonarmut entsteht, zufolge welcher die musikalischen Wirkungen nicht mehr erzielt werden können, es darf aber auch nicht zu viele Töne zählen, weil die Verschwendung der Tonmittel zu anderen schweren Übelständen führt. Ferner ist es nicht notwendig, daß die Töne, aus welchen das Tonsystem besteht, *reine* Töne seien, sie können vielmehr alle *temperiert*, das heißt verfälscht sein, jedoch nur um einen so geringen Bruchteil ihrer Schwingungszahl, daß die Verfälschung von dem menschlichen Gehör unter den Umständen, unter welchen man Musik zu machen pflegt, nicht mehr, wenigstens nicht mehr mißklingend wahrgenommen werden kann, also zum Beispiel um weniger als $\frac{1}{240}$ der Schwingungszahl.

Warum Petzval gerade diese Zahl $\frac{1}{240}$ gewählt hat, bedarf einer Erläuterung. Er behauptete, eine Verfälschung von $\frac{1}{240}$ der Schwingungszahl sei selbst bei den empfindlichsten Intervallen, die Oktave nicht ausgenommen, auch durch das feinste musikalische Gehör unter solchen Umständen, unter welchen man Musik zu machen pflegt, nicht mehr wahrzunehmen. Nur im Unisono ist auch eine noch geringere Abweichung von der Reinheit unschwer zu entdecken. Er beweist dies durch folgende Betrachtung.

Es kann allen Musikern unwiderleglich nachgewiesen werden, daß nicht nur sie, sondern auch alle ihre Vorgänger falsche Intervalle, und zwar nicht nur falsche Terzen und Quinten, denn dies würde sich von selbst verstehen, sondern auch falsche Oktaven, und zwar falsch um wenigstens $\frac{1}{240}$ bald im positiven, bald im negativen Sinne im eigenen und fremden Spiele geduldet haben, und zwar ohne Not, denn sie hätten ohne alle Mühe und Kosten diese falschen Töne auch vermeiden und durch reine Oktaven ersetzen können. Da sie dies aber nicht taten, bleibt nichts anderes übrig, als anzunehmen, daß sie diese falschen Töne gar nicht bemerkt haben. Daß wirklich eine Verfälschung von $\frac{1}{240}$ in der Musik ohne Not bis heute noch geduldet wird, zeigen alle Saiteninstrumente, welche in Bünde geteilte Griffbretter haben, wie Zithern, Guitaren, Lauten usw. Wird bei diesen Instrumenten eine Saite auf das Griffbrett niedergedrückt, so wird dadurch ihre Spannung etwas vergrößert, mithin der Ton erhöht. Bei dem gewöhnlich vorkommenden Abstande der Saiten vom Griffbrette beträgt diese Tonerhöhung etwa $\frac{1}{240}$ der Schwingungszahl oder auch Saitenlänge, kann aber auch bedeutend größer werden. Es scheint nun, daß bei der Verfertigung der ersten Instrumente dieser Art auf die eben besprochene Wirkung keine Rücksicht genommen worden ist, sie waren daher vermutlich nach der pythagoräischen Vorschrift so eingeteilt, daß der Oktavenbund genau in die Mitte der Saite, der Quintenbund genau auf $\frac{1}{3}$ ihrer Länge usw. fiel. Bei dieser Anordnung erhöhten sich die sämtlichen gegriffenen Töne um gleichviel, nämlich um $\frac{1}{240}$ der Schwingungszahl, oder nahe um $\frac{1}{30}$ eines ganzen Tones, waren mithin unter sich richtig und wohlklingend, und nur wenn eine leere Saite angeschlagen wurde, erwies sich der Ton gegen die gegriffenen um $\frac{1}{240}$ Schwingungszahl $= \frac{1}{30}$ Ton zu tief. Dieser Unterschied war aber zu klein, um anders bemerkt und verläßlich nachgewiesen werden zu können, als im Unisono, und wurde auch wirklich nur durch die mangelnde Übereinstimmung des Flageolett mit der gegriffenen Oktave entdeckt. Hier wäre nun ganz leicht zu helfen gewesen. Da nämlich die gegriffenen Töne alle untereinander harmonierten, und nur die wenigen der leeren Saiten zu tief waren, so hätte man offenbar die ersteren unangetastet lassen, die letzteren aber alle gleich viel, nämlich um $\frac{1}{30}$ Ton erhöhen sollen, was durch Verkürzung des ersten und letzten Bundes bei der Guitarre um $\frac{1}{10}$ Zoll (2,6 mm), bei der Zither um etwa die Hälfte dieses Betrages zu bewerkstelligen war. Aber auch das noch zu seiner Zeit im Gebrauch gestandene Verfahren der unrichtigen Einteilung war noch nicht aufgegeben worden, weil man den Fehler nicht erkannt hatte. Mithin wurde auch die Verfälschung von $\frac{1}{240}$ der Schwingungsdauer, die daraus entsprang, trotzdem sie oft vorkam, nie gehört; mithin ist eine solche Verfälschung selbst bei den empfindlichsten Intervallen, die Quinte und Oktave mit eingeschlossen, unter den Umständen, unter welchen man Musik zu machen pflegt, und bei den in Rede stehenden Saiteninstrumenten selbst vom geübten Ohre nicht wahrzunehmen — was zu beweisen war.

Damit wollte aber Petzval keineswegs sagen, eine Verfälschung von $\frac{1}{240}$ an der Oktave oder Quinte sei überhaupt durch das menschliche Ohr nicht wahrzunehmen. Im Gegenteile, Akustiker, Klavierstimmer, Orgelbauer usw. können selbst zehnmal kleinere Differenzen nicht nur entdecken, sondern auch messen. Dies geschieht jedoch durch Anwendung künstlicher Mittel und Herbeiführung von Umständen, unter welchen man Musik nicht zu machen pflegt. Der mit den feinsten Meßinstrumenten versehene Ingenieur, dem noch dazu die nötige Zeit zur Verfügung steht, kann seine Messungen mit viel größerer Genauigkeit vollbringen, als der bloß auf sein Augenmaß Angewiesene, dem noch überdies keine Zeit zur Beobachtung gegönnt ist. Dies ist hier beiläufig der Sachverhalt. Es besteht ein großer Unterschied zwischen sorgfältiger Tonmessung und oberflächlicher Tonschätzung, und wer Musik hört, kann nicht messen, sondern nur oberflächlich schätzen.

Kehren wir zum eigentlichen Gegenstande wieder zurück.

Wer also ein neues Tonsystem entweder bilden oder über ein solches ein gegründetes Urteil fällen will, der muß sich offenbar drei Fragen beantworten können: 1. welche Tongruppen oder Tonfolgen klingen gut, was klingt besser, was klingt am allerbesten und unter welchen Umständen ist der höchste Wohlklang zu erzielen? 2. wie groß ist die Empfindlichkeit der einzelnen Intervalle gegen Verfälschung? und 3. welche Tonverbindungen besitzen irgend einen angebbaren psychischen Charakter, und sprechen demzufolge eine dem Gehör leicht erfaßbare musikalische Sprache?

Was die zwei ersten Fragen anlangt, so wird man vermutlich meinen, daß die mehrere tausend Jahre alte Musik dieselben bereits längst wird beantwortet haben; man wird ferner vermuten, daß die letzte Frage die meisten Schwierigkeiten bietet, und deshalb entweder gar nicht oder bisher nur unvollständig erledigt sei. Man täuscht sich indessen hierin vollständig. Gerade über die dritte Frage wissen wir das meiste, denn wir besitzen einen wertvollen, von Euler aufgestellten allgemeinen Satz, der klar und bestimmt sagt, welche Intervalle und Tongruppen im allgemeinen einen angebbaren psychischen Charakter haben, während hinsichtlich der beiden ersten Fragen Petzval behauptete, daß man damals in musikalischen Kreisen noch immer nicht einig war über das, was wohl klingt, sowie auch über das, was empfindlich und empfindlicher ist gegen Verfälschung. Es schien ihm dies am besten aus den Antworten der Musiker hervorzugehen, die in der Regel etwa folgendermaßen lauteten:

„Die edelste und vollkommenste, d. h. wohlklingendste Konsonanz ist die Oktave. Sie ist darum auch so empfindlich, daß sie nicht die allergeringste Verfälschung vertragen kann und ganz untemperiert und vollkommen rein bleiben muß. Nach ihr ist die Quinte die edelste und vollkommenste Konsonanz; sie verträgt darum auch nur sehr geringe Verfälschungen und darf nur so wenig als möglich temperiert werden. Dann kommen die Terzen; sie sind vollkommene Konsonanzen und können und müssen auch temperiert werden bis zum Heulen. Die Septimen sind Dissonanzen, kommen mithin auch nur in dissonanten Akkorden vor.“

Petzval hat die Widersprüche, welche in diesen Ansichten liegen, eingehend widerlegt und hat auf die Fragen selbst die zutreffenden Antworten gegeben. Schon im Anfange ist hier eines höchst wichtigen Prinzipes der Harmonielehre Erwähnung geschehen, welches er das Prinzip der angenäherten Äquivalenz der Oktaven nennt, und welches er so formuliert hat: Jeder Ton bildet mit allen seinen höheren und tieferen Oktaven eine Reihe von Tönen, die nach dem Urteile des menschlichen Gehöres einander in hohem Grade ähnlich sind, dergestalt, daß man in einem jeden Tongebilde, z. B. Akkorde, einen von ihnen für den anderen setzen kann, ohne den Charakter dieses Tongebildes wesentlich zu ändern. Es werden deshalb auch alle diese Töne der ganzen Oktavreihe mit demselben Namen belegt und mit demselben Buchstaben bezeichnet. Die Richtigkeit dieses Satzes wird von allen Harmonielehrern ohne Unterschied anerkannt, wiewohl sie denselben nie so aussprechen, sondern gewöhnlich in andere Worte kleiden.

Petzval wollte diesen Satz vorderhand als Ergebnis der Erfahrung hingestellt wissen, und meinte, daß die Zeit vielleicht nicht mehr ferne sei, wo man ihn aus dem gründlich und erschöpfend bekannten Baue des menschlichen Ohres mit Hilfe der mathematischen Analysis ableiten wird.

Schon in seiner Theorie der Schwingungen gespannter Saiten[1]) hat Petzval den Satz aufgestellt, der hier brauchbar ist, nämlich: Wenn eine gespannte Saite durch die Schwingungen des Mittels, in welchem sie sich befindet, zum Schwingen angeregt wird, so schwingt sie alle ihr entsprechenden harmonischen Töne und ihre Oktaven auf dieselbe Weise, d. h. Ton und Oktave beide ohne Schwingungsknoten, oder mit derselben Anzahl von Schwingungsknoten, die sich an derselben Stelle befinden.

Da das Gehörorgan auch ein System in einem widerstehenden Mittel schwingender Saiten oder Fasern ist, oder sein soll, die durch die Schwingungen dieses Mittels selbst in Bewegung gesetzt werden, so ist nur noch übrig, zwischen den Identitäten der dynamischen Erscheinung und der sinnlichen Wahrnehmung einen Zusammenhang festzustellen. Damit wird dann das Prinzip der Äquivalenz der Oktaven eine Festigkeit gewinnen, die es den mathematisch bewiesenen Sätzen an die Seite stellt. Dieses Prinzip hat daher mehr für sich, als das übereinstimmende Zeugnis aller Musiker und Harmonielehrer, und der in der Kunst eingeführte Gebrauch.

1) Denkschriften der Akademie d. W. in Wien, 1859.

Aus ihm folgt unmittelbar, daß, wenn Quinte, große Terz und kleine Terz Konsonanzen sind, auch Quarte, kleine und große Sexte ähnliche Konsonanzen von beinahe demselben Grade und psychischen Charakter des Wohlklanges sein müssen.

Dies veranlaßte auch Petzval, die konsonanten Intervalle nicht in vollkommene und unvollkommene, sondern in Urintervalle und Kointervalle einzuteilen. Zu den Urintervallen zählt er die ersten Obertöne des Grundtones mit ihren Oktaven und die kleine Terz. Hier folgen sie mit ihren Schwingungszahlen:

Oktave		Quinte		große Terz		kleine Terz		Septime	
C	*c*	*C*	*G*	*C*	*E*	*C*	*Es*	*C*	*Ais*
ζ	2ζ	ζ	$\frac{3}{2}\zeta$	ζ	$\frac{5}{4}\zeta$	ζ	$\frac{6}{5}\zeta$	ζ	$\frac{7}{4}\zeta$.

Die zweite Gruppe bilden die Kointervalle, d. h. diejenigen, welche die Urintervalle zur Oktave ergänzen, d. h. welche man aus den Urintervallen erhält, indem man statt des Grundtones seine Oktave setzt. Sie heißen

	Einklang		Quarte		kleine Sexte		große Sexte		überm. Sekunde	
	c	*c*	*G*	*c*	*E*	*c*	*Es*	*c*	*Ais*	*c*
	2ζ	2ζ	$\frac{3}{2}\zeta$	2ζ	$\frac{5}{4}\zeta$	2ζ	$\frac{6}{5}\zeta$	2ζ	$\frac{7}{4}\zeta$	2ζ
oder	ζ	ζ	ζ	$\frac{4}{3}\zeta$	ζ	$\frac{8}{5}\zeta$	ζ	$\frac{5}{3}\zeta$	ζ	$\frac{8}{7}\zeta$.

Da sie alle aus den Urintervallen entstanden sind dadurch, daß man anstatt eines Bestandtones seine Oktave gesetzt hat, und da dies vermöge des Gesetzes der angenäherten Äquivalenz der Oktaven den Charakter der Tonverbindung nur unwesentlich zu ändern vermag, so ist die auf diesem Wege aus der Quinte hervorgegangene Quarte nahezu ebenso konsonant und vermutlich auch beinahe ebenso empfindlich gegen Verfälschung. Ebenso ist die aus der großen Terz abgeleitete kleine Sexte eine Konsonanz von ähnlichem Wohllaute und demselben psychischen Charakter, d. h. beide sind heitere oder Dur-Konsonanzen, und besitzen beinahe dieselbe Empfindlichkeit gegen Verfälschung. Die aus der kleinen Terz hervorgegangene große Sexte ist aber so wie diese eine Moll- oder schwermütige Konsonanz, und die übermäßige Sekunde hat in allen Stücken Ähnlichkeit mit der reinen Septime.

Nicht nur in einem reinen, sondern auch in einem temperierten Tonsysteme haben die Urintervalle mit den ihnen entsprechenden Kointervallen durchaus einerlei Eigenschaften, so zwar, daß sie auch einerlei Verfälschungen erleiden müssen. In der Tat, nennt man die

Temperaturen der Quinte, großen und kleinen Terz und Septime in einem solchen Tonsysteme der Reihe nach:

$$q = 1 + \varkappa, \quad T = 1 + \theta, \quad t = 1 + \tau, \quad s = 1 + \sigma,$$

unter $\varkappa$, θ, τ und σ sehr kleine Brüche verstanden, welche die Verfälschungen dieser Intervalle in Teilen der eigenen Schwingungszahl bezeichnen, so sind die Urintervalle mit ihren Schwingungszahlen:

Oktave		Quinte		große Terz		kleine Terz		Septime	
C	c	C	G	C	E	C	Es	C	Ais
ζ	2ζ	ζ	$\frac{3}{2}(1+\varkappa)\zeta$	ζ	$\frac{5}{4}(1+\theta)\zeta$	ζ	$\frac{6}{5}(1+\tau)\zeta$	ζ	$\frac{7}{4}(1+\sigma)\zeta$,

also ihre Verfälschungen beziehentlich:

$$\frac{3}{2}\varkappa\zeta \qquad \frac{5}{4}\theta\zeta \qquad \frac{6}{5}\tau\zeta \qquad \frac{7}{4}\sigma\zeta.$$

Die ihnen entsprechenden Kointervalle werden:

Einklang		Quarte		kleine Sexte		große Sexte		überm. Sekunde	
c	c	G	c	E	c	Es	c	Ais	c
2ζ	2ζ	$\frac{3}{2}(1+\varkappa)\zeta$	2ζ	$\frac{5}{4}(1+\theta)\zeta$	2ζ	$\frac{6}{5}(1+\tau)\zeta$	2ζ	$\frac{7}{4}(1+\sigma)\zeta$	2ζ

oder alles auf den Grundton ζ reduziert:

c	c	G	c	E	c	Es	c	Ais	c
ζ	ζ	ζ	$\frac{4}{3}\cdot\frac{\zeta}{(1+\varkappa)}$	ζ	$\frac{8}{5}\cdot\frac{\zeta}{(1+\theta)}$	ζ	$\frac{5}{3}\cdot\frac{\zeta}{(1+\tau)}$	ζ	$\frac{8}{7}\cdot\frac{\zeta}{(1+\sigma)}$.

Da $\varkappa$, θ, τ und σ sehr kleine Brüche sind, so wird man ihre Quadrate gegen die Einheit vernachlässigen, und die vorliegenden Verhältniszahlen schreiben können:

c	c	G	c	E	c	Es	c	Ais	c
ζ	ζ	ζ	$\frac{4}{3}\zeta(1-\varkappa)$	ζ	$\frac{8}{5}\zeta(1-\theta)$	ζ	$\frac{5}{3}\zeta(1-\tau)$	ζ	$\frac{8}{7}\zeta(1-\sigma)$

Die Verfälschungen dieser Intervalle sind hier beziehentlich:

$$-\frac{4}{3}\varkappa\zeta \qquad -\frac{8}{5}\theta\zeta \qquad -\frac{5}{3}\tau\zeta \qquad -\frac{8}{7}\sigma\zeta.$$

Sie sind also dieselben Bruchteile der betreffenden Schwingungszahlen, wie bei den entsprechenden Urintervallen, nur mit anderem Vorzeichen. Es ist hier vorausgesetzt, daß man die Oktaven untemperiert läßt. Würde man auch diese in einem gewissen Grade verfälschen, so wäre die Kongruenz zwischen den Urintervallen und Kointervallen aufgehoben, und es würden dann die ersteren andere Verfälschungen erleiden als die zweiten, was sich allenfalls durch eine verschiedene Empfindlichkeit dieser Intervalle motivieren ließe, die dem Prinzipe der Äquivalenz der Oktaven zu widersprechen schiene. Es scheint, daß man den Schluß auch umkehren und sagen könnte: Da in der Musik allgemein die Oktaven als unverletzlich angesehen werden, so besitzen alle Urintervalle mit den entsprechenden Kointervallen einerlei Empfindlichkeit gegen Verfälschung, während andernfalls das Temperieren der Oktaven rätlich erscheinen könnte. Hiemit wäre die Unverletzlichkeit der Oktaven viel ungezwungener begründet, als durch die Annahme einer unendlichen Empfindlichkeit, von deren Unmöglichkeit wir uns oben überzeugt haben.

Der wesentliche Nutzen dieser Betrachtungen besteht darin, daß man bei der Berechnung eines jeden Tonsystems nur die Urintervalle, nämlich Quinte, Großterz, Kleinterz und Septime ins Auge zu fassen hat; gelingt es, diese wohlklingend zu gestalten, so sind auch die ihnen entsprechenden Kointervalle, nämlich: Quarte, kleine Sexte, große Sexte und übermäßige Sekunde, in derselben guten Eigenschaft vorhanden. Nur bei der Oktave und dem ihr entsprechenden Kointervall, dem Einklange, stößt man auf eine ernste Schwierigkeit, einen unlösbaren logischen Widerspruch. Nach dem Prinzipe der Äquivalenz der Oktaven nämlich sollten Einklang und Oktave ganz einerlei psychischen Charakter tragen, indem der eine aus der anderen entsteht, dadurch, daß man den einen Bestandton des Intervalls durch seine Oktave ersetzt. Nun ist aber, wie oben nachgewiesen, der Einklang keine Konsonanz, sondern nur *Tonverstärkung*, mithin sollte nach dem Prinzipe der Äquivalenz der Oktaven auch die Oktave keine Konsonanz sein, sondern eine Tonverstärkung.

III. Bildung der Tonsysteme. Einteilung in zwei Klassen.

Bei der Bildung eines Tonsystems wird man am besten von einer bestimmten Tonreihe, womöglich von einer Reihe musikalisch äquidistanter Töne, ausgehen und aus ihr diejenigen Töne in systematischer Weise auswählen, die man zur musikalischen Praxis zu benötigen glaubt. Eine solche Reihe äquidistanter Töne wäre zwar auch die Reihe der Oktaven; diese ist aber unbrauchbar, weil sie nur einen einzigen Ton und kein Tonsystem vorstellt.

Es bietet sich zunächst die Quintenreihe dar, und in der Tat ist man zu allen Zeiten, durch einen glücklichen Instinkt geleitet, in der Musik von einer Reihe reiner Quinten ausgegangen. Da sich diese alte Gepflogenheit wissenschaftlich rechtfertigen läßt, so soll auch hier davon nicht abgegangen werden.

Diese unendliche Quintenreihe bildet man nach altem Brauche aus der folgenden siebentönigen fundamentalen Quintengruppe:

F, C, G, D, A, E, H,

indem man sie nach rechts und links auf folgende Weise fortsetzt:

1. Um sie nach rechts ins Unendliche fortzusetzen, fügt man, bei *F* anfangend und nach rechts fortschreitend, zu jedem Tone sowohl der Fundamentalgruppe, wie auch ihrer bereits niedergeschriebenen Fortsetzung die Endsilbe *is* zu. Man erhält so:

F, C, G, D, A, E, H, Fis, Cis, Gis, Dis, Ais, Eis, His, Fisis, Cisis, Gisis, Disis, Aisis . . .

2. Um die Fortsetzung derselben Reihe nach links ins Unendliche zu erhalten, fügt man zu jedem Tone der Fundamentalgruppe, bei *H* anfangend und nach links fortschreitend, die Endsilbe *es* zu, und schreibt den so erhaltenen Ton als Fortsetzung der Reihe an die linke Seite. Und dies tut man sowohl bei den Tönen der Fundamentalgruppe, als auch bei der bereits erhaltenen Fortsetzung, nur daß anstatt *Hes* nach einem alten Gebrauche der Buchstabe *B* gesetzt wird. Es ergibt sich so:

. . ., *Eses, Bes, Fes, Ces, Ges, Des, As, Es, B, F, C, G, D, A, E, H* . . .

Wiewohl hier von diesen alten, ziemlich einfachen musikalischen Benennungen auch Gebrauch gemacht werden soll, so ist doch für die vorliegenden Zwecke noch eine andere, der kombinatorisch-arithmetischen Betrachtung besser zusagende nötig, welche unmittelbar den Ort erkennen läßt, an dem sich ein Ton in der Reihe befindet. Es soll nämlich der Grundton mit der Schwingungszahl $\xi\, Q_0$ anstatt *C* heißen; seine Quinte *G* soll mit Q_1, die zweite Quinte *D* soll mit Q_2, und ebenso die dritte, vierte, fünfte . . . r^{te} Quinte mit $Q_3, Q_4, Q_5 \ldots Q_r$ bezeichnet werden. Die nach rückwärts fortgesetzte Reihe dieser Quinten ist die Quartenreihe

F, B, Es, As, Des, u. s. f.

Diese Töne sollen der Reihe nach mit

$Q_{-1}, Q_{-2}, Q_{-3}, Q_{-4}, \ldots Q_{-r}$ bezeichnet werden.

Sind dies nun reine Quinten und Quarten, so erhält man die Schwingungszahl einer beliebigen unter ihnen aus der zunächst vorangehenden durch Multiplikation mit $\frac{3}{2}$, somit aus der folgenden durch Multiplikation mit $\frac{2}{3}$. Mithin enthält folgende Formel die in Rede stehende Quintenreihe mit ihrer musikalischen und arithmetischen Nomenklatur und den entsprechenden Schwingungszahlen in 3 Zeilen:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\ldots Des, & As, & Es, & B, & F, & C, & G, & D, & A, & E, & H, & Fis\ldots \\
Q_{-5}, & Q_{-4}, & Q_{-3}, & Q_{-2}, & Q_{-1}, & Q_0, & Q_1, & Q_2, & Q_3, & Q_4, & Q_5, & Q_6,\cdots \\
\frac{2^5}{3^5}\zeta, & \frac{2^4}{3^4}\zeta, & \frac{2^3}{3^3}\zeta, & \frac{2^2}{3^2}\zeta, & \frac{2}{3}\zeta, & \zeta, & \frac{3}{2}\zeta, & \frac{3^2}{2^2}\zeta, & \frac{3^3}{2^3}\zeta, & \frac{3^4}{2^4}\zeta, & \frac{3^5}{2^5}\zeta, & \frac{3^6}{2^6}\zeta\cdots
\end{array}$$

Unter diesen Schwingungszahlen liegt nur eine zwischen ζ und 2ζ; allen anderen entsprechen Töne, die außerhalb des Grundtones $Q_0 = C = \zeta$ und seiner höheren ersten Oktave liegen. Da man es aber liebt, in dieser ersten Oktave den ganzen Tonreichtum beisammen vor Augen zu haben, so reduziert man die übrigen Schwingungszahlen auf die erste Oktave durch ein- oder mehrmalige Multiplikation oder Division durch 2, was, wie wir wissen, den Namen des Tones nicht ändert. Zum Beispiele: Q_2 hat die Schwingungszahl $\frac{3^2}{2^2}\zeta = \frac{9}{4}\zeta$, was größer ist als 2ζ; wir dividieren daher einmal durch die Zahl 2 und schreiben anstatt der der Schwingungszahl $\frac{3^2}{2^2}\zeta$ die andere $\frac{3^2}{2^3}\zeta = \frac{9}{8}\zeta$. Allgemein wird statt der Schwingungszahl irgend einer Quinte Q_r, welche gleich $\frac{3^r}{2^r}\zeta$ ist, behufs der Reduktion auf die erste Oktave $\frac{3^r}{2^\alpha}\zeta$ geschrieben, wobei $\alpha > r$ und so gewählt ist, daß $1 < \frac{3^r}{2^\alpha} < 2$ ausfällt.

Ähnliches gilt auch von der nach links fortgesetzten Quintenreihe; auch ihre Töne führt man auf die erste Oktave zurück durch ein- oder mehrmaliges Multiplizieren der Schwingungszahl mit 2. Demgemäß schreibt man bei Q_{-1} anstatt $\frac{2}{3}\zeta$ lieber die zwischen ζ und 2ζ liegende Zahl $\frac{2^2}{3}\zeta = \frac{4}{3}\zeta$, und ebenso bei den übrigen, so daß allgemein die dem Tone Q_{-r} angehörende Schwingungszahl $\frac{2^r}{3^r}\zeta$ in eine andere $\frac{2^\beta}{3^r}\zeta$ umgewandelt wird, wobei $\beta > r$ und so gewählt werden muß, daß $1 < \frac{2^\beta}{3^r} < 2$ wird.

Die in Rede stehende Reihe reiner und auf die Oktave zurückgeführten Quinten geht hiemit über in:

$$(5)\qquad \begin{array}{cccccccccc}
\cdots\cdots & Es, & B, & F, & C, & G, & D, & A, & \cdots\cdots \\
\cdots Q_{-r}\cdots & Q_{-3}, & Q_{-2}, & Q_{-1}, & Q_0, & Q_1, & Q_2, & Q_3, & \cdots Q_r\cdots \\
\cdots\frac{2^\beta}{3^r}\zeta\cdots & \frac{2^5}{3^3}\zeta, & \frac{2^4}{3^2}\zeta, & \frac{2^2}{3}\zeta, & \zeta, & \frac{3}{2}\zeta, & \frac{3^2}{2^3}\zeta, & \frac{3^3}{2^4}\zeta, & \cdots\frac{3^r}{2^\alpha}\zeta.
\end{array}$$

Diese Reihe der reinen Quinten ist es, auf welcher die hier angeführte musikalische Nomenklatur vorzugsweise beruht; und wenn in manchen Tonsystemen auch ein Ton mit einer anderen Schwingungszahl diesen musikalischen Namen, etwa A, E, usf. trägt, so wird stets angenommen, daß dies nicht der echte, reine Ton A, E . . . sei, sondern der temperierte. Hier sei auch bemerkt, daß die entwickelte Reihe reiner, auf die erste Oktave reduzierter Quinten gleichzeitig die auf die erste Oktave reduzierter Quarten darstellt, weil die Töne der aufsteigenden reinen Quinten der Reihe nach mit den Tönen der absteigenden reinen Quarten und umgekehrt, die absteigenden Quinten mit den aufsteigenden Quarten gleiche Benennung haben. So hat z. B. die r^{te} Quinte nach aufwärts genommen die Schwingungszahl $\frac{3^r}{2^r}$, die r^{te} Quarte nach abwärts die Schwingungszahl $\frac{3^r}{4^r}$; dividiert man die erste durch die zweite, so erhält man 2^r. Die beiden Töne liegen um r Oktaven auseinander, tragen also gleiche Benennung.

Weil diese Reihe der reinen Quinten für den Tonforscher von großer Wichtigkeit ist, hat Petzval die Quinten und Quarten für je 158 Töne, und zwar auf 6 Dezimalen berechnet, in Tabellen zusammengestellt. Diese sind indessen verloren gegangen. Da aber in der Abhandlung wiederholt darauf hingewiesen wird, war ihre Wiederherstellung notwendig.[1])

Die Tabellen A und B, die sich am Schlusse der Abhandlung befinden, enthalten also in der ersten Spalte die Quintenbezeichnung mit ihren Stellenzeigern, in der zweiten den arithmetischen Wert, in der dritten die Schwingungszahlen und in der vierten die musikalische Benennung. In der zweiten Spalte lassen die Exponenten der Zähler und Nenner zugleich erkennen, wie oft die Schwingungszahl des zugehörigen Tones behufs der Zurückführung auf die erste Oktave durch 2 dividiert oder damit multipliziert worden ist. Man hat nämlich bei den Quinten von dem Exponenten des Nenners jenen des Zählers, und bei den Quarten von dem Exponenten des Zählers jenen des Nenners abzuziehen. So haben z. B. bei der Zurückführung des Tones $Q_{26} = His^3$ $41 - 26 = 15$ Divisionen durch 2 stattgefunden; desgleichen hat der Ton $Q_{-24} = Es^4$ $39 - 24 = 15$ Multiplikationen mit 2 behufs Zurückführung auf die erste Oktave erfordert.

Bei der in der vierten Spalte vorkommenden musikalischen Nomenklatur hat der Raumersparnis wegen eine Bezeichnung mit Exponenten

1) Die Berechnung hat Herr Viktor Stadler in Wien nach den von Petzval hinterlassenen Angaben besorgt und sie zugleich auf 400 Töne ausgedehnt.

stattgefunden, wobei der angehängte Exponent andeutet, wie oft die Silbe *is* oder *es* in der Tonbestimmung vorkommt. So ist z. B. Fis^3 gleichbedeutend mit *Fisisis*, und Ces^4 gleichbedeutend mit *Cesceseses*.

Wiewohl es nun in der genannten Quintenreihe der Zahlen und Töne unendlich viele gibt, und wiewohl sie alle zwischen ζ und 2ζ fallen, das heißt im Bereiche einer Oktave eingegrenzt sind, so sind doch alle voneinander verschieden, und es können auch nicht zwei gleiche unter ihnen vorkommen.

Nimmt man nämlich an, es seien 2 gleiche Quinten, $\mathfrak{Q}_r = \mathfrak{Q}_{r+m}$ vorhanden, so wäre notwendig

$$\frac{3^r}{2^\alpha} = \frac{3^{r+m}}{2^\gamma}, \text{ mithin } 3^m = 2^{\gamma-\alpha}.$$

Folglich wäre eine durch 3 teilbare Zahl gleich einer durch 3 nicht teilbaren, was nicht sein kann.

Anders verhält sich die Sache, wenn man anstatt der reinen Quinten temperierte setzt; sind dies gleichschwebend temperierte, so werden sie aus den reinen (5) erhalten durch Multiplikation mit einer Potenz der allen gemeinsamen Temperatur q, deren Exponent gleich dem Stellenzeiger des Tones ist, d. h. die Reihe temperierter Quinten ist:

$$\begin{array}{cccccccccc} \cdots\ \mathfrak{Q}_{-r}, & \cdots\ \mathfrak{Q}_{-2}, & \mathfrak{Q}_{-1}, & \mathfrak{Q}_0, & \mathfrak{Q}_1, & \mathfrak{Q}_2, & \cdots\ \mathfrak{Q}_r, & \cdots\ \mathfrak{Q}_{r+m}, & \cdots \\ \frac{2^\beta}{3^r} q^{-r}\zeta, & \cdots\ \frac{2^4}{3^2} q^{-2}\zeta, & \frac{2^2}{3} q^{-1}\zeta, & \zeta, & \frac{3}{2} q\zeta, & \frac{3^2}{2^3} q^2\zeta, & \cdots\ \frac{3^r}{2^\alpha} q^r\zeta, & \cdots\ \frac{3^{r+m}}{2^\gamma} q^{r+m}\zeta, & \cdots \end{array} \tag{6}$$

Hier läßt sich durch schickliche Wahl des Faktors q die Gleichheit zweier Töne bewerkstelligen, denn man erhält $\mathfrak{Q}_r = \mathfrak{Q}_{r+m}$, wenn man q so wählt, daß

$$\frac{3^r}{2^\alpha} q^r = \frac{3^{r+m}}{2^\gamma} q^{r+m}, \text{ also } \frac{3^r}{2^\alpha} = \frac{3^{r+m}}{2^\gamma} q^m \tag{7}$$

wird.

Wiewohl dies von allen Tönen gesagt werden kann, so ist doch nicht außer Acht zu lassen, daß q nur dann eine wirkliche Temperatur bedeutet, wenn es wenig von der Einheit verschieden ist; mithin darf auch q^m nur wenig von der Einheit abweichen, und müssen die Zahlen $\frac{3^r}{2^\alpha}$ und $\frac{3^{r+m}}{2^\gamma}$ nahezu einander gleich, also auch die reinen Quinten $\mathfrak{Q}_r$ und $\mathfrak{Q}_{r+m}$ nahezu dieselben Töne sein.

Hat man aber im Verzeichnisse der reinen Quinten zwei nahe gleiche Töne entdeckt, und durch schickliches Temperieren einander ganz gleich gebracht, so zieht dies die Gleichheit sehr vieler anderer Töne nach sich, daß dann nur eine Gruppe nebeneinander stehender, in beschränkter Anzahl vorkommender Quinten übrig bleibt, die sich periodisch in derselben Ordnung wiederholen. In der Tat, wäre für ein von der Einheit wenig verschiedenes q geworden

$$\mathfrak{Q}_r = \mathfrak{Q}_{r+m}, \text{ d. h. } \frac{3^r}{2^\alpha} q^r = \frac{3^{r+m}}{2^\gamma} q^{r+m},$$

so erhielte man, wiederholt mit $\frac{3}{2} q$ multiplizierend:

$$\frac{3^{r+1}}{2^{\alpha+1}} q^{r+1} = \frac{3^{r+m+1}}{2^{\gamma+1}} q^{r+m+1}, \text{ also } \mathfrak{Q}_{r+1} = \mathfrak{Q}_{r+m+1},$$

$$\frac{3^{r+2}}{2^{\alpha+2}} q^{r+2} = \frac{3^{r+m+2}}{2^{\gamma+2}} q^{r+m+2}, \text{ also } \mathfrak{Q}_{r+2} = \mathfrak{Q}_{r+m+2} \text{ usw.}$$

Also nur die aufeinander folgenden m Töne $\mathfrak{Q}_r, \mathfrak{Q}_{r+1}, \cdots, \mathfrak{Q}_{r+m-1} \cdots,$ werden voneinander möglicherweise verschieden sein, die folgenden $\mathfrak{Q}_{r+m}, \mathfrak{Q}_{r+m+1} \cdots \mathfrak{Q}_{r+2m-1}$ aber sind mit den früheren Ton für Ton identisch. Von $\mathfrak{Q}_{r+2m}$ an bis $\mathfrak{Q}_{r+3m-1}$ wiederholen sich dieselben Töne zum zweiten Male, und so geht es fort ins Unendliche in beiden Richtungen.

Man hat mithin ein geschlossenes, zurückkehrendes, nur aus m Stufen bestehendes Tonsystem. Ordnet man die Töne desselben nach der Größe ihrer Schwingungszahlen, so bilden diese letzteren eine geometrische Progression, sind mithin im musikalischen Sinne äquidistant, was sich auf folgende Art beweisen läßt. Man nenne die Schwingungszahl des Tones $\mathfrak{Q}_r$ ξ, sodaß $\xi = \frac{3^r}{2^\alpha} q^r \zeta$ ist, wobei q den aus der Gleichung (7) gezogenen Wert, nämlich

$$\frac{3}{2} q = 2^{\frac{\gamma - \alpha - m}{m}} \tag{8}$$

bedeutet. Da q sehr nahe der Einheit gleich sein muß, so liegt dieser Wert von $\frac{3}{2} q$ offenbar zwischen 1 und 2, mithin der Exponent $\frac{\gamma - \alpha - m}{m}$ zwischen 0 und 1, das heißt, es ist

$$x = \gamma - \alpha - m < m \tag{9}$$

und $\frac{x}{m}$ ein echter, positiver Bruch, welchen man sich auf die kleinste Benennung gebracht denken kann. Ist er einer Reduktion fähig, und verwandelt er sich vermöge derselben in $\frac{x'}{m'}$, wo $x' < x$, $m' < m$ ist, so ist dies ein Zeichen, daß es eine näher an Q_r liegende Quinte, nämlich, $Q_{r+m'}$ gibt, welche ebenso wie Q_{r+m} mit derselben Temperatur q der Q_r gleichgemacht werden kann. Da nun nicht anzunehmen ist, daß man einen von Q_r sehr weit abliegenden Ton einem näheren vorziehen wird, so kann stets vorausgesetzt werden, daß $\frac{x}{m}$ ein echter, der ferneren Reduktion unfähiger Bruch ist, also x und m relative Primzahlen sind. Um nun die aus m Stufen bestehende Periode voneinander verschiedener Töne, nämlich

$$Q_r, \quad Q_{r+1}, \quad Q_{r+2}, \ldots, Q_{r+h}, \ldots, Q_{r+m-1}$$

zu erhalten, multipliziert man die Schwingungszahl ξ von Q_r wiederholt mit

$$\tag{10} \frac{3}{2} q = 2^{\frac{x}{m}}$$

und erhält hiemit zunächst die Zahlenreihe

$$\tag{11} \xi, \quad 2^{\frac{x}{m}} \xi, \quad 2^{\frac{2x}{m}} \xi, \ldots, 2^{\frac{hx}{m}} \xi, \ldots, 2^{\frac{(m-1)x}{m}} \xi,$$

die aber auf die erste Oktave zurückzuführen ist. Man hat zu diesem Behufe die zwischen ξ und 2ξ fallenden der obigen Zahlen unberührt zu lassen, die anderen aber durch eine solche Potenz von 2 zu dividieren, daß sie dadurch ebenfalls zwischen diese zwei Grenzen eingeschlossen werden.

Mit anderen Worten, man hat von den Exponenten

$$\frac{x}{m}, \quad \frac{2x}{m}, \ldots \frac{hx}{m}, \ldots \frac{(m-1)x}{m}$$

die Einheit so oft abzuziehen, bis ein echter Bruch übrig bleibt, oder was dasselbe ist, man hat jeden Zähler wie hx durch den Nenner m zu teilen, was einen Quotienten p und Rest $\varrho < m$ gibt, sodaß

$$hx = mp + \varrho$$

wird. Diesen Quotienten p hat man dann wegzuwerfen, und anstatt des Exponenten $\frac{hx}{m}$ nur $\frac{\varrho}{m}$ zu setzen. Nun läßt sich aber beweisen, daß, wenn man die Zahlen

$$x, \ 2x, \ 3x, \ hx, \ldots, kx, \ldots, (m-1)x$$

alle durch m dividiert, man bei diesen $(m-1)$ Divisionen lauter verschiedene Reste erhalten wird. In der Tat, nimmt man an, hx und

kx geben, durch m geteilt, einerlei Rest ϱ, so hat man die zwei Gleichungen

$$hx = mp + \varrho,$$
$$kx = mp' + \varrho,$$

woraus

$$(k-h)x = m(p'-p).$$

Dies ist aber eine unmögliche Gleichung, weil die rechte Seite durch m teilbar ist und die linke nicht. Da nämlich m und x der Voraussetzung nach keinen gemeinschaftlichen Faktor besitzen, so müßte $(k-h)$ durch m teilbar sein, was nicht sein kann, weil $k < m$ und $h < m$, mithin um so mehr $k - h < m$ ist. Die Reste dieser $(m-1)$ Divisionen sind also alle voneinander verschieden und alle kleiner als der Divisor m, mithin sind diese Reste offenbar:

$$1, 2, 3, \ldots, m-1.$$

Dies gibt definitiv die Schwingungszahlen der unter (11) genannten Töne geordnet nach ihrer Höhe:

$$\xi,\ 2^{\frac{1}{m}}\xi,\ 2^{\frac{2}{m}}\xi,\ 2^{\frac{3}{m}}\xi,\ \ldots,\ 2^{\frac{m-1}{m}}\xi.$$

Sie bilden also eine geometrische Progression, deren Exponent $2^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{2}$ ist, und sind daher im musikalischen Sinne äquidistant.

Hiemit hätten wir ein in sich zurückkehrendes, gleichschwebend temperiertes und nur aus m Stufen, die eine geometrische Progression bilden, bestehendes Quintensystem erhalten dadurch, daß wir zwei den reinen Schwingungszahlen nach sehr ähnliche Quinten durch schickliches Temperieren ganz gleich machten, $Q_r = Q_{r+m}$. Da hieraus $Q_{r-1} = Q_{r+m-1}$ folgt, so hätte man, von dieser Gleichheit ausgehend, genau dasselbe Quintensystem erhalten. Ebenso hätten auch die Gleichungen

$$Q_{r-2} = Q_{r+m-2},\quad Q_{r-3} = Q_{r+m-3},\quad Q_0 = Q_m$$

zu demselben System geleitet. Man kann sich daher darauf beschränken, zum Grundtone Q_0 mit der Schwingungszahl ξ einen Reinton Q_m mit einer ähnlichen, von ξ möglichst wenig abweichenden Schwingungszahl zu suchen.

Es hat zwar ein Tonsystem nicht nur Quinten, sondern auch Terzen, große und kleine, und Septimen zu enthalten, auf welche letztere denn auch entsprechend Rücksicht zu nehmen ist. Allein es gibt zahlreiche Musiker, die auf möglichst reine Quinten einen besonderen Wert legen, die anderen Intervalle weit weniger beachtend, und die ein vorgelegtes Tonsystem, wenn auch nicht ausschließlich, so doch vorzugsweise nach der Reinheit der Quinten beurteilen. Die mathematische Analysis, die hier nur Hilfswissenschaft ist und schon deshalb allen Ansprüchen womöglich gerecht zu werden versucht, legt sich, um vor allem diesen Quintenpuritanern zu genügen, die folgende Frage vor: *Welche sind die geschlossenen Quintensysteme, die sich durch besondere Reinheit, d. h. durch einen der Einheit sehr nahen Wert ihrer Temperatur q auszeichnen?*

In der zur Bestimmung der Temperatur q aufgestellten Gleichung (8), d. h.

$$\frac{3}{2} q = 2^{\frac{x}{m}}, \tag{13}$$

setzen wir $q = 1$ und erhalten

$$\frac{3}{2} = 2^{\frac{x}{m}}, \tag{14}$$

vergessen aber nicht, daß x und m teilerfremde ganze Zahlen sein müssen.

Die Gleichung (14) gibt:

$$\frac{x}{m} = \frac{\log 3}{\log 2} - 1 = \frac{4771213}{3010300} - 1.$$

Entwickeln wir diesen Bruch in einen Kettenbruch, so sind dessen Näherungsbrüche offenbar Werte von $\frac{x}{m}$, die der gestellten Forderung genügen.

Diesen Kettenbruch samt den Näherungsbrüchen und den Stellen, wo der Kettenbruch abgebrochen diese Näherungsbrüche gibt, enthält folgende Formel:

$$\frac{x}{m} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{10}}}}}}}}}$$

$$\begin{array}{lll}
\frac{3}{5} & \cdots\cdots\cdots & 2 + \frac{1}{\ldots} \\
\frac{7}{12} & \cdots\cdots\cdots & 2 + \frac{1}{\ldots} \\
\frac{24}{41} & \cdots\cdots\cdots & 3 + \frac{1}{\ldots} \\
\frac{31}{53} & \cdots\cdots\cdots & 1 + \frac{1}{\ldots} \\
\frac{179}{306} & \cdots\cdots\cdots & 5 + \frac{1}{\ldots} \\
\frac{389}{665} & \cdots\cdots\cdots & 2 + \frac{1}{10}
\end{array}$$

Die Näherungswerte von $\frac{x}{m}$ sind also der Reihe nach:

$$\frac{x}{m} = \frac{3}{5}, \frac{7}{12}, \frac{24}{41}, \frac{31}{53}, \frac{179}{306}, \frac{389}{665}, \tag{15}$$

und es ist aus ihnen ersichtlich, daß die folgenden reinen Quinten in sehr naher und stets näherer Verwandtschaft ihrer Schwingungszahlen mit dem Grundtone stehen:

$$Q_0, Q_5, Q_{12}, Q_{41}, Q_{53}, Q_{306}, Q_{665}, \ldots$$

Ihnen entspringen der Reihe nach ein

5-, 12-, 41-, 53-, 306-, 665-stufiges

Tonsystem.

Diese Tonsysteme bestehen alle aus in geometrischen Progressionen fortschreitenden Tönen. Die Exponenten dieser Progression sind beziehentlich

$$\sqrt[5]{2}, \sqrt[12]{2}, \sqrt[41]{2}, \sqrt[53]{2}, \sqrt[306]{2}, \sqrt[665]{2}, \ldots$$

Jedes dieser Tonsysteme hat seine eigene Quintentemperatur q. Unterscheidet man diese Temperaturen durch die Stellenzeiger der ihnen zugrunde liegenden Quinten, sodaß sie beziehentlich heißen

$$q_5, q_{12}, q_{41}, q_{53}, q_{306}, q_{665}, \ldots,$$

so sind die zusammengehörigen Werte dieser reinen Quinten und ihrer Temperaturen

$$\begin{aligned}
&Q_5 = 0.94922\zeta, && q_5 = 1 + 0.01048 && = 1 + \frac{1}{95},\\
&Q_{12} = 1.01364\zeta, && q_{12} = 1 - 0.001135 && = 1 - \frac{1}{886},\\
&Q_{41} = 0.988606\zeta, && q_{41} = 1 + 0.0002789 && = 1 + \frac{1}{3585},\\
&Q_{53} = 1.00209\zeta, && q_{53} = 1 - 0.0000394 && = 1 - \frac{1}{25400},\\
&Q_{306} = 0.999005\zeta, && q_{306} = 1 + 0.00000318 && = 1 + \frac{1}{314500},\\
&Q_{665} = 1.0001026\zeta, && q_{665} = 1 - 0.00000007 && = 1 - \frac{1}{14300000}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Sie werden berechnet auf folgende Weise. Da man nicht $Q_r = Q_{r+m}$, sondern $Q_0 = Q_m$ gesetzt hat, so ist $r = 0$, mithin vermöge der Gleichung (7) auch $\alpha = 0$.

Dies macht zufolge der Gleichung (9) $\gamma = x + m$, mithin

$$Q_m = \frac{3^m}{2^{x+m}}\zeta,$$

hierzu kommt laut (13)

$$\frac{3}{2}q = 2^{\frac{x}{m}}, \quad \text{also} \quad q = \frac{1}{3}2^{\frac{x+m}{m}};$$

übergehend zu dem Logarithmus

$$\log Q_m = m\log 3 - (x+m)\log 2 + \log\zeta,$$
$$\log q \;\; = \left(\frac{x}{m}+1\right)\log 2 - \log 3,$$

oder auch in Zahlenwerten

$$\log Q_m = 0.4771213m - 0.30103(x+m) + \log\zeta,$$
$$\log q \;\; = \frac{0.30103(x+m)}{m} - 0.4771213.$$

Von den berechneten Logarithmen von Q_m und q kehrt man dann zu den Zahlen mit Hilfe der Tafeln wieder zurück. Die zusammengehörigen Werte von x und m sind in der Gleichung (15) ersichtlich.

Die Temperatur der Quinte q konvergiert, wie man sieht, außerordentlich rasch gegen die Einheit, aber nur mit ebenso rascher Zunahme der Anzahl der Tonstufen. Schwerlich wird es nun jemand beifallen, auf Q_{306} oder gar Q_{665} ein Augenmerk zu werfen, sondern es wird die allgemeine Aufmerksamkeit zwischen q_{12} und q_{53} haften bleiben, und es wird wohl manchem bedünken, daß zwar 12 Stufen zu wenig, 53 dagegen zu viel seien. Daher dann der Wunsch rege werden dürfte, daß es zwischen Q_{12} und Q_{53} eine reine Quinte Q_y geben möge, wo $12 < y < 53$ ist, welche, dem Grundtone gleich gesetzt, zu einer Temperatur q_y führt, die wenigstens nicht mehr von der Einheit entfernt ist, als q_{12}. Allein eine solche Quinte gibt es eben nicht, weil es keinen Bruch $\frac{z}{y}$ gibt, der zwischen $\frac{7}{12}$ und $\frac{31}{53}$ liegt, sodaß $\frac{7}{12} < \frac{z}{y} < \frac{31}{53}$ besteht, während $7 < z < 31$ und $12 < y < 53$ ist. Wenn daher ein Liebhaber reiner Quinten aus irgend einem Grunde, mit dem 12stufigen Tonsysteme unzufrieden, ein mehrstufiges wünscht, ohne von der Reinheit der Quinten etwas einbüßen zu wollen, wird er zunächst auf das 53stufige verwiesen; ein anderes gibt es nicht, wie dies aus den bekannten Eigenschaften der Kettenbrüche hervorgeht. Das im Verzeichnisse (16) ebenfalls vorhandene 41stufige System ist unbrauchbar, weil nach einem später zur Sprache kommenden Grund-gesetze bei allen Tonsystemen die Temperatur der Quinte kleiner als eins sein muß, während $q_{41} > 1$ ist.

Hinzugefügt kann noch werden, daß man sämtlichen Werten von m und x auch das negative Zeichen beilegen kann, wodurch kraft der Gleichung (13) die Temperatur q gar keine Änderung erfährt, so daß man allgemein

$$q_m = q_{-m} \quad \text{hat.}$$

Die Quinte Q_m hingegen geht dadurch in eine Quarte Q_{-m} über, und es ist

$$\frac{1}{\zeta} Q_{-m} = \frac{\zeta}{Q_m}.$$

Endlich gibt die Formel (15) nur die vornehmsten Werte von $\frac{x}{m}$, denen die der Einheit nächsten q und Q entsprechen; man kann sich aber aus ihnen noch viele andere ebenfalls brauchbare $\frac{x}{m}$ verschaffen, indem man aus den Brüchen der Gleichung (15) Mittelwerte bildet, die bekanntlich erhalten werden, indem man von zweien oder mehreren derselben die Zähler addiert, und die Nenner addiert, nachdem man die einen und die anderen vorher mit einer beliebigen Zahl multipliziert hat.

Ein gutes Tonsystem benötigt aber nicht nur einer Reihe nebeneinander liegender Quinten, die eine geschlossene sein kann oder nicht, sondern es braucht auch die dazu gehörigen großen und kleinen Terzen und Septimen, rein oder temperiert, wenn das Temperieren einen wesentlichen Nutzen verspricht.

Es sollen also diese Terzen und Septimen verschafft werden, die wir von vornherein als temperierte annehmen wollen, weil der Übergang von temperierten zu reinen Tönen leichter ist, als der von reinen zu temperierten. Dieser Übergang wird nämlich dadurch bewerkstelligt, daß man die Temperatur $= 1$ setzt. Nennen wir die, allen großen Terzen gemeinschaftliche Temperatur T, ebenso die gemeinsame Temperatur der kleinen Terzen t, die der sämtlichen Septimen s, während die gleichfalls gleichschwebende Temperatur der Quinten mit q bezeichnet bleiben soll. Legen wir uns ferner 4 Reihen von Tönen mit ihren temperierten oder nach Belieben auch reinen Schwingungszahlen vor, angeordnet in vier nebeneinander stehenden vertikalen Spalten, deren erste eine vorderhand noch nach beiden Seiten, nach oben nämlich und nach unten, unendlich gedachte Quarten- und Quintenreihe, die zweite die zu ihnen gehörigen großen Terzen, die dritte die kleinen Terzen, und die vierte die entsprechenden Septimen enthält, so ergibt sich

$$
(17)\quad
\begin{array}{llll}
Q_{-r} = \frac{2^\beta}{3^r} q^{-r}\zeta & T_{-r} = \frac{2^{\beta-2}\cdot 5}{3^r} q^{-r} T\zeta & t_{-r} = \frac{2^{\beta+1}}{3^{r-1}\cdot 5} q^{-r} t\zeta & S_{-r} = \frac{2^{\beta-2}\cdot 7}{3^r} q^{-r} s\zeta \\
Q_{-r+1} = \frac{2^{\beta-1}}{3^{r-1}} q^{-r+1}\zeta & T_{-r+1} = \frac{2^{\beta-3}\cdot 5}{3^{r-1}} q^{-r+1} T\zeta & t_{-r+1} = \frac{2^\beta}{3^{r-2}\cdot 5} q^{-r+1} t\zeta & S_{-r+1} = \frac{2^{\beta-3}}{3^{r-1}} q^{-r+1} s\zeta \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
Q_{-2} = \frac{2^4}{3^2} q^{-2}\zeta & T_{-2} = \frac{2\cdot 5}{3^2} q^{-2} T\zeta & t_{-2} = \frac{2^5}{3\cdot 5} q^{-2} t\zeta & S_{-2} = \frac{2\cdot 7}{3^2} q^{-2} s\zeta \\
Q_{-1} = \frac{4}{3} q^{-1}\zeta & T_{-1} = \frac{5}{3} q^{-1} T\zeta & t_{-1} = \frac{2^3}{5} q^{-1} t\zeta & S_{-1} = \frac{7}{2\cdot 3} q^{-1} s\zeta \\
Q_0 = \zeta & T_0 = \frac{5}{4} T\zeta & t_0 = \frac{6}{5} t\zeta & S_0 = \frac{7}{4} s\zeta \\
Q_1 = \frac{3}{2} q\zeta & T_1 = \frac{3\cdot 5}{2^3} q T\zeta & t_1 = \frac{3^2}{5} q t\zeta & S_1 = \frac{3\cdot 7}{2^3} q\zeta \\
Q_2 = \frac{3^2}{2^3} q^2\zeta & T_2 = \frac{3^2\cdot 5}{2^5} q^2 T\zeta & t_2 = \frac{3^3}{2^2\cdot 5} q^2 t\zeta & S_2 = \frac{3^2\cdot 7}{2^5} q^2 s\zeta \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
Q_r = \frac{3^r}{2^\alpha} q^r\zeta & T_r = \frac{3^r\ 5}{2^{\alpha+2}} q^r T\zeta & t_r = \frac{3^{r+1}}{2^{\alpha-1}\cdot 5} q^r t\zeta & S_r = \frac{3^r\cdot 7}{2^{\alpha+2}} q^r s\zeta \\
Q_{r+1} = \frac{3^{r+1}}{2^{\alpha+1}} q^{r+1}\zeta & T_{r+1} = \frac{3^{r+1}}{2^{\alpha+3}} q^{r+1} T\zeta & t_{r+1} = \frac{3^{r+2}}{2^\alpha\cdot 5} q^{r+1} t\zeta & S_{r+1} = \frac{3^{r+1}\cdot 7}{2^{\alpha+3}} q^{r+1} s\zeta \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
Q_{r+m} = \frac{3^{r+m}}{2^\gamma} q^{r+m}\zeta, & T_{r+m} = \frac{3^{r+m}\cdot 5}{2^{\gamma+2}} q^{r+m} T\zeta, & t_{r+m} = \frac{3^{r+m+1}}{2^{\gamma-1}\cdot 5} q^{r+m} t\zeta, & S_{r+m} = \frac{3^{r+m}\cdot 7}{2^{\gamma+2}} q^{r+m} s\zeta \\
Q_{r+m+1} = \frac{3^{r+m+1}}{2^{\gamma+1}} q^{r+m+1}\zeta, & T_{r+m+1} = \frac{3^{r+m+1}\cdot 5}{2^{\gamma+3}} q^{r+m+1} T\zeta, & t_{r+m+1} = \frac{3^{r+m+2}}{2^\gamma\cdot 5} q^{r+m+1} t\zeta, & S_{r+m+1} = \frac{3^{r+m+1}\cdot 7}{2^{\gamma+3}} q^{r+m+1} s\zeta.
\end{array}
$$

Alle großen Terzen heißen T, die kleinen t, die Septimen S, zusammengehörige Töne tragen einerlei Stellenzeiger und stehen auf derselben horizontalen Linie; es ist also Q_0 der Grundton, T_0 seine gr. Terz, t_0 seine kl. Terz, und S_0 seine Septime, α, β, γ sind ganze Zahlen, die man sich so gewählt denken muß, daß die betreffende Schwingungszahl des Tones zwischen ξ und 2ξ fällt, womit alle Töne der vier Vertikalreihen in den Bereich einer Oktave eingegrenzt werden.

Sind diese Töne alle rein, also alle Temperaturen $q = T = t = s = 1$, so sind sie auch alle, wie wohl ihrer in jeder Spalte unendlich viele vorhanden sind, mit zwischen ξ und 2ξ liegenden Schwingungszahlen voneinander verschieden. Daß dies in der Reihe der reinen Quinten, welche die erste Spalte enthält, richtig sei, ist bereits nachgewiesen worden, mithin ist es auch richtig für die Zahlen in der zweiten, dritten und vierten Spalte, weil sie die Zahlen der ersten Spalte enthalten, beziehentlich mit $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{4}$ multipliziert. Aber auch in verschiedenen Spalten finden sich keine 2 gleichen Zahlen. Denn nehmen wir an, es sei irgend eine der Terzen, etwa T_r gleich irgend einer Quinte, etwa Q_{r+m}, so wäre

$$\frac{3^r \cdot 5}{2^{\alpha+2}} = \frac{3^{r+m}}{2^\gamma}, \text{ also } 5 \cdot 2^{\gamma-\alpha-2} = 3^m,$$

d. h. eine durch 5 teilbare Zahl gleich einer anderen, die es nicht ist. Ebenso kann auch keine einzige der reinen kleinen Terzen und Septimen unter den reinen Quinten gefunden werden.

Anders verhält sich jedoch die Sache, wenn man temperierte Töne zuläßt. Es ist bereits erwiesen worden, daß, wenn man die Temperatur q der Quinten so wählt, daß zwei ihren Schwingungszahlen nach nahe verwandte Töne Q_0 und Q_m vollständig gleich werden, die ganze unendliche Quintenreihe in vollkommen identische $m$gliedrige Quintenperioden zerfällt. Dasselbe gilt nun offenbar auch von den Zahlen der zweiten, dritten und vierten Spalte, wenn man $T_0 = T_m$, $t_0 = t_m$, $S_0 = S_m$ setzt, sie zerfallen ebenfalls und zwar für denselben Wert von q in sich ins Unendliche wiederholende, $m$gliedrige Perioden. Noch mehr; hat man unter den reinen Terzen irgend eine, etwa T_m entdeckt, die irgend einer Quinte, etwa Q_{r+m}, der Schwingungszahl nach sehr nahe kommt, so wird man durch schickliche Wahl der Temperatur T die volle Gleichheit der temperierten Töne herbeiführen können, und es wird dies zur unmittelbaren Folge haben, daß alle Terzen den aufeinanderfolgenden Quinten paarweise, und Glied für Glied gleich werden so zwar, daß darnach die zweite Vertikalreihe genau gleich der ersten wird, und nur um eine gewisse Anzahl von Stufen gegen dieselbe verschoben. Nimmt man nämlich an, es sei für ein gewisses T

$$T_r = Q_{r+m}, \quad \text{so ist auch}$$

$$\frac{3^r \cdot 5}{2^{\alpha+2}} q^r T \cdot \zeta = \frac{3^{r+m}}{2^\gamma} q^{r+m} \cdot \zeta,$$ also zu wiederholtenmalen mit $\frac{3}{2}q$ multipliziert

$$\frac{3^{r+1} \cdot 5}{2^{\alpha+3}} q^{r+1} T \cdot \zeta = \frac{3^{r+m+1}}{2^{\gamma+1}} q^{r+m+1} \cdot \zeta, \quad \text{das heißt: } T_{r+1} = Q_{r+m+1},$$

$$\frac{3^{r+2}}{2^{\alpha+4}} q^{r+2} \cdot T\zeta = \frac{3^{r+m+2}}{2^{\gamma+2}} q^{r+m+2} \cdot \zeta, \quad \text{das heißt: } T_{r+2} = Q_{r+m+2} \text{ usw.}$$

Es zieht also die Gleichheit zweier Töne T_r und Q_{r+m} unmittelbar die Gleichheit aller übrigen nach sich, und es ist folglich auch ganz gleichgültig, bei welchem Paare man die Gleichstellung vornimmt. Man wird also $T_0 = Q_m$ setzen können, und das Ergebnis wird genau dieselbe Zahlenreihe sein, die auch $T_r = Q_{r+m}$ gibt.

Dasselbe, was hier von den großen Terzen gezeigt worden ist, läßt sich auch von den kleinen Terzen und Septimen beweisen. Bewirkt man nämlich durch schickliche Wahl der Temperatur t oder s, daß irgend eine der kleinen Terzen oder Septimen irgend einer Quinte gleich wird, so werden alle gleich, das heißt sie sind sämtlich unter den Quinten enthalten, und sind weder mehr noch weniger an der Zahl als diese.

Finden sich also endlich in der Quintenreihe Zahlen, die beziehentlich den folgenden

$$(18) \quad T_0 = \frac{5}{4}\zeta = 1{\cdot}25\,\zeta, \quad t_0 = \frac{6}{5}\zeta = 1{\cdot}2\,\zeta, \quad S_0 = \frac{7}{4}\zeta = 1{\cdot}75\,\zeta$$

beinahe gleich geltend sind — und dies wird offenbar der Fall sein müssen aus demselben Grunde, weil der Quinten unendlich viele in dem ganzen Bereiche einer einzigen Oktave eingeschlossen sind — so kann man die Temperaturen T, t und s immer der Einheit nahe und so wählen, daß sämtliche große und kleine Terzen und Septimen in der Reihe der Quinten, zu welchen sie gehören, bereits enthalten sind. Hiemit ergibt sich aber die in einem Tonsysteme so wünschenswerte Allseitigkeit der Verwendung der Töne von selbst, indem man in der Quintengruppe allein zu einem jeden Tone als Grundton nicht nur Quarte und Quinte, sondern auch große und kleine Terz und Septime findet, und vielleicht noch überdies durch geeignete Wahl der Temperatur q das Tonsystem zu schließen imstande ist.

Hiemit wird aber der eigentliche Zweck des Temperierens erst recht in helles Licht gesetzt, der nicht mehr ein bloßes Verfälschen ist, um einen und denselben Ton zu zwingen mehrere Rollen zu spielen, sondern vielmehr in der Aufhebung der Inkommensurabilität zwischen den Tönen liegt, mit welcher dann eine Reduktion von einer unendlichen auf eine mäßige Anzahl von Tönen, die nun das ganze unendliche Tonreich vorstellen, verknüpft ist.

Da somit alles darauf ankommt, die Zahlenwerte (18) in der Reihe der reinen Quarten und Quinten in möglichster Ähnlichkeit zu entdecken, so mögen dieselben der klaren Übersicht halber wirklich berechnet folgen, aber nur mit 4 Dezimalstellen, weil eine größere Genauigkeit zu den vorliegenden Zwecken nicht notwendig ist. Zu dem kombinatorischen Namen Q des Tones erscheint dabei auch der musikalische hinzugefügt.

$$
(19)\quad
\begin{array}{llll@{\qquad}llll}
Q_0 = \zeta & = C & & & Q_0 = \zeta & = C & \\
Q_1 = 1{\cdot}5\,\zeta & = G & = \frac{3}{2}\zeta & & Q_{-1} = 1{\cdot}3333\,\zeta & = F & = \frac{2^2}{3}\zeta \\
Q_2 = 1{\cdot}125\,\zeta & = D & = \frac{3^2}{2^3}\zeta & & Q_{-2} = 1{\cdot}7778\,\zeta & = B & = \frac{2^4}{3^2}\zeta \\
Q_3 = 1{\cdot}6875\,\zeta & = A & = \frac{3^3}{2^4}\zeta & & Q_{-3} = 1{\cdot}1852\,\zeta & = Es & = \frac{2^5}{3^3}\zeta \\
Q_4 = 1{\cdot}2656\,\zeta & = E & = \frac{3^4}{2^6}\zeta & & Q_{-4} = 1{\cdot}5802\,\zeta & = As & = \frac{2^7}{3^4}\zeta \\
Q_5 = 1{\cdot}8984\,\zeta & = H & = \frac{3^5}{2^7}\zeta & & Q_{-5} = 1{\cdot}0535\,\zeta & = Des & = \frac{2^8}{3^5}\zeta \\
Q_6 = 1{\cdot}4238\,\zeta & = Fis & = \frac{3^6}{2^9}\zeta & & Q_{-6} = 1{\cdot}4047\,\zeta & = Ges & = \frac{2^{10}}{3^6}\zeta \\
Q_7 = 1{\cdot}0679\,\zeta & = Cis & = \frac{3^7}{2^{11}}\zeta & & Q_{-7} = 1.8729\,\zeta & = Ces & = \frac{2^{12}}{3^7}\zeta \\
Q_8 = 1{\cdot}6018\,\zeta & = Gis & = \frac{3^8}{2^{12}}\zeta & & Q_{-8} = 1{\cdot}2486\,\zeta & = Fes & = \frac{2^{13}}{3^8}\zeta \\
Q_9 = 1{\cdot}2014\,\zeta & = Dis & = \frac{3^9}{2^{14}}\zeta & & Q_{-9} = 1{\cdot}6648\,\zeta & = Bes & = \frac{2^{15}}{3^9}\zeta \\
Q_{10} = 1{\cdot}8020\,\zeta & = Ais & = \frac{3^{10}}{2^{15}}\zeta & & Q_{-10} = 1{\cdot}1099\,\zeta & = Eses & = \frac{2^{16}}{3^{10}}\zeta \\
Q_{11} = 1{\cdot}3515\,\zeta & = Eis & = \frac{3^{11}}{2^{17}}\zeta & & Q_{-11} = 1{\cdot}4798\,\zeta & = Ases & = \frac{2^{18}}{3^{11}}\zeta \\
Q_{12} = 1{\cdot}0136\,\zeta & = His & = \frac{3^{12}}{2^{19}}\zeta & & Q_{-12} = 1{\cdot}9731\,\zeta & = Deses & = \frac{2^{20}}{3^{12}}\zeta \\
Q_{13} = 1{\cdot}5205\,\zeta & = Fisis & = \frac{3^{13}}{2^{20}}\zeta & & Q_{-13} = 1{\cdot}3154\,\zeta & = Geses & = \frac{2^{21}}{3^{13}}\zeta \\
Q_{14} = 1{\cdot}1404\,\zeta & = Cisis & = \frac{3^{14}}{2^{22}}\zeta & & Q_{-14} = 1{\cdot}7538\,\zeta & = Ceses & = \frac{2^{23}}{3^{14}}\zeta \\
Q_{15} = 1{\cdot}7105\,\zeta & = Gisis & = \frac{3^{15}}{2^{23}}\zeta & & Q_{-15} = 1{\cdot}1692\,\zeta & = Feses & = \frac{2^{24}}{3^{15}}\zeta
\end{array}
$$

Der aufmerksame Anblick dieser Zusammenstellung von Schwingungszahlen lehrt, daß sich in derselben und in der Nähe des Grundtones Q_0 zwei Gruppen von Zahlen entdecken lassen, die den Schwingungszahlen der reinen großen und kleinen Terz und Septime (18) ähnlich sind. Man kann nämlich die Töne

(20a) $Q_4 = 1 \cdot 2656\,\zeta = E,\ Q_{-3} = 1 \cdot 1852\,\zeta = Es,\ Q_{10} = 1 \cdot 8020\,\zeta = Ais$

dafür in Aussicht nehmen. Diese haben den Vorteil, dem Grundtone am nächsten zu liegen, und versprechen deshalb die einfachsten Tonsysteme mit der allergeringsten Stufenzahl. Alle die letzteren nennt Petzval *Tonsysteme der ersten Klasse.*

Man kann aber auch die zwar vom Grundtone etwas weiter entfernten, dafür aber mit der reinen großen und kleinen Terz und Septime besser übereinstimmenden Töne
(20b) $Q_{-8} = 1 \cdot 2486\,\zeta = Fes,\ Q_9 = 1 \cdot 2014\,\zeta = Dis,\ Q_{-14} = 1 \cdot 7538\,\zeta = Ceses$
ins Auge fassen, und wird dadurch zu verwickelteren, aber reineren Tonsystemen gelangen, welche Petzval alle zur *zweiten Klasse* zählt.

Es versteht sich von selbst, daß im Verzeichnisse der reinen Quinten, wenn man dasselbe namhaft erweitert, sich Zahlen finden werden, die den: $1 \cdot 25\,\zeta$, $1 \cdot 2\,\zeta$, $1 \cdot 75\,\zeta$ noch näher, ja so nahe als man nur wünscht, kommen; allein sie befinden sich in so großen Abständen sowohl vom Grundtone, wie auch untereinander, geben mithin so vollständige Tonsysteme, daß eine jede vernünftige Ursache des Temperierens wegfällt, indem man mit demselben Aufwande von Mitteln auch vollkommen reine Töne haben kann.

Die hier angestrebte Allgemeinheit der Untersuchung verlangt, daß dieser Sachverhalt klar nachgewiesen werde. Dies kann aber nur dadurch erzielt werden, daß man dem Leser eine vollständige Übersicht über alle in der unendlichen Quintenreihe vorhandenen großen und kleinen Terzen und Septimen verschafft. Hiezu ist entweder die wirkliche Berechnung dieser Quarten- und Quintenreihe, weit genug getrieben, notwendig, oder was vielleicht den Vorzug verdient, eine Methode zur direkten Berechnung dieser genauesten Terzen und Septimen. Diese soll hier gegeben werden.

Sucht man zuvörderst die Terzen und nimmt an, die Terz $T_0 = \frac{5}{4}\zeta$ sei der Quinte $Q_{m'} = \frac{3^{m'}}{2^y}\zeta$ ähnlich, unter m' und y positive oder auch negative ganze Zahlen verstanden, dann ist nahezu

$$\frac{3^{m'}}{2^y} = \frac{5}{4}, \text{ also } \frac{3^{m'}}{2^{y-2}} = 5,$$

oder wenn man $y - 2 = z$ setzt,

$$\frac{3^{m'}}{2^z} = 5,$$

$$m' \log 3 - z \log 2 = \log 5, \text{ das heißt}$$

$$0 \cdot 4771213 m' - 0 \cdot 3010300 z = 0 \cdot 6989700 \text{ oder}$$

$$4771213 m' - 3010300 z - 6989700 = 0.$$

Wir dividieren durch den kleinsten Koeffizienten, den der Unbekannten z, und erhalten

$$m' - z - 2 + \frac{1760913\, m' - 969100}{3010300} = 0.$$

Hier ist $m' - z - 2$ eine ganze Zahl, weshalb auch

$$u = \frac{1760913\, m' - 969100}{3010300}$$

eine ganze Zahl sein muß, und nun haben wir

$$m' - z - 2 + u = 0,$$

$$3010300 u - 1760913 m' + 969100 = 0,$$

$$2u - m' - \frac{511526 u - 969100}{1760913} = 0.$$

$2u - m'$ ist hier eine ganze Zahl, weshalb auch

$$v = \frac{511526 u - 969100}{1760913}.$$

nahezu einer ganzen Zahl gleich sein muß; für $u = 2$ findet dies in roher Annäherung statt, so daß man als erste Lösung mit Rücksicht auf die vorangegangenen Gleichungen:

$$u = 2, \; m' = 4, \; z = 4, \; Q_4 = 1 \cdot 265625 \zeta$$

hat. Aus der letzten, den Wert von v bestimmenden Gleichung folgt:

$$3v - u + 2 + \frac{226335 v - 53952}{511526} = 0$$

$$2u - m' - v = 0.$$

Hier ist abermals

$$w - \frac{226335 v - 53952}{511526} \text{ eine ganze Zahl,}$$

und

$$3v - u + 2 + w = 0,$$

$$5116526 w - 226335 v + 53952 = 0$$

$$2w - v + \frac{58856 w + 53952}{226335} = 2w - v + \xi = 0.$$

So wie $2w - v$, so ist auch

$$\xi = \frac{58\,856\,w + 53\,952}{226\,335} \text{ eine ganze Zahl,}$$

was ziemlich nahe stattfindet für $w = -1$, wo ξ nur um den kleinen Bruch $\frac{4904}{226\,335}$ von Null verschieden ausfällt. Dies gibt die zweite Lösung:

$$w = -1,\ v = -2,\ u = -5,\ m' = -8,$$
$$z = -15,\ y = -13,\ Q_{-8} = 1 \cdot 24859\zeta.$$

Noch näher aber für $w = 3$, wo ξ von der Einheit nur um den Bruch $\frac{4185}{226\,335}$ verschieden wird, liefert die dritte Lösung:

$$w = 3,\ v = 7,\ u = 26,\ m' = 45,$$
$$z = 69,\ y = 71,\ Q_{45} = 1 \cdot 251\,205\zeta.$$

Lösungen geringeren Ranges, die minder genaue Terzen liefern als Q_{-8}, Q_{45}, erhält man noch für

$$w = -5,\ -9,\ \cdots \text{ und für } w = 7,\ 11,\ \cdots;$$

sie werden hier einstweilen außer Acht gelassen.

Die zur Bestimmung von ξ dienende letzte Gleichung gibt

$$4\xi - w - \frac{9089\,\xi - 4904}{58\,856} - 1 = 4\xi - w - 1 - \eta = 0$$

$$\text{wobei } \eta = \frac{9089\,\xi - 4904}{58\,856} \text{ eine ganze Zahl sein muß.}$$

Hieraus folgt aber

$$6\eta - \xi + \frac{4322\,\eta + 4904}{9089} = 6\eta - \xi + \vartheta = 0$$

weshalb

$$\vartheta = \frac{4322\,\eta + 4904}{9089} \text{ eine ganze Zahl vorstellt.}$$

Dies findet nahezu statt, erstens für $\eta = -1$, wo ϑ nur um $\frac{582}{9089}$ von Null verschieden ausfällt. Es gibt dies die vierte Hauptlösung

$$\eta = -1,\ \xi = -6,\ w = -24,\ v = -54,\ u = -184,$$
$$m' = -314,\ z = -500,\ y = -498,\ Q_{-314} = 1 \cdot 249\,832\zeta.$$

Und zweitens noch näher für $\eta = 1$, wo ϑ von der Einheit nur um $\frac{137}{9089}$ abweicht, woraus die fünfte Lösung folgt:

$$\eta = 1,\ \xi = 7,\ w = 26,\ v = 59,\ u = 205$$
$$m' = 351,\ z = 554,\ y = 556,\ Q_{351} = 1 \cdot 24996\zeta.$$

Endlich noch für $\eta = 3$, wo ϑ nur um $\frac{308}{9089}$ von 2 Einheiten verschieden befunden wird, was zur sechsten Lösung führt:

$$\eta = 3,\ \xi = 20,\ w = 76,\ v = 172,\ u = 594,$$
$$m' = 1016,\ z = 1608,\ y = 1610,\ Q_{1016} = 1 \cdot 250088\zeta.$$

Hier könnte man innehalten und hätte damit die Hauptauflösungen der vorgelegten Gleichung, das heißt diejenigen kennen gelernt, von deren beinahe jeder man behaupten kann, daß in größerer Nähe am Grundtone Q_0 keine andere, dem reinen Schwingungsverhältnisse $\frac{5}{4}$ näher kommende anzutreffen sei.

Aus diesen gewinnt man mit Hilfe der im Verzeichnisse (16) angeführten reinen Quinten die anderen niederen Ranges. Letztere sind nämlich der Gleichung

$$Q_m = \frac{3^m}{2^{m+x}}\zeta$$

entnommen für solche m und x, daß $\frac{3^m}{2^{m+x}}$ nahe $= 1$ ist. Die hier besprochenen Terzen hingegen ergeben sich aus der Gleichung

$$Q_{m'} = \frac{3^{m'}}{2^y}\zeta$$

für solche m' und y, daß $\frac{3^{m'}}{2^y}$ nahe $\frac{5}{4}$ ist; also wird auch der Bruch $\frac{3^{m+m'}}{2^{m+x+y}}$ nahe $= \frac{5}{4}$ sein, und es ist mithin $Q_{m+m'}$ auch eine dem Reinverhältnisse $\frac{5}{4}$ mehr oder weniger nahe kommende Terz, besonders, wenn von beiden Q_m und $Q_{m'}$ der eine zu groß, der andere zu klein gewählt wird, wo dann $Q_{m+m'}$ gewöhnlich eine Terz ersten Ranges wird.

Z. B. die Quinte $Q_{306} = 0 \cdot 999005\zeta$ und die Terz $Q_{1016} = 1 \cdot 250088\zeta$ geben durch Multiplikation eine neue Terz:

$$Q_{1322} = 1 \cdot 248844\zeta.$$

Ebenso liefern die Quinte $Q_{53} = 1 \cdot 00209\zeta$ und die Terz $Q_{-8} = 1 \cdot 24859\zeta$ eine neue Terz ersten Ranges: $Q_{45} = 1 \cdot 251205\zeta$, die soeben vorgekommen ist.

Die in der Quintenreihe befindlichen kleinen Terzen ähnlich zu berechnen, ist nicht notwendig; denn sie ergeben sich aus den großen Terzen Glied für Glied auf eine höchst einfache Weise. Es ist nämlich die Schwingungszahl der kleinen Terz $t_0 = \frac{6}{5}\zeta$; die einer ihr ähnlichen

Quinte sei $Q_{m''} = \frac{3^{m''}}{2^z}\zeta$, so ist durch Setzen ganzer Zahlen für m'' und z nahezu

$$\frac{3^{m''}}{2^z} = \frac{6}{5} = \frac{2\cdot 3}{5}, \quad \text{mithin } \frac{3^{m''-1}}{2^{z+1}} = \frac{1}{5},$$

also

$$\frac{3^{-(m''-1)}}{2^{-(z+1)}} = 5 \text{ zu machen.}$$

Für die großen Terzen hatten wir die ähnliche Gleichung

$$\frac{3^{m'}}{2^{y-2}} = 5, \text{ es wird mithin offenbar}$$

$$-m'' + 1 = m', \ -z - 1 = y - 2,$$

$$m'' = -m' + 1, \qquad z = -y + 1.$$

Es gehören also namentlich zu den folgenden Großterzen ersten Ranges die unten stehenden Kleinterzen derselben Rangstufe

$$T_0 = Q_4,\ Q_{-8},\ Q_{45},\ Q_{-314},\ Q_{351},\ Q_{1016} \cdots Q_{m'}$$

$$t_0 = Q_{-3},\ Q_9,\ Q_{-44},\ Q_{315},\ Q_{-350},\ Q_{-1015} \cdots Q_{m''},$$

und es ist allenthalben die Summe der Stellenzeiger entsprechender Q, also entsprechender Groß- und Kleinterzen

$$m' + m'' = 1,$$

eine wichtige Gleichung, in welcher ein Grundgesetz der Tonsysteme seine Wurzel hat.

Jetzt sind nur noch die Septimen übrig. Es sei eine solche $S_0 = \frac{7}{4}\zeta$, die ihr ähnliche Quinte $Q_n = \frac{3^n}{2^y}\zeta$, so muß durch ganze Werte von n und y

$$\frac{3^n}{2^y} = \frac{7}{4},\ \frac{3^n}{2^{y-2}} = 7 = \frac{3^n}{2^z},\ z = y - 2 \text{ gemacht werden.}$$

Übergehend zu den Logarithmen hat man

$$n \log 3 - z \log 2 = \log 7, \text{ oder}$$

$$4771213n - 3010300z = 8450980, \text{ hieraus}$$

$$n - z - 3 + \frac{1\,760\,913n + 579\,920}{3\,010\,300} = n - z - 3 + u = 0,$$

wo ebenso wie $n - z - 3$ notwendig auch annähernd

$$u = \frac{1\,760\,913n + 579\,920}{3\,010\,300} \text{ eine ganze Zahl sein muß;}$$

hieraus folgt:

$$2u - n - \frac{511\,526u + 579\,920}{1\,760\,913} = 2u - n - v = 0,$$

wo

$$v = \frac{511\,526u + 579\,920}{1\,760\,913} \text{ eine ganze Zahl vorstellt.}$$

Nahezu ist dies der Fall für $u = -1$, wo v nahe $= 0$ wird. Man gewinnt dadurch eine erste Septime:

$$u = -1,\ n = -2,\ z = -6,\ y = -4,\ Q_{-2} = 1 \cdot 77\,777\,\zeta.$$

Einen anderen Ton dieser Art minderen Ranges gibt

$$u = 6, \text{ wo } v \text{ nahe} = 2 \text{ wird; mithin}$$
$$u = 6,\ n = 10,\ z = 13,\ y = 15,\ Q_{10} = 1 \cdot 80203\,\zeta.$$

Aus der letzten Gleichung in v folgt

$$3v - u - 1 + \frac{226335v - 68394}{511526} = 3v - u - 1 + w = 0,$$

wo $w = \frac{226335v - 68394}{511526}$ eine ganze Zahl sein muß; hieraus folgt aber $2w - v + \frac{58856w + 68394}{226335} = 2w - v + \xi = 0$, mithin muß auch $\xi = \frac{58856w + 68394}{226335}$ eine ganze Zahl sein. Dies findet nahezu statt für $w = -1$, wo dann $\xi = 0$ wird. Dies gibt eine neue Septime:

$$w = -1,\quad v = -2,\quad u = -8,\quad n = -14,\quad z = -25,\quad y = -23,$$
$$Q_{-14} = 1.75384\,\zeta.$$

Aber auch $w = 3$ gibt ein ξ nahe an eins, also ist auch

$$w = 3,\quad v = 7,\quad u = 23,\quad n = 39,\quad z = 59,\quad y = 61,$$
$$Q_{39} = 1.175752\,\zeta.$$

eine annehmbare Septime.

Aus den letzten Gleichungen in ξ folgt

$$4\xi - w - 1 - \frac{9089\xi + 9538}{58856} = 4\xi - w - 1 - \eta = 0,$$

wo

$$\eta = \frac{9089\xi + 9538}{58856}$$

eine ganze Zahl vorstellt. Dies ist nahe der Fall für $\xi = -1$, wo η nahe Null wird.

Man erhält so eine sehr genaue Septime:

$$\xi = -1,\quad w = -5,\quad v = -11,\quad u = -39,\quad n = -67,\quad z = -109,$$
$$y = -107,\quad Q_{-67} = 1.75018\,\zeta.$$

Die folgenden Töne dieser Art tragen bereits sehr hohe Stellenzeiger, daher denn auch die Septimen in der Quintenreihe nur sehr spärlich vertreten sind.

Der klareren Übersicht halber mögen die bisher erhaltenen großen und entsprechenden kleinen Terzen und Septimen zusammengestellt sein.

$$
(21)\quad
\begin{array}{lll}
T_0 = Q_4 = 1.265625\zeta, & t_0 = Q_{-3} = 1.185185\zeta, & S_0 = Q_{-2} = 1.77778\zeta, \\
Q_{-8} = 1.24859\zeta, & Q_9 = 1.20136\zeta, & Q_{10} = 1.80203\zeta, \\
Q_{45} = 1.251205\zeta, & Q_{-44} = 1.198848\zeta, & Q_{-14} = 1.75384\zeta, \\
Q_{-314} = 1.249832\zeta, & Q_{315} = 1.200433\zeta, & Q_{39} = 1.75752\zeta, \\
Q_{351} = 1.24996\zeta, & Q_{-350} = 1.200076\zeta, & Q_{-67} = 1.75018\zeta, \\
Q_{1016} = 1.250088\zeta, & Q_{-1015} = 1.200023\zeta, & Q_{239} = 1.748403\zeta.
\end{array}
$$

Diese Groß- und Kleinterzen und Septimen sind aber nicht die einzigen, sondern nur die an Reinheit hervorragendsten derjenigen, von welchen ein Tonforscher bei der Konstruktion von Tonsystemen Gebrauch machen kann, und man erhält aus ihnen eine reiche Fülle von anderen meist niederen Ranges, wenn man sie mit einer der Quinten multipliziert, die der Einheit oder auch der Zahl 2 nahe kommen und die Stellenzeiger addiert.

Solche Quinten sind

$$
Q_{12} = 1.01364, \quad Q_{-12} = 1.97308, \quad Q_{41} = 1.97721, \quad Q_{-41} = 1.01153,
$$
$$
Q_{53} = 1.00209, \quad Q_{-53} = 1.99583.
$$

Sogar die Töne des vorliegenden Verzeichnisses können im allgemeinen so auseinander abgeleitet werden, z. B.

$$
Q_4 = Q_{-8} \cdot Q_{12}, \quad Q_{45} = Q_{-8} \cdot Q_{53}, \quad Q_{39} = Q_{-4} \cdot Q_{43},
$$
$$
Q_9 = Q_{-3} \cdot Q_{12} \text{ usw.}
$$

(Schluß folgt.)

Petzvals Theorie der Tonsysteme.

Herausgegeben von Dr. phil. L. Erményi, Ingenieur in Wien.

(Schluß.)

IV. Tonsysteme der ersten Klasse.

Um zu den Tonsystemen erster Klasse zu gelangen, bilden wir zunächst aus dem Verzeichnisse (19) der reinen Quinten temperierte. Dies geschieht durch Multiplikation einer jeden Zahl mit einer Potenz der Temperatur q, deren Exponent gleich dem Stellenzeiger des zu dieser Zahl gehörigen Tones ist. Wir heben dann aus dem Verzeichnisse heraus die Töne:

$$\begin{aligned} Q_4 &= 1.2656 q^4 \zeta = \frac{3^4}{2^6} q^4 \zeta = E, \\ Q_{-3} &= 1.1852 q^{-3} \zeta = \frac{2^5}{3^3} q^{-3} \zeta = Es, \\ Q_{10} &= 1.8029 q^{10} \zeta = \frac{3^{10}}{2^{15}} q^{10} \zeta = Ais. \end{aligned}$$

Dann temperieren wir aber auch die in den Formeln (18) verzeichnete große und kleine Terz und Septime durch Multiplikation mit T, t und s:

$$T_0 = 1.25 T\zeta = \frac{5}{4} T\zeta, \quad t_0 = 1.2 t\zeta = \frac{6}{5} t\zeta, \quad S_0 = 1.75 s\zeta = \frac{7}{4} s\zeta,$$

und stellen endlich die ähnlichen Schwingungszahlen von Q_4 und T_0, Q_{-3} und t_0, Q_{10} und S_0 einander gleich, was durch schickliche Wahl der Temperaturen T, t und s bewerkstelligt gedacht wird:

$$(22) \quad \begin{aligned} \frac{3^4}{2^6} q^4 \zeta &= \frac{5}{4} T\zeta, &&\text{also} \quad T = \frac{3^4}{2^4 \cdot 5} q^4 = \frac{81}{80} q^4, \\ \frac{2^5}{3^3 q^3} \zeta &= \frac{6}{5} t\zeta, &&\quad ,, \quad\ \ t = \frac{2^4 \cdot 5}{3^4 \cdot q^3} = \frac{80}{81\, q^3}, \\ \frac{3^{10}}{2^{15}} q^{10} \zeta &= \frac{7}{4} s\zeta, &&\quad ,, \quad\ \ s = \frac{3^{10}}{2^{13} \cdot 7} q^{10} = \frac{59049}{8192 \cdot 7} q^{10} = \frac{59049}{57344} q^{10}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen q unbestimmt. Man kann demselben mithin noch unendlich viele Werte beilegen und wird so zu unendlich vielen Tonsystemen der ersten Klasse gelangen. Nur muß jedesmal die Wahl des q so getroffen werden, daß weder q noch T, t und s viel von der Einheit verschieden ausfallen. Hiezu gehört aber wesentlich, daß $q < 1$ sei. Dies ist aber eine notwendige Eigenschaft aller Tonsysteme der ersten Klasse, denn wollte man $q > 1$ wählen, so hätte man

$$T > \frac{81}{80}, \quad t < \frac{80}{81}, \quad s > \frac{59049}{57344},$$

lauter heulende Wölfe. Hier erklärt es sich auch, warum als Repräsentant der Septime der Ton *Ais* mit der reinen Schwingungszahl $1.8020\,\zeta$ und nicht der der reinen Septime $1.75\,\zeta$ nähere Ton $B = 1.7778\,\zeta = \mathfrak{Q}_{-2}$ gewählt worden ist. Letzterer würde nämlich anstatt der dritten der Gleichungen (22) für s die folgende andere geliefert haben:

$$\frac{2^6}{3^2 \cdot 7 \cdot q^2} = \frac{64}{63 \cdot q^2},$$

die für jedes bei Tonsystemen erster Klasse zulässige $q < 1$ einen heulenden Wolf vorstellt, für $q = 1$ jedoch noch den Vorzug behält.

Multipliziert man nun die zwei ersten der Gleichungen (22) miteinander, so ergibt sich die merkwürdige Gleichung

$$Tt = q, \tag{24}$$

die ein Grundgesetz aller Tonsysteme enthält, nämlich: *Das Produkt der Temperaturen der großen und kleinen Terz ist gleich der Temperatur der Quinte.*

Dieser Satz läßt sich noch anders aussprechen. Man hat nämlich aus der vorhergehenden Gleichung auch

$$\frac{5}{4}T \cdot \frac{6}{5}t = \frac{3}{2}q,$$

mithin

$$\log\frac{5}{4}T + \log\frac{6}{5}t = \log\frac{3}{2}q$$

Nun sind $\frac{5}{4}T$, $\frac{6}{5}t$, $\frac{3}{2}q$ diejenigen Faktoren, mit welchen man die Schwingungszahl eines Tones multiplizieren muß, um jene seiner großen, kleinen Terz und Quinte zu erhalten, oder mit anderen Worten die Schwingungsverhältnisse der genannten Intervalle. Man kann also auch sagen: *Die temperierte große und kleine Terz ergänzen sich zur temperierten Quinte in dem Sinne, daß die Summe der Logarithmen der Schwingungsverhältnisse der Terzen den Logarithmus des Schwingungsverhältnisses der Quinte gibt.*

Es fragt sich, ob dieser merkwürdige Satz auf die Tonsysteme der ersten Klasse beschränkt ist, und wenn nicht, auf welche anderen er auch ausgedehnt werden kann. Er verdankt sein Bestehen folgendem Umstande. Weil die vierte temperierte Quinte vom Grundtone aus, nämlich $q^4 Q_4$, zugleich die temperierte Großterz T_0 ist, und weil die dritte Quarte vom Grundtone aus, $q^{-3} Q_{-3}$, zugleich die temperierte Kleinterz t_0 ist, so bestehen die Gleichungen

$$T_0 = q^4 Q_4 \quad \text{und} \quad t_0 = q^{-3} Q_{-3},$$

aus welcher durch Multiplikation

$$T_0 t_0 = q Q_1$$

erhalten wird. Der Grund der Richtigkeit des obigen Satzes ist also, daß die Stellenzeiger derjenigen Quinten Q, die zugleich die Rolle der großen und kleinen Terz übernehmen, summiert Eins geben. Nun haben wir aber im vorhergehenden Abschnitte gesehen und im Verzeichnisse (21) klar vor Augen gelegt, daß zu jeder Großterz $Q_{m'}$ eine Kleinterz $Q_{m''}$ desselben Ranges vorhanden ist mit

$$m' + m'' = 1.$$

Der fragliche Satz gilt also für alle jene Tonsysteme, bei welchen die großen und kleinen Terzen in derselben Weise gepaart vorkommen.

Um nun auch noch eine andere allgemeine Eigenschaft der Tonsysteme der ersten Klasse zu erkennen, legen wir uns den über dem Grundtone C konstruierten Dreiklang CEG vor mit der musikalischen und arithmetischen Bezeichnung und den Schwingungszahlen seiner Bestandtöne:

$$C = Q_0 = \zeta, \quad E = Q_4 = \frac{3^4}{2^6} q^4 \zeta = 1.265625 q^4 \zeta, \quad G = Q_1 = \frac{3}{2} q \zeta = 1.5 q \zeta.$$

Da die temperierte Unterdominante F die Schwingungszahl $\frac{4}{3q}\zeta$ besitzt, so wird man durch Multiplikation mit $\frac{4}{3q}$ vorstehende Töne in FAC, d. h. den Dreiklang der Unterdominante verwandeln:

$$F = Q_{-1} = \frac{4}{3q} \zeta = \frac{1.33333}{q} \zeta, \quad A = Q_3 = \frac{3^3}{2^4} q^3 \zeta = 1.6875 q^3 \zeta, \quad C = 2\zeta = Q_0.$$

Die Oberdominante G hat die Schwingungszahl $\frac{3}{2} q\zeta$, man erhält mithin den Dreiklang der Oberdominante ebenso durch Multiplikation mit $\frac{3}{2} q$

$$G = \frac{3}{2} q \zeta = 1.5 q \zeta = Q_1, \quad H = \frac{3^5}{2^7} q^5 \zeta = 1.89844 q^5 \zeta = Q_5,$$
$$D = \frac{3^2}{2^3} q^2 \zeta = 1.125 q^2 \zeta = Q_2.$$

Wichtige Töne sind noch die kleine Terz *Es* der Tonika *C* und die Septime *Eis* der Oberdominante *G*. Sie erhalten in sämtlichen temperierten Tonsystemen erster Klasse die Schwingungszahlen:

$$Es = Q_{-3} = \frac{2^5}{3^3 q^3}\zeta = \frac{1.185185}{q^3}\zeta, \quad Eis = Q_{11} = \frac{3^{11} q^{11}}{2^{17}}\zeta = 1.351524 q^{11}\zeta.$$

Aus den Tönen oben genannter 3 Dreiklänge, geordnet nach der Größe ihrer Schwingungszahlen, setzt sich die Dur-Tonleiter über dem Grundtone (Tonika) $C = Q_0$ zusammen:

C	D	E	F	G	A	H	C
$Q_0,$	$Q_2,$	$Q_4,$	$Q_{-1},$	$Q_1,$	$Q_3,$	$Q_5,$	$Q_0,$
$\zeta,$	$\frac{3^2}{2^3}q^2\zeta,$	$\frac{3^4}{2^6}q^4\zeta,$	$\frac{2^2}{3\cdot q}\zeta,$	$\frac{3}{2}q\zeta,$	$\frac{3^3}{2^4}q^3\zeta,$	$\frac{3^5}{2^7}q^5\zeta,$	$2\zeta,$
$\zeta,$	$1.125q^2\zeta,$	$1.2656q^4\zeta,$	$\frac{1.3333}{q}\zeta,$	$1.5q\zeta,$	$1.6875q^3\zeta,$	$1.8984q^5\zeta,$	$2\zeta.$

Aus den Schwingungszahlen dieser Töne folgt znnächst:

$$\frac{D}{C} = \frac{E}{D} = \frac{G}{F} = \frac{A}{G} = \frac{H}{A} = \frac{3^2}{2^3}q^2 = 1.125q^2.$$

In sämtlichen Tonsystemen erster Klasse sind daher die ganzen Töne alle gleich, und es wird kein Unterschied zwischen großen und kleinen Tönen gemacht, wie er in der reinen Tonleiter besteht. Dies ist nun allerdings eine Abweichung vom reinen Wohllaute, die nur dadurch unmerklich gemacht werden kann, daß man sie auf die dissonanten Intervalle wirft.

Ferner ergibt sich noch

$$\frac{F}{E} = \frac{C}{H} = \frac{2^8}{3^5 q^5} = \frac{1.0535}{q^5}$$

und

$$\frac{E}{Es} = \frac{Eis}{E} = \frac{3^7}{2^{11}}q^7 = 1.0679q^7,$$

$$\frac{F}{Eis} = \frac{2^{19}}{3^{12}q^{12}} = \frac{1}{1.01364\, q^{12}}.$$

Mithin ist der große Halbton $\frac{F}{E}$ von dem kleinen Halbtone $\frac{E}{Es}$ im allgemeinen verschieden, ausgenommen, es wäre q so beschaffen, daß

$$\frac{2^8}{3^5 q^5} = \frac{3^7}{2^{11}}q^7, \quad \text{also} \quad \frac{3^{12}}{2^{19}}q^{12} = 1,$$

$$q = \sqrt[12]{0.986541} = 0.99887$$

ist.

Dies ist die wohlbekannte Temperatur der Quinte im 12-stufigen, chromatischen Systeme; also in diesem und nur in diesem ist der große

Halbton dem kleinen gleich. Mit dem Zusammenfallen der beiden Halbtöne wird aber auch $F = Eis$, d. h. die Unterdominante ist auch zugleich die Septime des Septimenakkords der Oberdominante.

Bei allen anderen Tonsystemen der ersten Klasse, in welchen $q < 0 \cdot 99887$, ist der große Halbton größer als der kleine, und die Septime tiefer als die Unterdominante. Gäbe es hingegen brauchbare Tonsysteme erster Klasse, in welchen $q > 0 \cdot 99887$, wo dieses q der Einheit noch näher käme als im chromatischen, also mit noch reineren Quinten, so wäre in denselben der kleine Halbton größer als der große, und die Septime höher als die Unterdominante. Daß es derlei Brauchbares nicht geben kann, liegt auf der Hand.

Endlich ist noch vermöge der oben angeführten Gleichungen

$$\frac{E}{Es} \cdot \frac{F}{E} = \frac{F}{Es} = \frac{3^2}{2^3} q^2 = \text{einem ganzen Tone},$$

$$\frac{Eis}{E} \cdot \frac{F}{Eis} = \frac{F}{E} = \frac{2^8}{3^5 q^5} = \text{einem großen halben Tone}.$$

Also setzen sich der große und der kleine Halbton zu einem ganzen Tone, und der kleine Halbton und das Intervall $\frac{F}{Eis}$ zu einem großen Halbton zusammen.

Selbstverständlich läßt sich über einem jeden der temperierten Quintenreihe entnommenen Q_p nicht nur ein Dreiklang, sondern auch eine ganze Tonleiter aufbauen, sowie über dem Grundtone Q_0. Die allgemeine Formel für diese Tonleiter geht aus derjenigen für den Grundton Q_0 hervor, indem man p Einheiten zu den Stellenzeigern sämtlicher Töne Q addiert, unter p eine beliebige, ganze, positive oder negative Zahl verstanden. Diese Formel ist also

$$Q_p, \quad Q_{p+2}, \quad Q_{p+4}, \quad Q_{p-1}, \quad Q_{p+1}, \quad Q_{p+3}, \quad Q_{p+5}, \quad Q_p.$$

In allen für verschiedene Werte von p in dieser Formel enthaltenen Tonleitern haben die korrespondierenden Intervalle einerlei Größe; der ganze Ton, die beiden Halbtöne sind überall dieselben. Die Konsonanzen, Quinte, Quarte, Terzen und Septimen sind in allen gleich temperiert.

Auch für die Molltonleiter über dem Grundtone Q_p läßt sich eine ähnliche Formel aufstellen, zu der man auf demselben Wege gelangt. Der dem Grundtone $Q_0 = C$ angehörige Moll-Akkord ist nämlich C, Es, G.

$$C = Q_0 = \zeta, \quad Es = Q_{-3} = \frac{2^5}{3^3 q^3} \zeta, \quad G = Q_1 = \frac{3}{2} q \zeta.$$

Durch Multiplikation mit $\frac{4}{3q}$, ebenso mit $\frac{3}{2}q$ bewerkstelligt man die Verwandlung desselben in die Moll-Dreiklänge.

$$F,\ As,\ C \quad \text{und} \quad G,\ B,\ D.$$

$$Q_{-1} = F = \frac{2^2}{3q}\zeta, \quad Q_{-4} = As = \frac{2^7}{3^4 q^4}\zeta,\ Q_0 = C = 2\zeta,$$

$$Q_1 = G = \frac{3}{2}q\zeta, \quad Q_{-2} = B = \frac{2^4}{3^2 q^2}\zeta,\ Q_2 = D = \frac{3^2}{2^3}q^2\zeta.$$

Aus den Tönen dieser 3 Moll-Dreiklänge entsteht die Molltonleiter über dem Grundtone Q_0

$$\begin{array}{cccccccc} C & D & Es & F & G & As & B & C \\ Q_0 & Q_2 & Q_{-3} & Q_{-1} & Q_1 & Q_{-4} & Q_{-2} & Q_0. \end{array}$$

Und indem man p Einheiten zu den Stellenzeigern sämtlicher Töne Q hinzufügt, erhält man die allgemeine Formel aller Moll-Tonleitern über dem unbestimmten Grundtone Q_p:

$$Q_p \quad Q_{p+2} \quad Q_{p-3} \quad Q_{p-1} \quad Q_{p+1} \quad Q_{p-4} \quad Q_{p-2} \quad Q_p.$$

Die arithmetische Nomenklatur kann hier sowohl, wie auch in der allgemeinen Formel der Dur-Tonleitern in die musikalische für jedes bestimmte p mit Hilfe der Quintentabelle übertragen werden. Für die vorliegenden Zwecke ist dies jedoch nicht notwendig.

Der Musiker braucht, um die in verschiedenen Tonarten geschriebenen Tonstücke spielen zu können, die Töne mehrerer Tonleitern, und weil vorzugsweise verwandte Tonarten in Anwendung kommen, so bilden die Grundtöne dieser benötigten Tonleitern eine Reihe kontinuierlich fortschreitender Quinten in gewisser Anzahl. Die moderne Musik setzt deren 12 fest. Dies war jedoch nicht zu allen Zeiten gleich, leidet auch jetzt für gewisse Instrumente eine Ausnahme und könnte vielleicht in Zukunft anders werden.

Nehmen wir also, um allgemein zu sprechen, an, der Musiker brauche $p+1$ Tonleitern über den $p+1$ Grundtönen (Toniken)

$$Q_0,\ Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ \ldots,\ Q_{p-1},\ Q_p$$

und zwar in Dur wie in Moll, so lehrt der Anblick der über den äußersten Tönen Q_0 und Q_p aufgebauten Dur- und Moll-Tonleitern, daß hiezu alle Töne benötigt werden aus der folgenden Quintenreihe:

$$Q_{-4},\ Q_{-3};\ Q_{-2},\ Q_{-1},\ Q_0,\ Q_1,\ Q_2,\ \ldots,\ Q_{p-1},\ Q_p,\ \ldots,\ Q_{p+5}.$$

Sie sind $p+10$ an der Zahl, also um 9 mehr, als Dur-Tonarten. Die letzten 6 von ihnen ermangeln zudem der reinen Septime des Oberdominant-Septimenakkordes, und müssen sich anstatt dieser, mit der Unterdominante behelfen. Will man diesem Mangel abhelfen, und allen Tonarten echte Septimen verschaffen, so muß man die vorliegende Reihe bis Q_{p+11} fortsetzen, was $p+16$ Töne gibt, also um 15 mehr als Dur-Tonarten.

Dies gilt jedoch nur unter der Voraussetzung, daß alle diese $p+16$ Töne voneinander verschieden sind; befinden sich hingegen unter ihnen einander gleiche, dann kann oft eine namhafte Ersparnis an Tonmitteln erzielt werden. Ein solches Zusammenfallen mehrerer Töne in einen findet aber nur in geschlossenen, in sich zurückkehrenden Tonsystemen statt, und die Ersparnis ist dann am größten, wenn es gelingt, ein geschlossenes Tonsystem von $p+1$ Stufen d. h. von so vielen, als Tonleitern benötigt werden, aufzufinden.

In einem solchen ist nämlich

$$\begin{array}{llll} Q_{p+1} = Q_0, & Q_{p+2} = Q_1, & Q_{p+3} = Q_2, & \ldots, \; Q_{p+11} = Q_{10}, \\ Q_p \;\; = Q_{-1}, & Q_{p-1} = Q_{-2}, & Q_{p-2} = Q_{-2}, & \ldots, \; Q_{p-3} \; = Q_{-4} \end{array}$$

und nur die $p+1$ Töne

$$Q_0, \quad Q_1, \quad Q_2, \ldots, Q_p$$

sind wirklich voneinander verschieden. Man hat daher mit nur $p+1$ Tönen ebenso viele Tonleitern, die gleichmäßig mit allen konsonanten und dissonanten Intervallen versehen sind. Das geschlossene Insichzurückkehren des Tonsystems erspart mithin wenigstens 9 Töne, und wenn dasselbe mit einer guten, dem reinen Schwingungsverhältnisse $\frac{7}{4}$ nahe genug kommenden Septime versehen ist, sogar 15 Töne.

Da nun solchergestalt die geschlossenen Tonsysteme unter übrigens ähnlichen Umständen vor anderen einen bedeutenden Vorzug behaupten, so entsteht die wichtige Frage: Gibt es außer dem üblichen 12stufigen chromatischen noch andere geschlossene Tonsysteme der ersten Klasse, und welches ist ihre Stufenzahl?

Diese Frage zu beantworten, bringen wir in Erinnerung, daß, wie im II. Abschnitte bewiesen worden ist, die Töne eines geschlossenen $(p+1)$-stufigen Tonsystems, wenn man sie nach ihrer Höhe d. h. Größe der Schwingungszahlen ordnet, eine geometrische Progression bilden, wie

$$\zeta, \quad \alpha\zeta, \quad \alpha^2\zeta, \quad \alpha^3\zeta, \ldots, \alpha^p\zeta, \quad \alpha^{p+1}\zeta,$$

in welcher $\alpha^{p+1} = 2$ ist. Ein jedes in der Tonleiter vorkommende Intervall erhält von den $(p+1)$ Stufen, in welche die Oktave zerfällt, eine bestimmte, offenbar ganze Zahl. Das kleinste Intervall ist in den

Tonsystemen erster Klasse das zwischen dem großen und kleinen Halbton bestehende, wie oben nachgewiesen wurde. Nehmen wir an, dieses kleinste Intervall habe k solche Stufen, der kleine Halbton deren m, so hat der große Halbton deren $m + k$. Der ganze Ton besteht aus einem großen, und einem kleinen Halbtone, hat mithin $2m + k$ Stufen. Die Tonleiter zählt 5 ganze Töne und 2 große Halbtöne, hat also im ganzen $p + 1 = 12m + 7k$ Stufen.

Verschiedenen Werten von k und m entsprechen verschiedene geschlossene Tonsysteme, und zwar gibt die Voraussetzung $k = 0$ die erste Gattung derselben, nämlich Tonsysteme, die für

$$\begin{aligned} m &= 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\ldots \\ (p+1) = 12m &= 12,\quad 24,\quad 36,\quad 48,\ldots \end{aligned}$$

Stufen enthalten. Sie sind nicht voneinander verschieden, sondern fallen alle in das einzige, wohlbekannte 12stufige System zusammen, welches mithin allein für sich eine Gattung bildet.

Die zweite Gattung bekommt man für $k = 1$. Hier entsprechen den angenommenen Werten von m

$$\begin{aligned} m &= 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\ldots \\ p + 1 = 12m + 7 &= 19,\quad 31,\quad 43,\quad 55,\quad 67,\ldots \text{ stufige} \end{aligned}$$

Tonsysteme. Ihre Quintentemperaturen erhält man, wenn man der Reihe nach

$$\begin{array}{llllll} Q_0 = Q_{19}, & Q_{31}, & Q_{43}, & Q_{55}, & Q_{67}, & \ldots \\ \text{das heißt } 1 = 1.0824q^{19}, & 1.0972q^{31}, & 1.1122q^{43}, & 1.1274q^{55}, & 1.1427q^{67}, & \ldots \\ \text{setzt, was } q = 0.99584, & 0.997012, & 0.997530, & 0.997822, & 0.998009 & \end{array}$$

ergibt.

Eine dritte Gattung erhält man für $k = 2$, was für die Werte von m

$$\begin{aligned} m &= 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\ldots \\ p + 1 = 12(m+1) + 2 &= 26,\quad 38,\quad 50,\quad 62,\quad 74,\ldots \end{aligned}$$

Stufen zur Folge hat. Die entsprechenden Quintentemperaturen gewinnt man hier der Reihe nach, indem man

$$\begin{array}{llll} Q_0 = Q_{26}, & Q_{38}, & Q_{50}, & \ldots, \\ \text{das heißt } 1 = 1.1559q^{26}, & 1.1717q^{38}, & 1.1877q^{50}, & \ldots \end{array}$$

setzt.

Hier kommen auch Tonsysteme vor, die wir als zur zweiten Gattung gehörend kennen gelernt haben. Jedes zweite der vorliegenden Reihe ist ein solches: Das 38stufige ist mit dem 19stufigen der zweiten Gattung, das 62stufige mit dem 31stufigen usw. identisch, sodaß als wesentlich zur dritten Gattung gehörig nur die Tonsysteme mit 26, 50, 74 ... Stufen zu betrachten sind. Sie entsprechen den ungeraden Werten von m, daher man die eigentliche Formel für die Tonsysteme der dritten Gattung erhalten wird, wenn man $m = 2n + 1$ setzt, nämlich:

$$p + 1 = 24\,(n + 1) + 2.$$

Man könnte nun noch $k = 3, 4, 5, \ldots$ setzen und so eine 4te, 5te, 6te Gattung aufstellen. Allein die Stufenzahlen werden immer größer, die Werte von q immer ungünstiger, und man überzeugt sich bald, daß, was man in den 3 ersten Gattungen nicht findet, in den folgenden vergebens gesucht wird.

Das sind die allgemeinsten Eigenschaften der Tonsysteme erster Klasse. Um weitere kennen zu lernen, muß man sich in nähere Untersuchungen einlassen. Sie können daher erst später zur Sprache kommen.

Aus den Gleichungen (22) gehen alle die unendlich vielen Tonsysteme der ersten Klasse hervor, und ein jeder Musiker, der sich mit der Absicht trägt, ein neues aufzustellen, kann sich dasselbe nach Belieben wählen, und kann diese Wahl entweder nach wissenschaftlichen Grundsätzen treffen, oder nach richtigen oder unrichtigen vorgefaßten Meinungen, oder nach einer besonderen Vorliebe für irgend eine Konsonanz, oder nach anderen Beweggründen.

Um zu zeigen, wie dies zu geschehen hat, führen wir diejenigen Tonsysteme erster Klasse, die bisher bekannt geworden sind, zuerst vor, hiebei freilich von der unstatthaften doppelten Fiktion ausgehend, daß den Erfindern derselben die Gleichungen (22) vorgelegen seien, und daß sie das, was sie wirklich gefunden haben, mit allen seinen Eigenschaften auch haben finden wollen.

Nehmen wir an, der erste dieser fiktiven Tonsystem-Erfinder sei ein konsequenter Quintenpuritaner, der seine Meinung etwa auf folgende Weise formuliert: Die vollkommenste und edelste aller Konsonanzen ist unbestrittener Maßen die Oktave, sie ist auch die allerempfindlichste gegen Verfälschung, und hat infolge ihrer nahen Verwandtschaft mit dem Grundtone und ihrer außerordentlichen Empfindlichkeit das Vorrecht, untemperiert zu bleiben. Die Quinte ist aber von derselben direkten Abkunft; nach der Oktave die vollkommenste aller Konsonanzen übertrifft sie diese noch an Lieblichkeit und Macht der Wirkung in der Musik. Gegen Verfälschung ist sie ebenso empfindlich wie die Oktave. Das Reinheitsprivilegium darf daher nicht der Oktave allein gebühren, sondern muß auf die Quinte ausgedehnt werden. Da also ein Tonsystem mit absolut reinen Quinten verlangt wird, ist $q = 1$ zu setzen und die Gleichungen (22) geben

$$(25) \qquad T = \frac{81}{80} = 1 + \frac{1}{80}, \; t = \frac{80}{81} = 1 - \frac{1}{81}.$$

Die Temperatur der Septime kann entweder den Gleichungen (22) oder (23) entnommen werden; da letzteres hier das vorteilhaftere ist, so wird man

$$(26) \qquad s = \frac{64}{63} = 1 + \frac{1}{63}$$

erhalten. Dies ist das griechische Tonsystem des *Pythagoras*.

Hier mögen einige Bemerkungen zu diesem Beispiele angefügt sein, die zum richtigen Verständnis des behandelten Gegenstandes vielleicht mehr beizutragen geeignet sind, als das Beispiel selbst. Der Erfinder des griechischen Tonsystems ist ein fiktiver, d. h. die Griechen haben zwar ihr Tonsystem erfunden, waren mithin Quintenpuritaner, tatsächlich aber waren sie dies nicht aus Grundsatz, denn eine eigentliche Theorie kannten sie nicht, sonst hätten sie wohl einen ganz anderen Gebrauch davon gemacht. Es ist ein erheblicher Unterschied zwischen einem, von einer richtigen mathematischen Theorie geleiteten Erfinder und einem anderen, der dieses Hilfsmittel entbehrt. Der erste gleicht einem Manne, der mit der Formel als Quittung in der Hand zu einer Kasse geht und sich einen bestimmten durch die Formel festgestellten Betrag ausbezahlen läßt. Der andere dagegen einem Manne, der auf der Straße umherirrt in der Hoffnung, einen vollen Geldbeutel zu finden. Manchmal findet er wirklich einen solchen, manchmal etwas ganz anderes, oft gar nichts, und hat meistenteils auch im günstigsten Falle keinen Anhalt zur Beurteilung, ob er mit seinem Funde zufrieden zu sein Ursache habe, oder mehr zu suchen Veranlassung nehmen solle.

Die bisher bekannt gewordenen Tonsysteme sind meist auf dem Wege eines Versuches und nicht auf Grundlage einer umfassenden Theorie erfunden, gleichen also immerhin einem gefundenen Geldbeutel, bei dem man nicht fragen darf, warum der Erfinder nicht mehr gefunden oder warum er nicht lieber Gold gefunden habe statt Silber. Der Mathematiker hingegen muß seinen klaren Willen darlegen, er darf nicht etwas anderes wollen und etwas anderes erreichen. Eine wohlgeordnete mathematische Theorie der Tonsysteme darf sich daher keineswegs darauf beschränken, dem Leser nur einige, wenn auch sehr gute Tonsysteme mit lobender Kritik und Empfehlung vorzuführen. Sie muß vielmehr demselben alle möglichen, systematisch eingeteilt in Klassen und Gattungen, mit Angabe der allgemeinen und besonderen Eigenschaften vorlegen. Dies ist aber noch nicht genug. Sie hat den

Leser noch überdies in der zu treffenden Auswahl zu leiten, jedoch nicht dadurch, daß sie ihm eine bestimmte Ansicht aufzudringen sucht, sondern dadurch, daß sie ihn lehrt, seine eigene wie immer geartete Ansicht in die mathematische Sprache zu übertragen, und der Analysis dasjenige Tonsystem, welches dieser seiner Ansicht am vollkommensten entspricht, methodisch abzufragen und tabellarisch übersichtlich in der ganzen Ausdehnung der musikalischen Praxis berechnet vorzulegen. Das einfachste Mittel zu diesem Zwecke schien die Vorführung fiktiver Tonliebhaber mit den verschiedenartigsten Ansichten zu sein, die man diese ihre Ansichten genau formulieren, und teilweise der Klarheit wegen auch begründen läßt, und denen man dann mit Hilfe geregelter mathematischer Methoden die angestrebten Zwecke erreichen und die besonderen Ansichten verwirklichen hilft. Selbstverständlich werden niemand, und wäre es auch der Erfinder eines Tonsystems selbst, derlei An- oder Absichten zugemutet. Am allerwenigsten bekennt sich aber die Theorie zu irgend einer derselben. Diese hat vielmehr und vertritt keine besondere Ansicht, sondern betrachtet alle vollständig aufgezählten Tonsysteme als ebenbürtige und gleichberechtigte Auflösungen eines und desselben mathematischen Problems.

Die zweite Bemerkung ist: Die Tonsysteme *erster Klasse* vertragen sich mit den reinen Quinten nicht, indem sie dieselben nur um den Preis sehr falscher Terzen und Septimen erkaufen lassen. Viel besser befreunden sie sich mit reinen Terzen und Septimen, wie in der Folge dieser Untersuchung erhellen soll. Liebhaber reiner Quinten sind daher genötigt, ihre Zuflucht zu den Tonsystemen der zweiten Klasse zu nehmen, wo sie wirklich erhalten, was sie wünschen.

Führen wir uns jetzt einen zweiten fiktiven Tonliebhaber vor, der seine Wünsche folgendermaßen in Worte kleidet: Ich erkenne den hohen Wert reiner Oktaven und Quinten an, aber ich kann doch billig verlangen, daß man damit auch praktische Musik machen könne, und zwar mit bescheidenen Tonmitteln. Hiezu braucht man aber bei einer mäßigen Anzahl von Tönen eine genügende Auswahl von Tonleitern, die wieder am besten in einem geschlossenen, in sich zurückkehrenden Tonsysteme zu haben sind. Ich wünsche also ein solches, auch wenn es mit einem kleinen Opfer an Reinheit der Quinten erkauft werden müßte. Diesem Begehren wird durch das gegenwärtig im Gebrauche stehende 12stufige, chromatische Tonsystem Genüge geleistet, welches wir im Vorhergehenden bereits sattsam kennen gelernt haben. Die Temperaturen der konsonanten Intervalle in demselben sind:

$$(27) \qquad q = 1 - \frac{1}{887}, \; T = 1 + \frac{1}{126}, \; t = 1 - \frac{1}{111}, \; s = 1 + \frac{1}{55}.$$

Der Vergleich dieser Zahlen mit denen des Pythagoräischen Tonsystems lehrt, daß man durch ein sehr geringes Opfer von $\frac{1}{887}$ der Schwingungszahl, gebracht an der Reinheit der Quinte, eine sehr merkliche Aufbesserung um beiläufig den 3fachen Betrag bei den beiden Terzen erzielt hat. Die Septime hat sich aber verschlimmert in einem Maße, daß man genötigt ist anzunehmen, die reine Septime sei im chromatischen Systeme durch gar keinen Ton vertreten.

Gehen wir jetzt von den Verehrern reiner Quinten zur Voraussetzung eines Tonforschers über, der ein anderes Intervall, etwa die kleine Terz in besonderen Schutz nimmt, also ein Tonsystem zu haben wünscht, in welchem $t = 1$ ist; mithin ist vermöge der Gleichung (24) $q = T$, und infolge der zweiten der Gleichungen (22):

$$(28) \qquad 1 = \frac{80}{81 \cdot q^3}, \text{ also } q = \sqrt[3]{\frac{80}{81}} = \frac{4 \cdot 30887}{4 \cdot 32675} = 1 - \frac{1}{242} = T.$$

Diese Zahl belehrt uns, daß man die reine kleine Terz nicht umsonst erhalte, sondern mit einem namhaften Opfer an Reinheit der Quinte bezahlen müsse. Aber auch alle übrigen Eigenschaften eines Tonsystems sind nur um den Preis zu haben, z. B. das geschlossene Rückkehren in sich selbst. Und wenn man das in Rede stehende Tonsystem in ein geschlossenes umschaffen will, muß man so fragen: Wie viel muß man von der absoluten Reinheit der kleinen Terz ablassen, um dafür ein geschlossenes Tonsystem zu erhalten?

Die Antwort auf diese Frage erstreben wir so: Ein geschlossenes m-stufiges Tonsystem ist vorhanden, wenn man in der Quintenreihe einen Ton Q_m entdecken kann, der für irgend ein q dem Grundtone Q_0 gleich wird.

Setzen wir also $Q_0 = Q_m$, das heißt:

$\zeta = \frac{3^m}{2^\alpha} q^m \zeta$, und untersuchen, ob dieser Gleichung nicht

für den obigen Wert von q oder einen sehr wenig davon verschiedenen und für irgend welche ganzzahligen Werte von m und α Genüge zu leisten wäre. Die Gleichung schreiben wir in folgender Gestalt:

$$(29) \qquad \frac{3^m}{2^m} q^m = 2^{\alpha - m} = 2^x, \text{ wo } \alpha - m = x \text{ ist.}$$

Hieraus folgt:

$$(30) \qquad q = \frac{1}{3} 2^{\frac{\alpha}{m}} = \frac{1}{3} 2^{\frac{m+x}{m}} = \frac{2}{3} 2^{\frac{x}{m}} \text{ und}$$

$$(31) \qquad \frac{x}{m} = \frac{\log 3 + \log q}{\log 2} - 1.$$

Die letztere dieser beiden Gleichungen suchen wir nun annäherungsweise aufzulösen in ganzen Zahlen für x und m; wir setzen zu diesem Behufe anstatt q den durch die Gleichung (28) gegebenen Wert und entwickeln sodann den zweiten Teil der Gleichung (31) in einen Kettenbruch. Der demselben am nächsten kommende Näherungsbruch kann dann für $\frac{x}{m}$ genommen werden. Es wird so:

$$\frac{x}{m} = \frac{4\,753\,229}{3\,010\,300} - 1$$

$$= \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 - \frac{2351}{159\,303}}}}}}.$$

Der zum letzten Nenner 2 hinzugefügte negative Ergänzungsbruch ist so klein, daß er vernachlässigt werden kann. Man bekommt also einen sehr genauen Näherungsbruch:

$$\frac{x}{m} = \frac{11}{19}, \tag{32}$$

aus welchem zu schließen ist, daß es wirklich ein geschlossenes 19stufiges Tonsystem in der nächsten Nähe desjenigen mit absolut reinen kleinen Terzen gebe.

Seine Quintentemperatur entspricht aber nicht der Gleichung (28), sondern muß aus der Gleichung (30) für $\frac{x}{m} = \frac{11}{19}$ neu berechnet werden:

$$\log q = -0 \cdot 0\,018\,108$$
$$q = 0 \cdot 99\,584 = 1 - \frac{1}{240} = \frac{239}{240}.$$

Mit Hilfe dieser Werte des q und seines Logarithmus schreitet man zur neuen Berechnung von T, t und s aus den Formeln (22) und erhält

$$T = 0 \cdot 995\,753 = 1 - \frac{1}{235} = \frac{234}{235}$$

$$t = 1 \cdot 0000865 = 1 + \frac{1}{11\,560} = \frac{11\,561}{11\,560}$$

$$s = 0 \cdot 98\,768 = 1 - \frac{1}{81} = \frac{80}{81}.$$

Das geschlossene 19stufige Tonsystem hätten wir also ziemlich billig erhalten, gegen ein Opfer von $\frac{1}{11\,560}$ der Schwingungszahl der kleinen Terz. Die Töne folgen in diesem Systeme einer geometrischen Progression, deren Quotient $\sqrt[19]{2} = 1 \cdot 037\,155$ ist.

Sie sind:

$$
\begin{aligned}
Q_0 &= C = \zeta && = \zeta \\
Q_7 &= Cis = 1\cdot 0372\,\zeta && = \zeta\sqrt[19]{2} \\
Q_{-5} &= Des = 1\cdot 07\,569\,\zeta && = \zeta\sqrt[19]{2^2} \\
Q_2 &= D = 1\cdot 11\,566\,\zeta && = \zeta\sqrt[19]{2^3} \\
Q_9 &= Dis = 1\cdot 15\,711\,\zeta && = \zeta\sqrt[19]{2^4} \\
Q_{-3} &= Es = 1\cdot 20\,010\,\zeta && = \zeta\sqrt[19]{2^5} \\
Q_4 &= E = 1\cdot 24\,459\,\zeta && = \zeta\sqrt[19]{2^6} \\
Q_{11} &= Eis = 1\cdot 29\,094\,\zeta && = \zeta\sqrt[19]{2^7} = Fes \\
Q_{-1} &= F = 1\cdot 33\,881\,\zeta && = \zeta\sqrt[19]{2^8} \\
Q_6 &= Fis = 1\cdot 38\,851\,\zeta && = \zeta\sqrt[19]{2^9} \\
Q_{-6} &= Ges = 1\cdot 44\,024\,\zeta && = \zeta\sqrt[19]{2^{10}} \\
Q_1 &= G = 1\cdot 49\,376\,\zeta && = \zeta\sqrt[19]{2^{11}} \\
Q_8 &= Gis = 1\cdot 54\,926\,\zeta && = \zeta\sqrt[19]{2^{12}} \\
Q_{-4} &= As = 1\cdot 60\,682\,\zeta && = \zeta\sqrt[19]{2^{13}} \\
Q_3 &= A = 1\cdot 66\,652\,\zeta && = \zeta\sqrt[19]{2^{14}} \\
Q_{10} &= Ais = 1\cdot 72\,844\,\zeta && = \zeta\sqrt[19]{2^{15}} \\
Q_{-2} &= B = 1\cdot 79\,266\,\zeta && = \zeta\sqrt[19]{2^{16}} \\
Q_5 &= H = 1\cdot 85\,927\,\zeta && = \zeta\sqrt[19]{2^{17}} \\
Q_{-7} &= Ces = 1\cdot 92\,835\,\zeta && = \zeta\sqrt[19]{2^{18}} = His \\
Q_0 &= C = 2\,\zeta && = \zeta\sqrt[19]{2^{19}}.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Dieses ist das Tonsystem *Opelts.* Es besitzt sehr schätzbare Eigenschaften, die es in der Tat empfehlen. Zwar ist die Reinheit der Intervalle eine mäßige. Allein schon der Umstand, daß ein so intelligenter und erfahrener Musiker und Akustiker wie Opelt sein Tonsystem dem musikalischen Publikum empfehlen konnte, beweist zur Genüge, daß $\frac{239}{240}$ wenigstens für die große Mehrzahl musikalischer Instrumente eine sehr gut zulässige Temperatur der Quinte sei.

Es scheint übrigens gerade die rechte Anzahl von Tönen zu besitzen, weder zu wenig, noch zu viel, sondern für das Bedürfnis der Musik gerade genug. Den Beweis hiefür scheint die Erfahrung zu geben, nach der Violinspieler unter anderen wirklich 19 Töne kennen, und die musikalische Notenschrift auch Zeichen für 19 Töne besitzt.

Aus ihnen werden 19 Dur- und eben so viele Moll-Tonarten und Leitern gebildet, was mehr als genug ist. Die Tonintervalle in der reinen Tonleiter vermag das *Opelt*sche System treuer wieder zu geben, als das chromatische, weil es bereits einen Unterschied macht zwischen großen und kleinen Halbtönen. Der große besteht aus zwei, der kleine aus einer Tonstufe, der ganze Ton hat drei Stufen. Mithin geben die 5 ganzen und 2 großen Halbtöne der Skala gerade 19 Tonstufen des Systems. Diese Halbtöne sind nun wohl nicht ganz die der reinen Skala, wo dem kleinen Halbton das Schwingungsverhältnis $\frac{25}{24} = 1 \cdot 0416$, dem großen das $\frac{16}{15} \doteq 1 \cdot 0666$ entspricht, während *Opelt* hiefür die Zahlen: $1 \cdot 0372$ und $1 \cdot 0756$ hat. Es kommen diese Zahlen aber doch den reinen Verhältnissen näher, als der gemeinsame Repräsentant beider Halbtöne im 12 stufigen Systeme, nämlich: $1 \cdot 0595$.

Diese Beispiele bereits *bekannt gewordener* Tonsysteme mögen genügen. Wir wenden uns nun zu solchen Systemen der ersten Klasse, die auf Grundlage dieser Theorie aufgebaut bisher *noch nicht bekannt* geworden sind, und lassen deshalb noch einen hypothetischen Musikliebhaber auftreten, der folgende Betrachtung anstellt: Wer irgend etwas, also auch ein Tonsystem haben will, muß sich vor allem anderen die Frage stellen, was kann ich vernünftiger Weise wollen und auch erhalten? Hiezu gehört aber die volle und genaue Kenntnis aller Eigentümlichkeiten der gewünschten Sache, mit denen man sich also zu befreunden hat. Die hier am meisten in Betracht zu nehmende Eigentümlichkeit eines Tonsystems ist der innige Zusammenhang aller seiner Eigenschaften, infolgedessen man keine von ihnen antasten kann, ohne alle übrigen mehr oder weniger zu verletzen. Deswegen erhält man hier auch nichts umsonst; alles muß mehr oder weniger teuer bezahlt werden, am aller kostspieligsten aber ist die absolute Reinheit irgend eines Intervalles. Die absolut reine Quinte z. B. muß mit heulenden Terzen und Septimen bezahlt werden. Wer absolut reine kleine Terzen haben will, muß dafür die übrigen Intervalle bis zum äußersten temperieren, beinahe übertemperieren. Dies kommt unstreitig daher, daß reine Intervalle mit dem Urbegriffe eines Tonsystems im direktesten Widerspruche stehen. Aber auch andere geschätzte Eigenschaften eines Tonsystems müssen um diesen Preis der Reinheit im allgemeinen erkauft werden, z. B. das geschlossene Rückkehren in sich selbst. Man hat also jederzeit sorgfältig dasjenige, was man an guten Eigenschaften erreichen will, gegen das, was man aufopfern muß, in die Wagschale zu legen, und acht zu geben, daß man bei dem Handel nicht zu kurz komme. Dazu jedoch ist es unerläßlich, daß man diese guten Eigenschaften nicht nur kenne, sondern auch ihrem relativen Werte nach richtig zu schätzen wisse. Sie sind:

1. Die Reinheit der Intervalle.
2. Ökonomie, das heißt mäßige Anzahl der zum Musizieren benötigten Töne.
3. Genügende Menge und Auswahl an Dur- und Moll-Tonarten.
4. Geschlossenes Rückkehren in sich selbst samt dem hiemit in Verbindung stehenden Fortschreiten der Töne in geometrischer Progression.
5. Anschluß an denjenigen Teil der gegenwärtig in Übung stehenden Gesetze der Tonkunst, der dem Fortschritte derselben in der Zukunft nicht hinderlich ist.
6. Auch das musikalische Instrument ist in Betracht zu ziehen, und das Tonsystem soll womöglich dem Baue und sonstigen Eigentümlichkeiten desselben nicht widerstreben.

Um über den relativen Wert dieser Eigenschaften zu richtigeren Begriffen zu gelangen, nehmen wir sie der Reihe nach vor und ergehen uns über dieselben in folgenden Betrachtungen.

Die Reinheit der Intervalle anlangend ist schon bemerkt worden, daß sie teuer zu stehen kommt, und es kann auch noch hinzugefügt werden, daß sie, über eine Grenze hinaus getrieben, wertlos ist. Denn es gibt für jedes konsonante Intervall eine Verfälschung, die so klein ist, daß sie von einem musikalisch gebildeten Durchschnittsgehör unter Umständen, unter welchen man Musik zu machen pflegt, eben noch nicht bemerkt werden kann, aber doch so groß ist, daß eine geringe Steigerung sie schon bemerklich machen würde.

Diese Verfälschung heiße die *virtuelle Verfälschung* des entsprechenden Intervalls und die ihm entsprechende Temperatur *die virtuelle Temperatur*.

Über die Grenze dieser virtuellen Temperatur hinaus ist jede Steigerung der Reinheit des Tones nur von sehr geringem Werte, denn sie kann nur durch künstliche Mittel bei der Stimmung der Instrumente hervorgebracht werden, und ist, wenn zustande gebracht, gar nicht wahrzunehmen, außer eben mit diesen Hilfsmitteln, z. B. Stimmgabelapparaten. Man kann aber doch nicht mit einem ganzen Stimmgabelkabinett ins Konzert gehen, und könnte man es, so würde es im Sturme schnell verbrausender Töne doch nichts nützen. Es gibt also eine für die praktische Musik nicht nur unerreichbare, sondern auch überflüssige Tonreinheit, die aber für den, mit dem Aufbau eines Tonsystems beschäftigten Theoretiker einen großen Wert hat, weil sie einzig und allein das Kapital bildet, durch dessen Aufopferung die heulenden

Wölfe beseitigt und alle schätzbaren Eigenschaften dieses seines Tonsystems erkauft werden.

Die Reinheit der konsonanten Intervalle hat also allerdings in einem Tonsysteme einen hohen Wert, aber nur bis zur Grenze der virtuellen Temperatur. Innerhalb dieser Grenzen hingegen ist eine weitere Annäherung an die absolute Reinheit nicht nur nutzlos, sondern in den meisten Fällen sogar ein Fehler, es sei denn, daß der Erfinder imstande wäre zu beweisen, daß durch Aufopferung dieser überflüssigen Reinheit kein namhafterer Vorteil zu erreichen gewesen wäre. Es folgt hieraus, daß der nach einem neuen Tonsystem strebende Erfinder folgende zwei Dinge kennen sollte:

a) Die virtuelle Temperatur der (konsonanten) Intervalle: Quinte, große und kleine Terz und Septime;

b) Eine analytische Methode, die Temperaturen (22) dieser Intervalle in die Grenzen der virtuellen Temperaturen einzuschließen.

2. Rücksichtlich der zweiten Eigenschaft eines Tonsystems, nämlich Ökonomie der Töne, ist bereits im II. Abschnitte die Bemerkung gemacht worden, daß man die Sparsamkeit mit denselben auch zu weit treiben könne, daß sie im chromatischen Tonsysteme wirklich zu weit getrieben scheine, und es kann noch hinzugefügt werden, daß nach den bisherigen Erfahrungen die Zahl 19 das Minimum der zu einer guten Musik notwendigen Töne zu enthalten scheine.

Es kann indessen hier nicht unerwähnt bleiben, daß bei gewissen musikalischen Instrumenten z. B. Orgeln, Harmoniums, Klavieren, die ohnehin Hunderte von Saiten, Pfeifen, Federn und dergl. enthalten, jede Rücksicht auf Ökonomie beinahe lächerlich erscheint. Bei solchen ist daher eher Sorge zu tragen, daß sie ungeachtet ihres großen Reichtums an Tonmitteln nicht dennoch an Tonmangel leiden.

3. Hinsichtlich der notwendigen Anzahl der Moll- und Dur-Tonarten kann bemerkt werden, daß 12 solche, wie im chromatischen Systeme, vollkommen hinreichen, daß es aber nicht allein auf die Anzahl ankommt, sondern auch auf die Verbindung dieser Tonarten unter sich. Man sollte nämlich wenigstens zur Mehrzahl derselben, wenn nicht zu allen, auch die zunächst verwandten Dur- und Moll-Tonarten besitzen.

4. Der Übergang von einem unendlichen zu einem geschlossenen Tonsysteme ist einer Ersparnis von 7 bis 9 Tönen gleich zu achten; dies gilt jedoch nur in der ersten Klasse dieser Systeme und unter der Voraussetzung, daß man alle Töne des geschlossenen Systems auch wirklich benutzt. Sind ihrer so viele, daß man nicht alle brauchen kann, sondern eine Gruppe derselben von der wirklichen Verwendung

ausscheiden muß, dann sind alle Vorteile des Geschlossenseins aufgehoben bis auf den der Äquidistanz der Bestandtöne, der aber an und für sich schon groß genug ist, um für ein geschlossenes, selbst vielstufiges System sogar ein Opfer zu rechtfertigen.

Die Kenntnis der virtuellen Temperatur der Quinte, großen und kleinen Terz und der Septime ist wohl eine wichtige; sie geht aber den Musiker und Akustiker an, der Rechner kann sie bei der Aufstellung der Theorie der Tonsysteme als gegeben ansehen. Diese virtuellen Temperaturen seien also q', T', t' und s', so sind die virtuellen d. h. größten zulässigen Verfälschungen dieser Intervalle

$$q'-1,\quad T'-1,\quad t'-1,\quad s'-1.$$

Die reziproken Werte derselben aber können als die *Gewichtszahlen einer Verfälschung* (spezifische Empfindlichkeit) der Quinte, großen und kleinen Terz und der Septime angesehen werden, wenn man auf das Zeichen keine Rücksicht nimmt und nur den numerischen Wert beachtet. Diese Gewichte mögen beziehentlich:

$$\mathfrak{q},\quad \mathfrak{T},\quad \mathfrak{t},\quad \mathfrak{s}$$

heißen; so hat man:

$$(34)\qquad \mathfrak{q}=\frac{1}{(q'-1)},\quad \mathfrak{T}=\frac{1}{(T'-1)},\quad \mathfrak{t}=\frac{1}{(t'-1)},\quad \mathfrak{s}=\frac{1}{(s'-1)}.$$

Jetzt ist noch eine Methode vonnöten, die Abweichungen von der Reinheit der konsonanten Intervalle untereinander auszugleichen und womöglich in die Grenzen der virtuellen Temperatur zurückzuziehen. Die Wissenschaft besitzt eine verläßliche Methode dieser Art, nämlich: Die Methode der kleinsten Quadratsummen. Sie wird in der Physik und Astronomie zur Ausgleichung der Beobachtungsfehler verwendet, und, nach dem von *Gauß* entdeckten Prinzip des kleinsten Zwanges, beherrscht sie auch die ganze Körperwelt.

Zwar ist ihre Verwendbarkeit an die Bedingung geknüpft, daß positive und negative Fehler von gleicher Größe auch gleich wahrscheinlich seien, was auf das Gebiet der Töne übertragen vielleicht nicht mit aller Strenge richtig ist, indem gewisse Intervalle für positive und negative Verfälschungen ungleiche Empfindlichkeit offenbaren dürften. Allein es handelt sich hier zunächst nur darum, die Temperaturen dieser Intervalle in die Grenzen der virtuellen Temperaturen einzuschließen, und hiezu ist die Methode der kleinsten Quadratsummen ganz geeignet.

Macht man davon Gebrauch, so ist das Tonsystem zu suchen, für welches die Summe der Quadrate aller Aufopferungen an Reinheit oder, was dasselbe ist, aller mit ihren Gewichten multiplizierten Verfälschungen ein Minimum ist.

Bei allen Tonsystemen der 1ten Klasse hängen die Temperaturen q, T, t, s, durch die Gleichungen (22) zusammen; die Verfälschungen sind mithin:

$$q-1, \quad T-1, \quad t-1, \quad s-1.$$

Mit ihren Gewichtszahlen $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{s}$ multipliziert, geben sie folgende Werte der Abweichungen von der Reinheit

$$\mathfrak{q}(q-1), \quad \mathfrak{T}(T-1), \quad \mathfrak{t}(t-1), \quad \mathfrak{s}(s-1).$$

Die Summe ihrer Quadrate sei $\sum$, so daß

$$\sum = \mathfrak{q}^2(q-1)^2 + \mathfrak{T}^2(T-1)^2 + \mathfrak{t}^2(t-1)^2 + \mathfrak{s}^2(s-1)^2 \tag{35}$$

besteht. Nun ist die Quadratsumme $\sum$ zu einem Minimum zu machen.

Da sie vermöge der Gleichungen (22) betrachtet werden kann als Funktion der Temperatur q der Quinte, so erhält man durch Differenzieren die Bedingungsgleichung des Minimums:

$$\mathfrak{q}^2(q-1) + \mathfrak{T}^2(T-1)\frac{dT}{dq} + \mathfrak{t}^2(t-1)\frac{dt}{dq} + \mathfrak{s}^2(s-1)\frac{ds}{dq} = 0.$$

Nun ist aber aus der Gleichung (22):

$$\frac{dT}{dq} = \frac{3^4}{4\cdot 5}q^3, \quad \frac{dt}{dq} = -\frac{2^4\cdot 5}{3^3 q^4}, \quad \frac{ds}{dq} = \frac{3^{10}\cdot 5}{2^{12}\cdot 7}q^9.$$

Führt man diese Werte und jene für T, t, s aus (22) ein in die vorliegende Gleichung, so ergibt sich zur Bestimmung von q:

$$\mathfrak{q}^2(q-1) + \frac{3^4}{2^2\cdot 5}\mathfrak{T}^2 q^3\left(\frac{3^4}{2^4\cdot 5}q^4 - 1\right) - \frac{2^4\cdot 5}{3^3}\frac{\mathfrak{t}^2}{q^4}\left(\frac{2^4\cdot 5}{3^4\cdot q^3} - 1\right)$$
$$+ \frac{3^{10}\cdot 5}{2^{12}\cdot 7}\mathfrak{s}^2 q^9\left(\frac{3^{10}}{2^{13}\cdot 7}q^{10} - 1\right) = 0.$$

Geordnet ist sie eine algebraische Gleichung vom 26ten Grade, nämlich:

$$\mathfrak{s}^2 q^{26} - \frac{2^{13}\cdot 7}{3^{10}}\mathfrak{s}^2 q^{16} + \frac{2^{19}\cdot 7^2}{3^{13}\cdot 5^3}\mathfrak{T}^2 q^{14} - \frac{2^{23}\cdot 7^2}{3^{16}\cdot 5^2}\mathfrak{T}^2 q^{10} + \frac{2^{25}\cdot 7^2}{3^{20}\cdot 5}\mathfrak{q}^2 q^8 - \frac{2^{26}\cdot 7^2}{3^{20}\cdot 5}\mathfrak{q}^2 q^7$$
$$+ \frac{2^{29}\cdot 7^2}{3^{23}}\mathfrak{t}^2 q^3 - \frac{2^{33}\cdot 5\cdot 7^2}{3^{27}}\mathfrak{t}^2 = 0,$$

die wohl allen Versuchen, sie allgemein aufzulösen, widerstehen würde. Man braucht aber hier auch nur eine einzige, nahe unter der Einheit liegende Wurzel, die man mit Leichtigkeit erhält, wenn man die Beschaffenheit des q berücksichtigt.

Dies kann nach Belieben entweder in der vorliegenden Gleichung geschehen, oder auch in der Gleichung (35), und zwar auf folgende Weise. Es sei

$$(36) \qquad q = 1 - \varkappa,$$

so bedeutet $\varkappa$ einen sehr kleinen positiven Bruch; ebenso nehme man an

$$T = 1 + \theta, \quad t = 1 + \tau, \quad s = 1 + \sigma,$$

unter θ, τ, σ ebenfalls sehr kleine Brüche verstanden. Die Gleichungen (22) und (35) gehen durch Einführung dieser sehr kleinen Größen, deren höhere Potenzen außer acht zu lassen sind, über in

$$\theta = T - 1 = \frac{1}{2^4 \cdot 5}[1 - 2^2 \cdot 3^4 \varkappa], \quad \tau = t - 1 = -\frac{1}{3^4}[1 - 2^4 \cdot 3 \cdot 5\varkappa],$$
$$\sigma = \frac{5}{2^{13} \cdot 7}[11 \cdot 31 - 2 \cdot 3^{10}\varkappa],$$

$$(37) \quad \begin{cases} \sum = \mathfrak{q}^2\varkappa^2 + \mathfrak{T}^2\theta^2 + \tau^2 + \mathfrak{s}^2\sigma^2 = \mathfrak{q}^2\varkappa^2 + \frac{\mathfrak{T}^2}{2^8 \cdot 5^2}[1 - 2^2 \cdot 3^4\varkappa]^2 \\ \quad + \frac{\mathfrak{t}^2}{3^8}[1 - 2^4 \cdot 3 \cdot 5\varkappa]^2 + \frac{5^2 \cdot \mathfrak{s}^2}{2^{26} \cdot 7^2}[11 \cdot 31 - 2 \cdot 3^{10}\varkappa]^2. \end{cases}$$

Setzt man jetzt $\frac{d\Sigma}{d\varkappa} = 0$, so ergibt sich zur Bestimmung von $\varkappa$ folgende Gleichung des ersten Grades:

$$\varkappa\left[\mathfrak{q}^2 + \frac{3^8}{2^4 \cdot 5^2}\mathfrak{T}^2 + \frac{2^8 \cdot 5^2}{3^6}\mathfrak{t}^2 + \frac{3^{20} \cdot 5^2}{2^{24} \cdot 7^2}\mathfrak{s}^2\right] = \frac{3^4}{2^6 \cdot 5^2}\mathfrak{T}^2 + \frac{2^4 \cdot 5}{3^7}\mathfrak{t}^2 + \frac{3^{10} \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 31}{2^{25} \cdot 7^2}\mathfrak{s}^2,$$

aus welcher der folgende Wert $\varkappa$, als Minimum der Verfälschung der Quinte, gewonnen wird:

$$(38) \qquad \varkappa = \frac{0{\cdot}050625\,\mathfrak{T}^2 + 0{\cdot}0365798\,\mathfrak{t}^2 + 0{\cdot}306169\,\mathfrak{s}^2}{\mathfrak{q}^2 + 16{\cdot}4025\,\mathfrak{T}^2 + 8{\cdot}7791495\,\mathfrak{t}^2 + 106{\cdot}03497226\,\mathfrak{s}^2}$$

oder auch

$$\varkappa = \frac{2^{19} \cdot 3^{11} \cdot 7^2\mathfrak{T}^2 + 2^{29} \cdot 5^3 \cdot 7^2\mathfrak{t}^2 + 3^{17} \cdot 5^4 \cdot 11 \cdot 31 \cdot \mathfrak{s}^2}{2^{25} \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 3^7\mathfrak{q}^2 + 2^{21} \cdot 3^{16} \cdot 7^2\mathfrak{T}^2 + 2^{33} \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 7^2\mathfrak{t}^2 + 2 \cdot 3^{27} \cdot 5^4 \cdot \mathfrak{s}^2}$$

$$= \frac{4550926270464\,\mathfrak{T}^2 + 3288334336000\,\mathfrak{t}^2 + 27522997239375\,\mathfrak{s}^2}{89894839910400\,\mathfrak{q}^2 + 1474500111630336\,\mathfrak{T}^2 + 789200240640000\,\mathfrak{t}^2 + 9531996856233750\,\mathfrak{s}^2}.$$

Dieser Ausdruck ist in hohem Grade lehrreich, denn man gewinnt aus ihm eine sehr vollständige Übersicht über die Temperaturverhältnisse aller Tonsysteme der ersten Klasse, selbst derjenigen, die den extremsten Anforderungen der absoluten Reinheit oder auch der gänzlichen Vernachlässigung jedes beliebigen Intervalles entsprechen; dies gestattet die bisher durch nichts beschränkte Willkürlichkeit der Gewichtsfaktoren $\mathfrak{q}^2$, $\mathfrak{T}^2$, $\mathfrak{t}^2$, $\mathfrak{s}^2$.

Will man nämlich irgend eine der Konsonanzen besonders bevorzugen, also ganz rein haben, so setzt man die derselben entsprechende

Gewichtszahl unendlich; will man sie hingegen ganz vernachlässigen, so setzt man diese Gewichtszahl gleich Null.

Tun wir zuvörderst das erstere, so ergibt sich

$$
(39)\qquad
\begin{aligned}
\mathfrak{q} &= \infty, & \varkappa &= \frac{0}{1} = 0,\\
\mathfrak{T} &= \infty, & \varkappa &= \frac{0.050625}{16.4025} = \frac{1}{324},\\
\mathfrak{t} &= \infty, & \varkappa &= \frac{0.0365798}{8.7791495} = \frac{1}{240},\\
\mathfrak{s} &= \infty, & \varkappa &= \frac{0.306169}{106.035} = \frac{1}{346}.
\end{aligned}
$$

Diese Formeln dienen vor allem anderen dazu, das Maß der Genauigkeit der Gleichung (38), aus welcher sie hervorgehen und die selbstverständlich nur eine angenäherte sein kann, weil bei ihrer Ableitung die höheren Potenzen von $\varkappa$ weggeworfen wurden, zu beurteilen. Denn die der absoluten Reinheit der Quinte, großen und kleinen Terz und Septime entsprechenden Werte der Verfälschung $\varkappa$ lassen sich auch aus den Urgleichungen der Tonsysteme erster Klasse (22), und zwar mit beliebiger Genauigkeit, dadurch ableiten, daß man der Reihe nach erst q, dann T, dann t und endlich s der Einheit gleich setzt.

Dies gibt aber:

$$
(40)\qquad
\begin{aligned}
& & q &= 1, & & \varkappa = 1 - q = 0,\\
&\text{Für } T = 1: & q &= \sqrt[4]{\frac{80}{81}} = \frac{2}{3}\sqrt[4]{5} = 0.996899, & & \varkappa = \frac{1}{322},\\
&\text{„}\ \ t = 1: & q &= \sqrt[3]{\frac{80}{81}} = 0.995868, & & \varkappa = \frac{1}{242},\\
&\text{„}\ \ s = 1: & q &= \sqrt[10]{\frac{2^{13}\cdot 7}{3^{10}}} = \frac{2}{3}\sqrt[10]{56} = 0.9970742, & & \varkappa = \frac{1}{342}.
\end{aligned}
$$

Die geringe Verschiedenheit dieser genaueren Werte von $\varkappa$ von den durch die Gleichungen (39) gegebenen dient als Beweis, daß die Formel (38) genügend genau und verläßlich ist.

Die in Bruchform erscheinenden Werte von $\varkappa$ in den Gleichungen (39) ändern sich nicht, wenn man Zähler und Nenner des ersten dieser Brüche mit $\mathfrak{q}^2$, ebenso Zähler und Nenner des zweiten mit $\mathfrak{T}^2$, des dritten mit $\mathfrak{t}^2$, des vierten mit $\mathfrak{s}^2$ multipliziert.

Ferner weiß man, daß, wenn man aus mehreren solchen Brüchen, deren Zähler und Nenner positiv sind, einen neuen Bruch bildet, dessen Zähler die Summe aller Zähler, dessen Nenner die Summe aller Nenner ist, dieser Bruch ein Mittelwert ist zwischen den Brüchen, aus welchen er auf die angegebene Weise entstanden ist, nämlich größer als der kleinste und kleiner als der größte von ihnen. Dieser Bruch ist aber genau das $\varkappa$ der Formel (38). Es ist mithin für alle möglichen Werte von q, $\mathfrak{T}$, t und $\mathfrak{s}$ von 0 bis ∞:

$$\varkappa \gtreqqless 0 \quad \text{und zugleich} \quad \varkappa \lesseqqgtr \frac{1}{240}.$$

Nun hat man aber $\varkappa = 0$ für das griechische Tonsystem des Pythagoras, mit welchem das chromatische dem mathematischen Ursprunge nach identisch ist. Es ist nämlich das System der reinen Quinten, modifiziert durch die Forderung des geschlossenen Rückkehrens in sich selbst. Ebenso ist $\varkappa = \frac{1}{240}$ nahezu das System Opelts, also das System der reinen kleinen Terzen, modifiziert durch die Forderung der geschlossenen Rückkehr in sich selbst. Diese beiden Systeme stehen daher an den äußersten Grenzen der ganzen Reihe von Tonsystemen erster Klasse, das chromatische mit den am wenigsten, das Opeltsche mit den am meisten temperierten Quinten.

Die Folgerungen aus der Formel (38) sind noch nicht erschöpft. Fassen wir nämlich die daraus abgeleiteten Werte (39) näher ins Auge, so gewahren wir, daß durch beinahe eine und dieselbe Verfälschung der Quinte die große Terz und die Septime absolut rein gemacht werden können, erstere durch $\varkappa = \frac{1}{322}$, letztere durch $\varkappa = \frac{1}{342}$.

Es besteht also zwischen der schönen, heiteren Großterz und der sanften Septime ein besonders inniges Verhältnis, infolgedessen beide zugleich der größeren Reinheit teilhaftig werden und sich auch beide zugleich in heulende Wölfe verwandeln. Diese Umänderung geschieht aber bei der Septime viel rascher als bei der Terz, wovon man sich am besten überzeugt, wenn man die erste und dritte der Gleichungen (22) differenziert, wodurch man erhält:

$$dT = \frac{4.81}{80} q^3 dq, \quad ds = \frac{10.59049}{57344} q^9 dq.$$

Da q immer nahe der Einheit und unter derselben ist, so hat man annäherungsweise:

$$dT = 4dq, \quad ds = 10dq,$$

d. h. die Temperatur der Terz ändert sich viermal und die der Septime gar zehnmal so rasch als die Temperatur der Quinte. Wenn sich daher die Verfälschung $\varkappa$ der Quinte nur sehr wenig, z. B. um $\frac{1}{1000}$ von dem Werte $\varkappa = \frac{1}{342}$, für welchen die Septime rein ist, entfernt, so steht diese letztere bereits in der Entfernung $\frac{10}{1000} = \frac{1}{100}$ von der Reinheit, ist also schon namhaft falsch.

In dieser Übereinstimmung der großen Terz mit der Septime scheint ein Vorteil zu liegen, der darin besteht, daß man, wenn man ein Tonsystem mit reinen Terzen konstruiert, auch beinahe reine Septimen umsonst mit in den Kauf erhält und umgekehrt. Dies ist aber geeignet, die Aufmerksamkeit auf zwei neue Tonsysteme zu lenken, das mit reinen Terzen und das mit reinen Septimen. Ihre aus den Gleichungen (22) für $T = 1$ und $s = 1$ berechneten Temperaturen sind beziehentlich:

$$(41)\quad \begin{aligned} &q = 1 - \frac{1}{322} = \frac{321}{322}, \quad T = 1, \quad t = 1 - \frac{1}{322} = \frac{321}{322}, \quad s = 1 - \frac{1}{570} = \frac{569}{570}, \\ &q = 1 - \frac{1}{342} = \frac{341}{342}, \quad T = 1 + \frac{1}{1422}, \quad t = 1 - \frac{1}{276}, \quad s = 1. \end{aligned}$$

Die Logarithmen der q sind beziehentlich:

$$\log q = -\,0.0013488,$$
$$\log q = -\,0.0012725.$$

Diese Zahlen sehen den Rechner viel freundlicher an als die im chromatischen und die im Opeltschen Systeme, und es ist beinahe merkwürdig, daß unter allen Puritanern derjenige, welcher die unbeachtete, aus der modernen Tonkunst ausgestoßene reine Septime in besonderen Schutz nimmt, das beste Tonsystem bekommt, wenn er nur nach Zahlen urteilt.

Um eine möglichst vollständige Übersicht über alle Tonsysteme der ersten Klasse zu gewinnen, ist es aber notwendig, auch die jedenfalls berechtigtere Meinung, daß die sämtlichen konsonanten Intervalle, und nicht nur eines derselben, zu berücksichtigen seien, ins Auge zu fassen. Wir fangen auch hier mit der extremen Annahme an, daß die sämtlichen Konsonanzen einander ebenbürtig und die Gewichte ihrer Verfälschungen gleich seien, also

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{T} = \mathfrak{t} = \mathfrak{s}.$$

Für die Richtigkeit dieser Annahme kann man sich auf eine sehr gewichtige Autorität, nämlich Helmholtz, berufen, der an einer Stelle seines berühmten Werkes sagt, daß zwar die verschiedenen Konsonantenintervalle, der allgemein verbreiteten Meinung der Musiker gemäß, verschiedene Empfindlichkeit besitzen mögen, aber nur in der Melodie; in der Harmonie hingegen, d. h. im Akkorde seien sie alle gleich empfindlich. Es genügt dies, denn die Empfindlichkeit im Akkorde ist offenbar die größte, mithin hier maßgebende.

Die Gleichung (38) liefert dieser Annahme entsprechend einen Wert von $\varkappa$, nämlich

$$\varkappa = 0.002975227 = \frac{1}{336}$$

und
$$q = 1 - \varkappa = 0.9970248,$$
$$\log q = 0.9987050 - 1,$$
$$\log q = -0.0012941.$$

Die diesem Werte von q entsprechenden Werte der übrigen Temperaturen T, t und s, berechnet aus den Gleichungen (22), sind:

$$(42) \quad q = 1 - \frac{1}{336} \quad T = 1 + \frac{1}{2012}, \quad t = 1 - \frac{1}{288}, \quad s = 1 - \frac{1}{2007}.$$

Hier liegen also drei wenig voneinander verschiedene Tonsysteme (41) und (42) vor: das der reinen Großterz und der reinen Septime und das System der Gleichberechtigung aller konsonanten Intervalle, welches zwischen den beiden ersteren beinahe in der Mitte liegt. Untersuchen wir auch hier, ob nicht vielleicht eines dieser Tonsysteme durch eine sehr kleine Änderung seiner Temperaturen zu einem geschlossenen umgestaltet werden kann; das wird möglich sein, wenn es eine temperierte Quinte Q_m gibt, welche dem Grundtone Q_0 sehr nahe gleich ist, wo man dann ein geschlossenes $m$stufiges System erhalten wird.

Es ist nun:
$$Q_m = \frac{3^m}{2^{m+x}} q^m \zeta \quad \text{und} \quad Q_0 = \zeta,$$
daher, $Q_0 = Q_m$ gesetzt,
$$\frac{3^m}{2^{m+x}} q^m = 1, \quad \frac{3}{2} q = 2^{\frac{x}{m}},$$
also
$$\frac{x}{m} = \frac{\log 3 + \log q}{\log 2} - 1.$$

Man hat aber in den 3 oberwähnten Fällen

	$T = 1$	$\mathfrak{q} = \mathfrak{T} = \mathfrak{t} = \mathfrak{s}$	$s = 1$
$\log 3 =$	0.4771213,	0.4771213,	0.4771213,
$\log q =$	$-$ 0.0013488,	$-$ 0.0012941,	$-$ 0.0012725,
$\log 3 + \log q =$	0.4757725,	0.4758272,	0.4758488.

Dividieren wir jetzt die letzten 3 Zahlen durch den $\log 2 = 0.3010300$ und bringen die Quotienten in die Kettenbruchform, so ergeben sich die folgenden 3 Werte von $\frac{x}{m}$:

$$\frac{x}{m} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2-\frac{15225}{103000}}}}}}}, \quad \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\frac{1732}{96436}}}}}}}, \quad \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\frac{8428}{93844}}}}}}}$$

Sie unterscheiden sich nur in den Ergänzungsbrüchen, die beziehentlich nahe $-\frac{1}{7}$, $\frac{1}{56}$, $\frac{1}{11}$ sind, mithin alle klein genug, um weggelassen werden zu können.

Alle drei Werte von $\frac{x}{m}$ gehen dann in den Näherungsbruch

$$\frac{x}{m} = \frac{18}{31}$$

über.

Es wird wohl kaum einen Musiker geben, der sich mit den Grundsätzen, nach welchen wir bisher Tonsysteme gebildet und dem Leser vorgeführt haben, vollständig einverstanden erklären könnte, selbst wenn er der Erfinder eines derselben wäre. Petzval meint, daß sich z. B. Opelt zum Grundsatze der unverfälschten Reinheit der kleinen Terzen schwerlich bekannt hätte, wiewohl sein Tonsystem nach diesen Grundsätzen aufgebaut ist. Ebenso sei es zu bezweifeln, daß Koch dem Grundsatze der Gleichberechtigung aller konsonanten Intervalle unbedingt beigepflichtet hätte, wiewohl er denselben tatsächlich in seinem Tonsystem niedergelegt hat. Selbst der alte Pythagoras wäre, wenn er noch lebte, gewiß kein Quintenpuritaner mehr. Die am allgemeinsten in der musikalischen Welt verbreitete Meinung dürfte vielmehr die sein, daß die Konsonanzen verschiedenen Ranges seien, und daß eine und dieselbe Verfälschung, angebracht an der Quinte, vom Gehör weit übler empfunden werde, als an der Terz und Septime.

Da man aber über die genauen numerischen Werte der Gewichte $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{s}$ der Verfälschungen keine verläßlichen Angaben hat, so scheinen auch zu einer endgültigen Lösung des Problems des allerbesten Tonsystems die genügenden Daten nicht vorzuliegen.

Wir suchen nun endlich auch dieser verbreitetsten Meinung des zahlreichen musikalischen Publikums gerecht zu werden: daß nämlich die konsonanten Intervalle weder ausschließlich zu bevorzugen, noch als gleichberechtigt aufzufassen seien, sondern daß unter ihnen eine Rangordnung bestehe, kraft welcher sie in die folgende Ordnung zu stellen sind:

Quinte, Großterz, Kleinterz, Septime.

In Ermangelung sicherer Daten stellen wir, um das ganze Feld der bezüglichen Tonsysteme zu überblicken, zwei Annahmen auf, nämlich:

1) Die extreme Annahme, daß die Quinte an Rang und Gewicht allen übrigen Konsonanzen sehr weit, etwa im Verhältnis 5 : 1, überlegen sei, die übrigen aber untereinander gleichberechtigt, sodaß man

$$\mathfrak{q} = 5, \quad \mathfrak{T} = \mathfrak{t} = \mathfrak{s} = 1$$

anzunehmen hat.

2) Die gemäßigtere Annahme, die zwischen dieser extremen und der Gleichberechtigung der Intervalle in der Mitte liegt, der Quinte etwa nur die Hälfte des obengenannten Übergewichtes über die große Terz zugesteht, dagegen aber auch die übrigen Intervalle gegen einander mäßig abstuft, so etwa, daß man

$$\mathfrak{q} = 12, \quad \mathfrak{T} = 5, \quad \mathfrak{t} = 3, \quad \mathfrak{s} = 2$$

setzt. Führt man diese beiden Systeme von Werten für die Gewichte der Verfälschungen in die Formel (38) ein, so erhält man die folgenden zwei Werte der Verfälschungen $\varkappa$ und der Temperaturen q der Quinte:

$$\varkappa = 0.00251813 = \frac{1}{397}, \quad q = 0.99748187, \quad \log q = -0.0010954,$$

$$\varkappa = 0.00266692 = \frac{1}{375}, \quad q = 0.99733308, \quad \log q = -0.0011598.$$

Untersuchen wir hier sogleich, ob mit geringer Änderung dieser für q gewonnenen Zahlen nicht eines der gesuchten Tonsysteme oder auch beide zur Rückkehr in sich selbst zu bringen seien. Hierzu dient dieselbe Gleichung, die wir auch bei den Systemen von Opelt in Anwendung setzten:

$$\frac{x}{m} = \frac{\log 3 + \log q}{\log 2} - 1,$$

und die in ganzen Zahlen für x und m annäherungsweise aufzulösen ist. Man hat zu diesem Zwecke

$$\begin{array}{rrr} \log 3 = & 0.4771213 & 0.4771213 \\ \log q = & -0.0010954 & -0.0011598 \\ \log 3 + \log q = & 0.4760259 & 0.4759615. \end{array}$$

Dividieren wir jetzt die erhaltenen 2 Zahlen durch den $\log 2 = 0.3010300$ in Kettenbruchform, so erhalten wir folgende 2 Werte von $\frac{x}{m}$

$$\frac{x}{m} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 - \cfrac{9263}{72592}}}}}}} \qquad = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{6410}{36955}}}}}}}}}$$

Von diesen zwei Kettenbrüchen gibt der erste, wenn man den etwa $-\frac{1}{8}$ großen Ergänzungsbruch außer Acht läßt

$$\frac{x}{m} = \frac{25}{43}, \text{ mithin } x = 25, \; m = 43,$$

welchen Zahlen ein geschlossenes 43stufiges System in geometrischer Progression stehender Töne entspricht, und zwar mit dem Faktor $\sqrt[43]{2} = 1.016250$.

Den korrigierten Wert entnimmt man auch hier der Gleichung

$$\begin{aligned}\log q &= \frac{m+x}{m}\log 2 - \log 3\\ &= \frac{68}{43}\cdot 0.3010300 - 0.4771213\\ &= 0.99892614 - 1 = - 6.00107386,\end{aligned}$$

mithin

$$q = 0.9975303 = - 1 - \frac{1}{405} = \frac{404}{405}.$$

Hiezu gehören die aus den Fundamentalgleichungen (22) gezogenen Werte der übrigen Temperaturen

$$\begin{aligned}T = 1.002535 = 1 + \frac{1}{394}, \quad t = 0.995008 = 1 - \frac{1}{200},\\ s = 1.004583 = 1 + \frac{1}{218}.\end{aligned} \tag{43a}$$

Der zweite Kettenbruch zieht sich mehr in die Länge, bis er eine Stelle bietet, an der er mit Vorteil abgebrochen werden kann und nach Weglassung des allerdings nicht sehr kleinen Ergänzungsbruches $\frac{6410}{36955} = \frac{1}{6}$ beiläufig einen Wert von $\frac{x}{m} = \frac{43}{74}$ liefert.

Man begegnet hier also einem Tonsystem von etwas übermäßiger Stufenanzahl.

Da bisher nur Beispiele geschlossener, in sich zurückkehrender Tonsysteme vorgekommen sind, mithin gar keine Gelegenheit geboten war, auch die Behandlungsweise unendlicher Tonsysteme zu zeigen, so wird es zweckmäßig sein, die sich hier darbietende Veranlassung zu benützen und das letztgenannte System mit dem langen Kettenbruche als unendliches Tonsystem aufzufassen. Demgemäß lassen wir seine Quintentemperatur unkorrigiert, und berechnen daraus mit Hilfe der Gleichung (22) die Temperaturen der übrigen Intervalle:

$$\begin{aligned}T = 1.001742 = 1 + \frac{1}{574}, \quad t = 0.9955988 = 1 - \frac{1}{227},\\ s = 1.0025972 = 1 + \frac{1}{385}.\end{aligned} \tag{43b}$$

Dies wären also die zwei, nur beispielsweise angeführten, der Voraussetzung ungleichberechtigter konsonanten Intervalle entsprechenden Tonsysteme in ihren Grundzügen und Eigenschaften.

Da indessen schon die 31 Töne des Koch schen Systems eine zu große Anzahl bildeten, und für die Verwendung eine Auswahl von

19 derselben mit Hinweglassung der übrigen notwendig schien, so werden hier umsomehr die 43 oder gar die unendlich vielen Töne zu einer Auswahl von einer kleineren Zahl (nehmen wir wieder 19 an) nötigen.

Um dieselben also zunächst aus dem 43 stufigen System auszuwählen, benützt man abermals die ununterbrochene Quintenreihe von Q_{-7} bis Q_{11}, oder von *ces* bis *eis*, und stellt darüber auf dieselbe Weise, wie beim 31 stufigen System 18 Tonarten her; hiebei ist es aber unerläßlich, alle Schwingungszahlen der 43 Töne als Glieder einer geometrischen Progression mit dem Faktor $\sqrt[43]{2}$ zu berechnen. In der folgenden Zusammenstellung sind die berechneten Bestandtöne des 43 stufigen Tonsystems in aufsteigender Ordnung mit ihren mathematischen und musikalischen Benennungen enthalten, wobei die ausgewählten 19 Töne durch wagrechte Striche gekennzeichnet sind. (Siehe S. 369 f.)

Es wäre jetzt nur noch zu zeigen, auf welche Weise aus einem unendlichen Tonsysteme, das in sich entweder gar nicht, oder erst nach einer sehr großen Anzahl von Gliedern zurückkehrt, eine mäßige Zahl von Tönen zum musikalischen Gebrauche herausgehoben und in die benötigten Tonarten zusammengestellt werden kann, und wie man sich von letzteren vermittels einer Tabelle eine klare Übersicht zu verschaffen vermag.

Das unendliche Tonsystem sei das letzte der als Beispiel angeführten mit der Quintentemperatur

$$q = 0.99733308 = 1 - \frac{1}{375}, \quad \log q = -0.0011598,$$

und den durch die Gleichungen (43b) gegebenen Temperaturen der übrigen konsonanten Intervalle. Man wählt diejenigen Töne, deren man zu benötigen glaubt; dies müssen jedoch ununterbrochen zusammenhängende Quinten aus der Quintenreihe sein, etwa:

Q_{-7}	Q_{-6}	Q_{-5}	Q_{-4}	Q_{-3}	Q_{-2}	Q_{-1}	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	Q_8	Q_9	Q_{10}	Q_{11}
Ces	*Ges*	*Des*	*As*	*Es*	*B*	*F*	*C*	*G*	*D*	*A*	*E*	*H*	*Fis*	*Cis*	*Gis*	*Dis*	*Ais*	*Eis*,

weil, wenn man die Reihe unterbricht, man sogleich Töne und Tonarten hat, zu denen die Verwandten fehlen. Von diesen Tönen nun und ihren höheren ersten Oktaven berechnet man die Logarithmen der Schwingungsverhältnisse, ebenso von den Tönen die Schwingungsverhältnisse selbst; die ihrer Oktaven sind zwar leicht zu haben durch Multiplikation mit 2, werden aber nicht benötigt. Setzt man der Kürze wegen, um nur mit den Schwingungsverhältnissen zu tun zu haben, die Schwingungszahl $\mathfrak{z}$ des Grundtones $Q_0 = 1$, so ist die der nächsten Quinte:

$$Q_1 = \frac{3}{2} q, \quad \log Q_1 = \log 3 - \log 2 + \log q = 0.1749315, \quad Q_1 = 1 \cdot 49600.$$

43 stufiges Tonsystem I. Klasse.

C	Q_0	ζ	$= \zeta$	$=$	
*Des*²	Q_{-12}	$\zeta\sqrt[43]{2^1}$	$= 1{\cdot}01625\,\zeta$	$= \frac{62}{61}\zeta$	angenähert
*His*²	Q_{19}	$\zeta\sqrt[43]{2^2}$	$= 1{\cdot}03277\,\zeta$	$= \frac{63}{61}\zeta$	„
Cis	Q_7	$\zeta\sqrt[43]{2^3}$	$= 1{\cdot}04955\,\zeta$	$= \frac{21}{20}\zeta$	„
Des	Q_{-5}	$\zeta\sqrt[43]{2^4}$	$= 1{\cdot}06660\,\zeta$	$= \frac{16}{15}\zeta$	„
*Es*³	Q_{-17}	$\zeta\sqrt[43]{2^5}$	$= 1{\cdot}08394\,\zeta$	$= \frac{13}{12}\zeta$	„
*Cis*²	Q_{14}	$\zeta\sqrt[43]{2^6}$	$= 1{\cdot}10155\,\zeta$	$= \frac{11}{10}\zeta$	„
D	Q_2	$\zeta\sqrt[43]{2^7}$	$= 1{\cdot}11945\,\zeta$	$= \frac{28}{25}\zeta$	„
*Es*²	Q_{-10}	$\zeta\sqrt[43]{2^8}$	$= 1{\cdot}13764\,\zeta$	$= \frac{8}{7}$ oder $\frac{33}{29}\zeta$	„
*Cis*³	Q_{21}	$\zeta\sqrt[43]{2^9}$	$= 1{\cdot}15610\,\zeta$	$= Fes^3 = \frac{37}{32}\zeta$	„
Dis	Q_9	$\zeta\sqrt[43]{2^{10}}$	$= 1{\cdot}17492\,\zeta$	$= \frac{7}{6}$ oder $\frac{27}{23}\zeta$	„
Es	Q_{-3}	$\zeta\sqrt[43]{2^{11}}$	$= 1{\cdot}19401\,\zeta$	$= \frac{6}{5}$ „ $\frac{37}{31}\zeta$	„
*Fes*²	Q_{-15}	$\zeta\sqrt[43]{2^{12}}$	$= 1{\cdot}21341\,\zeta$	$= \frac{17}{14}\zeta$	„
*Dis*²	Q_{16}	$\zeta\sqrt[43]{2^{13}}$	$= 1{\cdot}23313\,\zeta$	$= \frac{16}{13}\zeta$	„
E	Q_4	$\zeta\sqrt[43]{2^{14}}$	$= 1{\cdot}25314\,\zeta$	$= \frac{5}{4}$ oder $\frac{99}{97}\zeta$	„
Fes	Q_{-8}	$\zeta\sqrt[43]{2^{15}}$	$= 1{\cdot}27353\,\zeta$	$= \frac{14}{11}\zeta$	„
*Dis*³	Q_{-20}	$\zeta\sqrt[43]{2^{16}}$	$= 1{\cdot}29420\,\zeta$	$= Ges^3 = \frac{22}{17}\zeta$	„
Eis	Q_{11}	$\zeta\sqrt[43]{2^{17}}$	$= 1{\cdot}31526\,\zeta$	$= \frac{25}{19}\zeta$	„
F	Q_{-1}	$\zeta\sqrt[43]{2^{18}}$	$= 1{\cdot}33663\,\zeta$	$= \frac{4}{3}\zeta$	„
*Ges*²	Q_{-13}	$\zeta\sqrt[43]{2^{19}}$	$= 1{\cdot}35835\,\zeta$	$= \frac{19}{14}\zeta$	„
*Eis*²	Q_{18}	$\zeta\sqrt[43]{2^{20}}$	$= 1{\cdot}38043\,\zeta$	$= \frac{29}{21}\zeta$	„
Fis	Q_6	$\zeta\sqrt[43]{2^{21}}$	$= 1{\cdot}40286\,\zeta$	$= \frac{7}{5}\zeta$	„

C	Q_0	ζ	$=$ ζ	$=$	
Ges	Q_{-6}	$\zeta\sqrt[43]{2^{22}}$	$= 1{\cdot}42566\,\zeta$	$= \frac{10}{7}\zeta$	angenähert
*Eis*³	Q_{-18}	$\zeta\sqrt[43]{2^{23}}$	$= 1{\cdot}44883\,\zeta$	$= As^3 = \frac{42}{29}\zeta$	„
*Fis*²	Q_{13}	$\zeta\sqrt[43]{2^{24}}$	$= 1{\cdot}47237\,\zeta$	$= \frac{25}{17}\zeta$	„
G	Q_1	$\zeta\sqrt[43]{2^{25}}$	$= 1{\cdot}49630\,\zeta$	$= \frac{3}{2}\zeta$	„
*As*²	Q_{-11}	$\zeta\sqrt[43]{2^{26}}$	$= 1{\cdot}52061\,\zeta$	$= \frac{38}{25}\zeta$	„
*Fis*³	Q_{20}	$\zeta\sqrt[43]{2^{27}}$	$= 1{\cdot}54532\,\zeta$	$= \frac{17}{11}\zeta$	„
Gis	Q_8	$\zeta\sqrt[43]{2^{28}}$	$= 1{\cdot}57054\,\zeta$	$= \frac{11}{7}\zeta$	„
As	Q_{-4}	$\zeta\sqrt[43]{2^{29}}$	$= 1{\cdot}59595\,\zeta$	$= \frac{8}{5}\zeta$	„
*Bes*²	Q_{-16}	$\zeta\sqrt[43]{2^{30}}$	$= 1{\cdot}62189\,\zeta$	$= \frac{13}{8}\zeta$	„
*Gis*²	Q_{15}	$\zeta\sqrt[43]{2^{31}}$	$= 1{\cdot}64824\,\zeta$	$= \frac{28}{17}\zeta$	„
A	Q_3	$\zeta\sqrt[43]{2^{32}}$	$= 1{\cdot}67503\,\zeta$	$= \frac{5}{3}\zeta$	„
Bes	Q_{-9}	$\zeta\sqrt[43]{2^{33}}$	$= 1{\cdot}70225\,\zeta$	$= \frac{17}{10}\zeta$	„
*Gis*³	Q_{-21}	$\zeta\sqrt[43]{2^{34}}$	$= 1{\cdot}72991\,\zeta$	$= Ces^3 = \frac{26}{15}\zeta$	„
Ais	Q_{10}	$\zeta\sqrt[43]{2^{35}}$	$= 1{\cdot}75802\,\zeta$	$= \frac{7}{4}\zeta$	„
B	Q_{-2}	$\zeta\sqrt[43]{2^{36}}$	$= 1{\cdot}78659\,\zeta$	$= \frac{25}{14}\zeta$	„
*Ces*²	Q_{-14}	$\zeta\sqrt[43]{2^{37}}$	$= 1{\cdot}81562\,\zeta$	$= \frac{20}{11}\zeta$	„
*Ais*²	Q_{17}	$\zeta\sqrt[43]{2^{38}}$	$= 1{\cdot}84513\,\zeta$	$= \frac{24}{13}\zeta$	„
H	Q_5	$\zeta\sqrt[43]{2^{39}}$	$= 1{\cdot}87511\,\zeta$	$= \frac{15}{8}\zeta$	„
Ces	Q_{-7}	$\zeta\sqrt[43]{2^{40}}$	$= 1{\cdot}90558\,\zeta$	$= \frac{21}{11}\zeta$	„
*Ais*³	Q_{-19}	$\zeta\sqrt[43]{2^{41}}$	$= 1{\cdot}93655\,\zeta$	$= Des^3 = \frac{31}{16}\zeta$	„
His	Q_{12}	$\zeta\sqrt[43]{2^{42}}$	$= 1{\cdot}96802\,\zeta$	$= \frac{61}{31}\zeta$	„
C	Q_0	$\zeta\cdot 2$	$= 2{\cdot}00000\,\zeta$		

Die erste höhere Oktave eines jeden Q wollen wir mit Q^2 bezeichnen; ihr Logarithmus wird durch Addition von log 2 zu log Q erhalten, daher

$$\log Q_1^2 = 0.4759615.$$

Die Logarithmen der übrigen aufsteigenden Quinten Q_2, Q_3, Q_4, ... erhält man nun, wenn man immer fort die Zahl 0.1749315 addiert. Trifft es sich hierbei, daß man eine Summe erhält, die größer als log 2, so ist diese nicht der Logarithmus der gesuchten Quinte, sondern der ihrer Oktave und man hat den log 2 abzuziehen. Hier folgt die ganze Rechnung:

$$\begin{array}{lrl}
\log Q_1 & = 0.1749315 & Q_1 = 1.49600 = G \\
 & + \underline{0.1749315} & \\
\log Q_2^2 & = 0.3498630 & \\
 & - \underline{0.3010300} & \\
\log Q_2 & = 0.0488330 & Q_2 = 1.11901 = D \\
 & + \underline{0.1749315} & \\
\log Q_3 & = 0.2237645 & Q_3 = 1.67404 = A \\
 & + \underline{0.1749315} & \\
\log Q_4^2 & = 0.3986960 & \\
 & - \underline{0.3010300} & \\
\log Q_4 & = 0.0976660 & Q_4 = 1.25218 = E \\
 & + \underline{0.1749315} & \\
\log Q_5 & = 0.2725975 & Q_5 = 1.87326 = H \\
 & + \underline{0.1749315} & \\
\log Q_6^2 & = 0.4475290 & \\
 & - \underline{0.3010300} & \\
\log Q_6 & = 0.1464990 & Q_6 = 1.40120 = Fis \\
 & + \underline{0.1749315} & \\
\log Q_7^2 & = 0.3214305 & \\
 & - \underline{0.3010300} & \\
\log Q_7 & = 0.0204005 & Q_7 = 1.04810 = Cis \\
 & + \underline{0.1749315} & \\
\log Q_8 & = 0.1953320 & Q_8 = 1.56795 = Gis \\
 & + \underline{0.1749315} & \\
\log Q_9^2 & = 0.3702635 & \\
 & - \underline{0.3010300} & \\
\log Q_9 & = 0.0692335 & Q_9 = 1.17283 = Dis \\
 & + \underline{0.1749315} &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rll}
\log Q_{10} & = 0.2441650 & Q_{10} = 1.75455 = \mathit{Ais} \\
 & + \underline{0.1749315} & \\
\log Q_{11}^{2} & = 0.4190965 & \\
 & - \underline{0.3010300} & \\
\log Q_{11} & = 0.1180665 & Q_{11} = 1.31240 = \mathit{Eis}.
\end{array}
$$

Jetzt gehen wir an die Berechnung der absteigenden Quinten, oder der Reihe der Quarten. Hier gilt das entgegengesetzte Verfahren:

Die Zahl 0.1749315 wird immer subtrahiert und der log 2 fallweise addiert. Die Rechnung stellt sich folgendermaßen.

$$
\begin{array}{rll}
\log 2 & = 0.3010300 & \\
 & - \underline{0.1749315} & \\
\log Q_{-1} & = 0.1260985 & Q_{-1} = 1.33690 = F \\
 & + \underline{0.3010300} & \\
 & 0.4271285 & \\
 & - \underline{0.1749315} & \\
\log Q_{-2} & = 0.2521970 & Q_{-2} = 1.78730 = B \\
 & - \underline{0.1749315} & \\
\log Q_{-3} & = 0.0772655 & Q_{-3} = 1.19472 = \mathit{Es} \\
 & + \underline{0.3010300} & \\
 & 0.3782955 & \\
 & - \underline{0.1749315} & \\
\log Q_{-4} & = 0.2033640 & Q_{-4} = 1.59722 = \mathit{As} \\
 & - \underline{0.1749315} & \\
\log Q_{-5} & = 0.0284325 & Q_{-5} = 1.06766 = \mathit{Des} \\
 & + \underline{0.3010300} & \\
 & 0.3294625 & \\
 & - \underline{0.1749315} & \\
\log Q_{-6} & = 0.1545310 & Q_{-6} = 1.42735 = \mathit{Ges} \\
 & + \underline{0.3010300} & \\
 & 0.4555610 & \\
 & - \underline{0.1749315} & \\
\log Q_{-7} & = 0.2806295 & Q_{-7} = 1.90822 = \mathit{Ces}.
\end{array}
$$

Nachdem so die Schwingungsverhältnisse aller benötigten Töne berechnet sind, ordnet man sie sowohl, wie auch ihre Logarithmen aufsteigend nach ihren numerischen Werten und nimmt namentlich in das Verzeichnis der Logarithmen auch die Oktaven, wenn nicht alle, so doch mindestens einige auf.

Hier sind die so geordneten Zahlen, die Schwingungsverhältnisse in der ersten, die Logarithmen in der zweiten Spalte:

	Schwingungs-Verhältnis	Grundton *C* 1. Log.	Grundton *Cis* 2. Log.	Schwingungs-Verhältnis	Grundton *Des* 3. Log.	Schwingungs-Verhältnis	Grundton *Eis* 4. Log.	Schwingungs-Verhältnis	Grundton *Ges* 5. Log.
C	1·00000	0·							
Cis	1·04810	0·0204005	0·						
Des	1·06766	0·0284325	0·0080320	1·01867	0·				
D	1·11901	0·0488330	0·0284325	1·06766	0·0204005	1·04810			
Dis	1·17283	0·0692335	$= D_1$		0·0408010	1·09850			
Es	1·19472	0·0772655	0·0568650	1·13990	$= D_1$				
E	1·25218	0·0976660	$= Es_1$		$= Dis_1$				
Eis	1·31240	0·1180665	$= E_1$		0·0896340	1·22923	0·		
F	1·33690	0·1260985	0·1056980	1·27555	$= E_1$		$= Des_2$		
Fis	1·40120	0·1464990	$= F_1$		$= Eis_1$		$= Des_1$		
Ges	1·42735	0·1545310	0·1341305	1·36185	$= F_1$		0·0364645	1·08759	0·
G	1·49600	0·1749315	$= Ges_1$		$= Fis_1$		$= Es_2$		$= Cis_1$
Gis	1·56795	0·1953320	$= G_1$		0·1668995	1·46859	$= Es_1$		$= Dis_2$
As	1·59722	0·2033640	0·1829635	1·52393	$= G_1$		0·0852970	1·21702	$= D_1$
A	1·67404	0·2237645	$= As_1$		$= Gis_1$		$= F_2$		$= Dis_1$
Ais	1·75455	0·2441650	$= A_1$		0·2157325	1·64336	$= F_1$		$= Eis_2$
B	1·78730	0·2521970	0·2317965	1·70528	$= A_1$	.	$= Ges_2$		$= E_1$
H	1·87326	0·2725975	$= B_1$		$= Ais_1$	.	$= Ges_1$		$= Eis_1$
Ces	1·90822	0·2806295	0·2602290	1·82066	$= B_1$	.	0·1625630	1·45400	$= F_1$
C	2·	0·3010300	$= Ces_1$	.	$= H_1$	.	$= As_2$	.	$= Fis_1$
Cis	.	0·3214305	$= C_1$	.	0·2929980	1·96335	$= As_1$	.	$= Gis_2$
Des	.	0·3291625	.	.	$= C_1$	.	0·2113960	1·62703	$= G_1$
D	.	0·3498630	.	.	.	.	$= B_2$	.	$= Gis_1$
Dis	.	0·3702635	.	.	.	.	$= B_1$	.	$= Ais_2$
Es	.	0·3782955	.	.	.	.	$= Ces_2$	.	$= A_1$
E	.	0·3986960	.	.	.	.	$= Ces_1$	.	$= Ais_1$
Eis	.	0·4190965	.	.	.	.	$= C_1$	.	0·2645655
F	.	0·4271285	.	.	.	.	.	.	$= H_1$
Fis	.	0·4475290	.	.	.	.	.	.	$= Cis_2$
Ges	.	0·4555610	.	.	.	.	.	.	$= C_1$

V. Tonsysteme der zweiten Klasse.

Wie schon im dritten Abschnitte nachgewiesen wurde, und wie dies auch aus der am Schlusse beigefügten Quinten- und Quartentabelle hervorgeht, befinden sich in der Nähe des Grundtones $C = Q_0$ nur 2 Gruppen von Tönen, deren Schwingungszahlen denen der reinen großen und kleinen Terz und Septime, nämlich

$$(44) \qquad \tfrac{5}{4}\zeta = 1 \cdot 25\,\zeta, \quad \tfrac{6}{5}\zeta = 1 \cdot 2\,\zeta, \quad \tfrac{7}{4}\zeta = 1 \cdot 75\,\zeta$$

einigermaßen ähnlich sind, und zwar zunächst die Töne

$$Q_4 = E = 1 \cdot 2656\,\zeta,\ Q_{-3} = Es = 1 \cdot 1852\,\zeta,\ Q_{10} = Ais = 1 \cdot 8020\,\zeta.$$

Sie geben, wenn zur Rolle der eben genannten Konsonanzen berufen, die Tonsysteme der ersten Klasse, von welchen der vierte Abschnitt ausführlich handelt. Dann gibt es aber noch in etwas größerer, nahe der doppelten Entfernung vom Grundtone C, eine Gruppe von Tönen, die mit ihren Schwingungszahlen den genannten reinen Verhältnissen ungleich näher kommen, und aus dieser doppelten Ursache, nämlich sowohl wegen der größeren Entfernung vom Grundtone, als auch wegen der genaueren Kongruenz mit den reinen Intervallen, Tonsysteme von besonderem Wohlklange und besonderer Reinheit versprechen.

Diese sind:

$$Q_{-8} = Fes = 1 \cdot 24\,859\,\zeta,\ Q_9 = Dis = 1 \cdot 201\,355\,\zeta,\ Q_{-14} = Ceses = 1 \cdot 75\,385\,\zeta.$$

Ihnen schließt sich noch $Q_{10} = Ais = 1 \cdot 802\,\zeta$ an als ein Ton, der zwar keine Konsonanz, aber doch wegen seiner nahen Verwandtschaft mit $\frac{9}{5}\zeta$ sehr geeignet erscheint, die Vertretung einer rauheren Septime zu übernehmen. Ihnen wollen wir also jetzt die Rolle der großen und kleinen Terz, der konsonanten *und rauheren Septime* übertragen und die Eigenschaften der dieser Annahme entspringenden Tonsysteme erforschen.

Wir temperieren zu diesem Zwecke die Quinten *Fes*, *Dis* und *Ceses* und erhalten die folgenden Schwingungszahlen dieser temperierten Töne:

$$Q_{-8} = Fes = \frac{2^{13}}{3^8 q^8}\,\zeta = 1\,.\,24\,859\,\frac{\zeta}{q^8}$$

$$Q_9 = Dis = \frac{3^9}{2^{14}}\,q^9\,\zeta = 1 \cdot 201\,355\,q^9\,\zeta$$

$$Q_{-14} = Ceses = \frac{2^{23}}{3^{14} q^{14}}\,\zeta = 1 \cdot 75\,385\,\frac{\zeta}{q^{14}}.$$

Sie sollen vermöge der ihnen zu Teil gewordenen Temperatur genau zusammenfallen mit den ebenfalls temperiert gedachten Reintönen (18), d. h. beziehentlich mit

$$T_0 = \frac{5}{4} T \zeta \qquad t_0 = \frac{6}{5} t \zeta \qquad s_0 = \frac{7}{4} s \zeta.$$

Es bestehen mithin zwischen den Temperaturen der Quinte, Großterz, Kleinterz und Septime q, T, t, und s die folgenden Gleichungen:

$$\frac{5}{4} T = \frac{2^{13}}{3^8 q^8}, \quad \frac{6}{5} t = \frac{3^9}{2^{14}} q^9, \quad \frac{7}{4} s = \frac{2^{23}}{3^{14} q^{14}} \text{ also}$$

$$T = \frac{2^{15}}{5 \cdot 3^8 q^8} \quad t = \frac{5 \cdot 3^8}{2^{15}} q^9 \quad s = \frac{2^{25}}{7 \cdot 3^{14} q^{14}}. \tag{45}$$

Aus ihnen folgt unmittelbar

$$Tt = q.$$

Also gilt auch bei den Tonsystemen der zweiten Klasse dasselbe allgemeine Gesetz, wie bei den Tonsystemen der ersten Klasse, daß nämlich die Temperaturen der beiden Terzen sich zur Temperatur der Quinte in dem früheren Sinne ergänzen. Der Grund ist der bereits im vierten Abschnitte hervorgehobene. Es sind nämlich die beiden Terzen die eine der Quarten-, die andere der Quintenreihe entnommen, und die Summe ihrer Stellenzeiger ist $9 - 8 = 1$. Die Gleichungen (45) bestimmen T, t und s in Funktion von q, und überlassen diese letztere der freien Wahl, so jedoch, daß weder q noch T, t und s sich beträchtlich von der Einheit entfernen darf. Dieser letzteren Bedingung zu entsprechen, ist es aber nicht notwendig wie in der ersten Klasse der Tonsysteme, daß $q < 1$ sei, es gibt vielmehr die Annahme $q = 1$ schon ganz annehmbare T, t, und s, nämlich:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{2^{15}}{5 \cdot 3^8} = \frac{32\,768}{32\,805} = 1 - \frac{37}{32\,805} = 1 - \frac{1}{886} \text{ nahezu}, \\
t &= \frac{5 \cdot 3^8}{2^{15}} = \frac{32\,805}{32\,768} = 1 + \frac{37}{32\,768} = 1 + \frac{1}{885} \quad \text{"} \\
s &= \frac{2^{25}}{7 \cdot 3^{14}} = \frac{33\,554\,432}{33\,480\,783} = 1 + \frac{73\,649}{33\,480\,783} = 1 + \frac{1}{454} \quad \text{"} .
\end{aligned}$$

Mit anderen Worten: Die Reihe der reinen Quinten bietet, richtig verwendet, für sich ein ganz zufriedenstellendes Tonsystem, und es muß als auffallend bezeichnet werden, daß dies der Aufmerksamkeit der vielen Quintenpuritaner bis in die neueste Zeit entgangen zu sein scheint, vielleicht weil sie zwar sehnlichst ein neues, reines Tonsystem wünschten, aber an der alten Bezeichnungsweise festhielten.

Da es nun ein gutes Tonsystem zweiter Klasse für $q = 1$ gibt, so wird es deren offenbar auch geben für $q > 1$ und für $q < 1$. Erstere besitzen reinere Septimen, letztere reinere Terzen, und da die Terzen die wichtigeren konsonanten Intervalle sind, so sieht man, daß auch in der zweiten Klasse sich die Tonsysteme, in welchen die Quintentemperatur kleiner ist als Eins, den Vorrang vor den übrigen erringen werden. Wiewohl hier die Quinten *Fes* und *Dis* die Rollen der großen und kleinen Terz übernehmen, so sind doch die Repräsentanten dieser konsonanten Intervalle in der ersten Klasse, nämlich *E* und *Es* nicht beseitigt. Sie bleiben im Tonsysteme, wenn auch nicht in Eigenschaften von Terzen, so doch wenigstens als Quarten und Quinten, und da die Quintentemperatur q im allgemeinen sehr wenig von Eins verschieden ist, so bleiben *E* und *Fes*, *Es* und *Dis* auch im temperierten Systeme zweiter Klasse Töne mit wenig verschiedenen Schwingungszahlen, so wie sie es in der Reihe der reinen Quinten sind.

Hieraus folgt, daß die Tonsysteme zweiter Klasse sehr nahe aneinander liegende Töne besitzen werden, die auch durch eine sehr weit getriebene Sparsamkeit mit Tonmitteln und Beschränkung auf eine geringe Zahl von Tönen und Tonarten nicht zu beseitigen sind. Bei vielen musikalischen Instrumenten ist dies gleichgültig, bei Saiteninstrumenten mit eingeteilten Griffbrettern hat es den Nachteil, daß die Bünde zu nahe aneinander rücken, was das Dazwischengreifen erschwert. In diesem und vielleicht noch in anderen Fällen kann mithin die Beschaffenheit des Instrumentes ein Tonsystem zweiter Klasse ausschließen.

Gehen wir jetzt an die Konstruktion der Tonleiter. Aus den drei über den Grundtönen $C = Q_0$, $F = Q_{-1}$, $G = Q_1$ aufgebauten Dreiklängen ist der erste:

$$C + Q_0 = \zeta,\ Fes = Q_{-8} = \frac{2^{13}}{3^8\, q^8}\zeta = 1\cdot 24\,859\ \frac{\zeta}{q^8},\ G = Q_1 = \frac{3}{2} q\zeta = 1\cdot 5\, q\zeta.$$

Da die temperierte Unterdominante die Schwingungszahl $\frac{4}{3\,q}\cdot\zeta$ hat, so gewinnt man den ihr zugehörigen Dreiklang aus dem eben vorliegenden, indem man $\frac{4}{3\,q}\zeta$ statt ζ setzt und die Namen ändert:

$$F = Q_{-1} = \frac{4\,\zeta}{3\,q} = \frac{1\cdot 3333\,\zeta}{q},\ Bes = Q_{-9} = \frac{12^{15}}{3^9\,q^9}\zeta = \frac{1\cdot 664\,787\,\zeta}{q^9},\ C = Q_0 = 2\,\zeta.$$

Zur Oberdominante G gehört die Schwingungszahl $\frac{3}{2} q\zeta$, weshalb man ihren Dreiklang aus dem C-Dreiklange erhält, wenn man anstatt ζ die Zahl $\frac{3}{2} q\zeta$ setzt und die Tonnamen in G, Ces, D umschreibt:

$$G = Q_1 = \frac{3}{2} q\zeta = 1\cdot 5 q\zeta,\ Ces = Q_{-7} = \frac{2^{12}\,\zeta}{3^7\,q^7} = \frac{1\cdot 872\,885\,\zeta}{q^7},$$
$$D = Q_2 = \frac{3^2 q^2\zeta}{2^3} = 1\cdot 125\, q^2\zeta.$$

Will man den Septimenakkord der Oberdominante bilden, so gehört hierzu auch noch ein vierter Ton, der entweder $Geses = Q_{-13}$, oder $Eis = Q_{11}$ sein kann; ihre Schwingungszahlen sind:

$$Geses = Q_{-3} = \frac{2^{21}\zeta}{3^{13}q^{13}} = \frac{1 \cdot 315\,387\,\zeta}{q^{13}}, \quad Eis = Q_{11} = \frac{3^{11}q^{11}\zeta}{2^{17}} = 1 \cdot 351\,524\,q^{11}\zeta.$$

Ferner kommt noch die kleine Terz des Grundtones C in Betracht, die hier Dis ist und die Schwingungszahl besitzt:

$$Q_9 = Dis = \frac{3^9 q^9 \zeta}{2^{14}} = 1 \cdot 201\,355 q^9 \zeta.$$

Aus diesen Tönen der angeführten Dreiklänge stellt man folgende Durtonleiter zusammen:

C	D	Fes	F	G	Bes	Ces	C
Q_0	Q_2	Q_{-8}	Q_{-1}	Q_1	Q_{-9}	Q_{-7}	Q_0
ζ	$\frac{3^2 q^2 \zeta}{2^3}$	$\frac{2^{13}\zeta}{3^8 q^8}$	$\frac{2^2\zeta}{3q}$	$\frac{3q\zeta}{2}$	$\frac{2^{15}\zeta}{3^9 q^9}$	$\frac{2^{12}\zeta}{3^7 q^7}$	2ζ
ζ	$1{\cdot}125 q^2\zeta$	$1{\cdot}24859\frac{\zeta}{q^8}$	$1{\cdot}3333\frac{\zeta}{q}$	$1{\cdot}5q\zeta$	$1{\cdot}664787\frac{\zeta}{q^9}$	$1{\cdot}872885\frac{\zeta}{q^7}$	2ζ.

Die Schwingungszahlen stehen zueinander in folgenden Beziehungen:

$$\frac{D}{C} = \frac{G}{F} = \frac{Ces}{Bes} = \frac{3^2}{2^3}q^2$$

$$\frac{Fes}{D} = \frac{Bes}{G} = \frac{2^{16}}{3^{10}q^{10}}$$

$$\frac{F}{Fes} = \frac{C}{Ces} = \frac{Dis}{D} = \frac{3^7 q^7}{2^{11}}.$$

Hieraus folgt, daß die Tonsysteme der zweiten Klasse zwischen dem großen ganzen Ton C—D und kleinen ganzen Ton D—Fes im allgemeinen einen Unterschied machen. Diese Ganztöne werden nur dann einander gleich, wenn

$$\frac{3^2}{2^3}q^2 = \frac{2^{16}}{3^{10}q^{10}},\ q^{12} = \frac{2^{19}}{3^{12}} \text{ ist.}$$

Sonst ist das zwischen ihnen bestehende Intervall:

$$\frac{D}{C} : \frac{Fes}{D} = \frac{3^{12}}{2^{19}}q^{12}.$$

Will man eine allgemeine, in allen möglichen Klassen von Tonsystemen gleichmäßig gültige Definition des großen und kleinen halben Tones aufstellen, so kann dies nur die folgende, der reinen Tonleiter entnommene sein: Der große halbe Ton ist das Intervall zwischen der großen Terz und der Quarte, hier:

$$\frac{F}{Fes} = \frac{Dis}{D} = \frac{3^7 q^7}{2^{11}};$$

ebenso: Der kleine Halbton ist das Intervall zwischen der großen und kleinen Terz, hier:

$$\frac{Fes}{Dis} = \frac{2^{27}}{3^{17}q^{17}}.$$

Da solchergestalt die Intervalle *Fes—F*, und *D—Dis* große Halbtöne sind, so bedeutet die Endsilbe *es*, so oft sie vorkommt, in allen Tonsystemen der zweiten Klasse eine Erniedrigung um einen *großen* Halbton, die Endsilbe *is* hingegen eine Erhöhung um einen solchen. Hier ist es also anders als in der ersten Klasse, wo *es* und *is* Erniedrigung und Erhöhung um einen *kleinen* Halbton andeuten.

Diese beiden Halbtöne setzen sich zu einem kleinen ganzen Ton zusammen wie in der reinen Tonleiter, denn es ist: $\frac{Fes}{Dis} \cdot \frac{F}{Fes} = \frac{2^{16}}{3^{10}q^{10}}$ ein kleiner ganzer Ton. Das Intervall zwischen den beiden Halbtönen

$$\frac{F}{Fes} : \frac{Fes}{Dis} = \frac{3^{24}q^{24}}{2^{38}} = \left[\frac{3^{12}q^{12}}{2^{19}}\right]^2$$

ist zweimal das Intervall zwischen den beiden ganzen Tönen.

Endlich sind noch die beiden Septimen, die sich in der Nähe der Unterdominante F befinden, ins Auge zu fassen. Die zwischen diesen Tönen vorhandenen Intervalle bestimmen die Gleichungen:

$$\frac{F}{Geses} = \frac{Eis}{F} = \frac{3^{12}q^{12}}{2^{19}} \text{ und } \frac{Eis}{Geses} = \left[\frac{3^{12}q^{12}}{2^{19}}\right]^2,$$

mithin steht die Unterdominante von den beiden Septimen des Oberdominantakkordes in demselben musikalischen Abstande, wie die beiden ganzen Töne, und es liegen diese zwei Septimen zu verschiedenen Seiten der Unterdominante, die eine höher, die andere um ebensoviel tiefer. Unter sich aber stehen sie in demselben Abstande, wie die beiden Halbtöne. Fällt mithin der große mit dem kleinen ganzen Ton in Eins zusammen, so wird auch der große dem kleinen Halbtone gleich, und die beiden Septimen gehen in der Unterdominante auf, das geschieht nach dem Obigen für:

$$q^{12} = \frac{2^{19}}{3^{12}}, \text{ also } q = 0 \cdot 99\,887$$

was die wohlbekannte Quintentemperatur im 12 stufigen chromatischen Tonsysteme ist.

Dieses Tonsystem gehört also auch zur zweiten Klasse und zeichnet sich vor allen anderen aus durch die merkwürdige Eigenschaft, beiden Klassen zugleich gewissermaßen als Fundamental-Tonsystem anzugehören.

Es versteht sich von selbst, daß man nicht bloß über dem Grundtone $C = Q_0$, sondern auch über jedem anderen, der temperierten Quintenreihe entnommenen Tone Q_p eine Tonleiter errichten kann. Die allgemeine Formel für dieselbe geht aus derjenigen für den Grundton Q_0 dadurch hervor, daß man sämtliche Stellenzeiger um p Einheiten vermehrt, wodurch erhalten wird:

$$(46) \qquad Q_p \quad Q_{p+2} \quad Q_{p-8} \quad Q_{p-1} \quad Q_{p+1} \quad Q_{p-9} \quad Q_{p-7} \quad Q_p.$$

Diese Formel unterscheidet sich sehr wesentlich von der für die Tonsysteme der ersten Klasse gültigen, nämlich:

$$Q_p \quad Q_{p+2} \quad Q_{p+4} \quad Q_{p-1} \quad Q_{p+1} \quad Q_{p+3} \quad Q_{p+5} \quad Q_p,$$

und zwar hauptsächlich durch einen besonderen Umstand, der Erwähnung verdient. Die letztere, d. h. die Tonleiter der ersten Klasse besteht aus zwei Tetrachorden oder Gruppen von 4 Tönen:

$$\begin{matrix} Q_p & Q_{p+2} & Q_{p+4} & Q_{p-1} \\ Q_{p+1} & Q_{p+3} & Q_{p+5} & Q_p. \end{matrix}$$

die auseinander auf dieselbe Weise abgeleitet werden, wie man auch die aufeinander folgenden Tonarten zu entwickeln pflegt; nämlich durch Erhöhung aller Stellenzeiger um die Einheit.

Die Folge hiervon ist, daß die erste Hälfte jeder Tonleiter mit der letzten Hälfte der nächst vorhergehenden kongruent ist, wie im folgenden Beispiele einiger aufeinander folgender Tonleitern der ersten Klasse deutlich zu ersehen ist:

C	*D*	*E*	*F*	*G*	*A*	*H*	*C*	
G	*A*	*H*	*C*	*D*	*E*	*Fis*	*G*	
D	*E*	*Fis*	*G*	*A*	*H*	*Cis*	*D*	usw.

Dies ist nun in der zweiten Klasse nicht mehr der Fall. Hier läßt sich die Tonleiter nicht mehr in Tetrachorde zerlegen, sowie auch die reine Tonleiter eine Zerlegung dieser Art nicht gestattet.

Der genaueren Orientierung wegen mögen hier die Tonleitern der zweiten Klasse über den Grundtönen

$$Q_0 \quad Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5 \quad Q_6 \cdots$$

ebenso

$$Q_{-1} \quad Q_{-2} \quad Q_{-3} \quad Q_{-4} \quad Q_{-5} \quad Q_{-6} \cdots$$

auch in ihrer musikalischen Bezeichnung angeführt werden:

C	*D*	*Fes*	*F*	*G*	*Bes*	*Ces*	*C*
G	*A*	*Ces*	*C*	*D*	*Fes*	*Ges*	*G*
D	*E*	*Ges*	*G*	*A*	*Ces*	*Des*	*D*
A	*H*	*Des*	*D*	*E*	*Ges*	*As*	*A*
E	*Fis*	*As*	*A*	*H*	*Des*	*Es*	*E*
H	*Cis*	*Es*	*E*	*Fis*	*As*	*B*	*H*
Fis	*Gis*	*B*	*H*	*Cis*	*Es*	*F*	*Fis*
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

F	*G*	*Bes*	*B*	*C*	*Eses*	*Fes*	*F*
B	*C*	*Eses*	*Es*	*F*	*Ases*	*Bes*	*B*
Es	*F*	*Ases*	*As*	*B*	*Deses*	*Eses*	*Es*
As	*B*	*Deses*	*Des*	*Es*	*Geses*	*Ases*	*As*
Des	*Es*	*Geses*	*Ges*	*As*	*Ceses*	*Deses*	*Des*
Ges	*As*	*Ceses*	*Ces*	*Des*	*Feses*	*Geses*	*Ges.*

Man wird keine Schwierigkeit finden, die Reihe dieser Tonleitern nach beiden Seiten fortzusetzen ins Unbegrenzte. In der vertikalen Richtung bilden die Töne dieser Leitern eine auf- oder absteigende geordnete Reihe von Quinten, die beliebig fortgesetzt werden kann.

Auch isoliert kann jede dieser Tonleitern aus der allgemeinen Formel gebildet werden, zunächst in der mathematischen Bezeichnung, die dann mit Hilfe der Quintentabelle in die musikalische umgesetzt werden kann. Zum Beispiele: Man wünscht die Dur-Tonleiter zweiter Klasse über dem Grundtone $Eis = Q_{11}$, so setzt man in der allgemeinen Formel $p = 11$ und erhält:

$$Q_{11} \quad Q_{13} \quad Q_3 \quad Q_{10} \quad Q_{12} \quad Q_2 \quad Q_4 \quad Q_{11}.$$

Die Quintentabelle lehrt nun, daß dies nach der musikalischen Bezeichnung heiße:

Eis Fisis A Ais His D E Eis.

Man kann auch eine allgemeine Formel für die Moll-Tonleitern zweiter Klasse aus den Moll-Dreiklängen des Grundtones und der Oberdominante darstellen und wird zu diesem Ende auf folgende Weise vorgehen. Man bildet vor allem den Moll-Dreiklang des Grundtones $Q = C$. Es ist:

$$Q_0 = C = \zeta, \quad Q_9 = Dis = \frac{3^9 q^9 \zeta}{2^{14}} = 1{\cdot}201355 q^9 \zeta, \; Q_1 = G = \frac{3}{2} q \zeta = 1{\cdot}5 q \zeta;$$

hieraus bildet man sodann die Mollakkorde der Unterdominante F und der Oberdominante G durch Einsetzen der ihnen entsprechenden Schwingungszahlen $\frac{4}{3q}\zeta$ und $\frac{3}{2} q \zeta$ anstatt ζ; sie sind:

$$Q_{-1} = F = \frac{4}{3q}\zeta = 1{\cdot}3333 \frac{\zeta}{2}, \; Q_8 = Gis = \frac{3^8 q^8 \zeta}{2^{13}} = 1{\cdot}601806 q^8 \zeta,$$

$$Q_0 = 2\zeta = C,$$

$$Q_1 = G = \frac{3}{3} q \zeta = 1{\cdot}5 q \zeta, \quad Q_{10} = Ais = \frac{3^{10} q^{10}}{2^{15}} \zeta = 1{\cdot}802032 q^{10} \zeta,$$

$$Q_2 = D = \frac{3^2 q^2 \zeta}{2^3} = 1{\cdot}125 q^2 \zeta.$$

Ordnet man endlich die Töne dieser 3 Akkorde nach der Größe ihrer Schwingungszahlen, so bekommt man zunächst die Moll-Tonleiter über dem Grundtone $Q_0 = C$

C	D	Dis	F	G	Gis	Ais	C
Q_0	Q_2	Q_9	Q_{-1}	Q_1	Q_8	Q_{10}	Q_0
ζ	$\frac{3^2}{2^3}q^2\zeta$	$\frac{3^9 q^9 \zeta}{2^{14}}$	$\frac{2^2\zeta}{3q}$	$\frac{3}{2}q\zeta$	$\frac{3^8 q^8 \zeta}{2^{12}}$	$\frac{3^{10}q^{10}\zeta}{2^{15}}$	2ζ
ζ	$1{\cdot}125q^2\zeta$	$1{\cdot}201355q^9\zeta$	$1.3333\frac{\zeta}{q}$	$1{\cdot}5q\zeta$	$1{\cdot}601806q^8\zeta$	$1{\cdot}802032q^{10}\zeta$	$2\zeta.$

Hieraus folgt die mathematische Formel für die Molltonleiter über dem Grundtone Q_p durch Erhöhung sämtlicher Stellenzeiger um p Einheiten:

$$Q_p \quad Q_{p+2} \quad Q_{p+9} \quad Q_{p-1} \quad Q_{p+1} \quad Q_{p+8} \quad Q_{p+10} \quad Q_p.$$

Es wird auch hier, um den Zusammenhang zwischen den Moll- und Dur-Tonarten klarer ersichtlich zu machen, frommen, einige der Mollskalen in der musikalischen Bezeichnung vorzuführen, etwa die über den Grundtönen Q_0, Q_{-1}, $Q_{-2}\dots Q_1$, $Q_2\dots$ aufgebauten.

C	*D*	*Dis*	*F*	*G*	*Gis*	*Ais*	*C*
F	*G*	*Gis*	*B*	*C*	*Cis*	*Dis*	*F*
B	*C*	*Cis*	*Es*	*F*	*Fis*	*Gis*	*B*
Es	*F*	*Fis*	*As*	*B*	*H*	*Cis*	*Es*
As	*B*	*H*	*Des*	*Es*	*E*	*Fis*	*As*
Des	*Es*	*E*	*Ges*	*As*	*A*	*H*	*Des*
Ges	*As*	*A*	*Ces*	*Des*	*D*	*E*	*Ges*
Ces	*Des*	*D*	*Fes*	*Ges*	*G*	*A*	*Ces*
Fes	*Ges*	*G*	*Bes*	*Ces*	*C*	*D*	*Fes*
Bes	*Ces*	*C*	*Eses*	*Fes*	*F*	*G*	*Bes*
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
G	*A*	*Ais*	*C*	*D*	*Dis*	*Eis*	*G*
D	*E*	*Eis*	*G*	*A*	*Ais*	*His*	*D*
A	*H*	*His*	*D*	*E*	*Eis*	*Tibis*	*A*
E	*Fis*	*Fisis*	*A*	*H*	*His*	*Cisis*	*E*
H	*Cis*	*Cisis*	*E*	*Fis*	*Fisis*	*Gisis*	*H*
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Ihre Betrachtung und der Vergleich mit den eben angeführten Dur-Tonleitern lehrt, daß es in der zweiten Klasse ganz andere Verhältnisse und ganz andere Verwandtschaften der Tonarten gebe, als in der ersten Klasse. So sind z. B. in allen Tonsystemen der ersten Klasse C-Dur und A-Moll verwandte Tonarten, und die C-Durskala besteht aus genau denselben Tönen, wie die A-Molltonleiter. Von dieser Verwandtschaft ist in den Tonsystemen der zweiten Klasse keine Spur mehr zu entdecken. Denn es ist mit Ausnahme von D der C-Durnicht ein einziger in der A-Moll-Leiter vorhanden; dagegen zeigt sich C-Dur mit *Bes*-Moll, und A-Moll mit *His*-Dur verwandt, weil die entsprechenden Tonleitern nur je um einen einzigen Ton voneinander verschieden sind. Eine leichte Untersuchung lehrt, daß die folgenden Dur-Tonarten den unmittelbar unten bezeichneten Molltonarten beziehungsweise verwandt sind in derselben Weise, wie C-Dur mit A-Moll in der ersten Klasse:

$$\begin{array}{lccccccccccl} \ldots & As & Es & B & F & C & G & D & A & E & H & Fis \ldots \text{Dur} \\ = \ldots & Geses & Deses & Ases & Eses & Bes & Fes & Ces & Ges & Des & As & Es \ldots \text{Moll.} \end{array}$$

Kürzer jedoch und zweckmäßiger drückt man diese Verhältnisse allgemein in der arithmetischen Sprache folgendermaßen aus: In der ersten Klasse der Tonsysteme ist Q_p Dur mit Q_{p+3} Moll verwandt, denn die diesen Tönen entsprechenden Tonleitern:

$$\begin{array}{ccccccccl} Q_p & Q_{p+2} & Q_{p+4} & Q_{p-1} & Q_{p+1} & Q_{p+3} & Q_{p+5} & Q_p & \text{Dur} \\ Q_{p+3} & Q_{p+5} & Q_p & Q_{p+2} & Q_{p+4} & Q_{p-1} & Q_{p+1} & Q_{p+3} & \text{Moll} \end{array}$$

bestehen genau aus denselben Tönen.

In der zweiten Klasse hingegen ist Q_p Dur mit Q_{p-9} Moll verwandt, denn die diesen Tönen angehörigen Leitern nämlich:

$$\begin{array}{ccccccccl} Q_p & Q_{p+2} & Q_{p-8} & Q_{p-1} & Q_{p+1} & Q_{p-9} & Q_{p-7} & Q_p & \text{Dur} \\ Q_{p-9} & Q_{p-7} & Q_p & Q_{p-10} & Q_{p-8} & Q_{p-1} & Q_{p+1} & Q_{p-9} & \text{Moll} \end{array}$$

weichen bloß in einem Tone, der Q_{p+2} in der Dur- und Q_{p-10} in der Mollskala ist, voneinander ab.

Diese Verschiedenheit in der Verwandtschaft ist aber natürlich nicht die einzige zwischen den Tonsystemen der zwei Klassen bestehende. Diese ist vielmehr eine sehr mannigfache und tiefgreifende, kann jedoch in dieser Abhandlung nicht erschöpfend besprochen werden. Nur soviel mag zur oberflächlichen Orientierung des musikverständigen Lesers hier gesagt sein, daß, wenn er in dem folgenden Schema die ganze Tonsippschaft erster Klasse als nach den Verwandtschaftsgraden gruppiert erkennt

$$\begin{array}{cccccccc} \ldots G & D & A & E & H & Fis & Cis & \\ \ldots Es & B & F & C & G & D & A & E \\ \ldots Ges & Des & As & Es & B & F & C, & \end{array}$$

das ähnliche Schema in der zweiten Klasse folgendermaßen aussieht:

	Ases		*Eses*		*Bes*		*Fes*		*Ces*		*Ges*		*Des*	
Es		*B*		*F*		*C*		*G*		*D*		*A*		*E*
	Fis		*Cis*		*Gis*		*Dis*		*Ais*		*Eis*		*His.*	

Die in diesen zwei Schematen gleichgelegenen Töne spielen auch in den beiden Klassen der Tonsysteme dieselbe Rolle.

Nimmt man allgemein an, der Musiker brauche $p+1$ Tonleitern in Dur sowohl wie auch in Moll, über den Grundtönen $Q_0, Q_1, Q_2 \ldots Q_p$, um gute Musik machen zu können, so lehrt die Ansicht der allgemeinen Formeln im vierten Abschnitte für die Dur- und Moll-Skalen über dem Grundtone Q_p und der Vergleich mit jenen über dem Grundtone Q_0, daß hierzu die folgende Reihe fortlaufender Quinten, $p+20$ an der Zahl, notwendig ist:

$$Q_{-9} \quad Q_{-8} \ldots Q_0 \quad Q_1 \quad Q_2 \ldots Q_p \quad Q_{p+1} \ldots Q_{p+10},$$

also um 19 Töne mehr als Tonarten und Leitern. Hiebei sind überdies die Septimen noch gar nicht in Betracht gezogen und müssen genommen werden, wie sie in der betreffenden Tonart vorhanden sind. Dies leidet eine Ausnahme bei geschlossenen Tonsystemen, bei welchen auch hier ein sehr bedeutendes Ersparnis an Tonmitteln erzielt werden kann. So oft es nämlich gelingt, ein $(p+1)$ stufiges geschlossenes Tonsystem aufzufinden, genügt dasselbe vollkommen zur Aufstellung von $p+1$ Moll- und Dur-Tonleitern, die mit allen Intervallen gleichmäßig versehen sind.

Es entsteht also die nicht unwichtige Frage: Gibt es geschlossene Tonsysteme der zweiten Klasse, und welche sind ihre Stufenzahlen? Diese Frage zu beantworten erwäge man, daß in einem $(p+1)$stufigen geschlossenen Tonsysteme die Bestandtöne eine geometrische Progression bilden:

$$\zeta \quad \alpha\zeta \quad \alpha^2\zeta \quad \alpha^3\zeta \ldots \alpha^p\zeta, \quad \text{wo} \quad \alpha^{p+1} = 2 \quad \text{ist.}$$

Ein jedes in der Tonleiter vorkommende Intervall erhält von den $p+1$ Stufen, in welche die Oktave zerfällt, eine bestimmte, notwendigerweise ganze Zahl. Das kleinste der in einer Tonleiter zweiter Klasse vorkommende Intervall ist nun vermöge der kurz vorher angestellten Betrachtungen das zwischen einem großen und kleinen ganzen Ton vorhandene. Angenommen, es eigne sich k Tonstufen an, der kleine Halbton hingegen nehme von diesen Stufen m für sich in Anspruch, so bekommt der große Halbton dem oben Gesagten nach $(m+2k)$ Stufen. Der kleine ganze Ton erhält, weil er aus den beiden Halbtönen zusammengesetzt ist, $(2m+2k)$ Stufen. Also besitzt der große ganze Ton die Stufenzahl $2m+3k$.

In der Tonleiter zweiter Klasse kommen, sowie in der reinen Tonleiter, 3 große ganze, 2 kleine ganze, und 2 große Halbtöne vor; sie erhalten zusammen genommen $12m + 17k$ Stufen, oder $12(m + k) + 5k$ an der Zahl. Sie machen auch eine Oktave aus, man hat daher die Gleichung:

$$p + 1 = 12(m + k) + 5k, \tag{47}$$

in welcher für k und m beliebige ganze und positive Werte gesetzt werden können.

Wir setzen erstens $k = 0$, so ergibt sich die erste Gattung der geschlossenen Tonsysteme der zweiten Klasse, die für

$$\begin{array}{rllll} m = & 1 & 2 & 3 & 4 \ldots \\ p + 1 = & 12 & 24 & 36 & 48 \ldots \text{stufig} \end{array}$$

ausfallen; sie sind alle von dem 12stufigen chromatischen Systeme nicht verschieden, welches mithin auch in der zweiten Klasse für sich eine Gattung darstellt.

Die zweite Gattung geschlossener Tonsysteme erhält man für $k = 1$; sie besitzen beziehentlich für

$$\begin{array}{rllllllll} m = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \ldots \\ p + 1 = 12(m + 1) + 5 = & 17 & 29 & 41 & 53 & 65 & 77 & 89 & 101 \ldots \text{Stufen.} \end{array}$$

Die ihnen entsprechenden Quintentemperaturen q erhält man, wenn man der Reihe nach setzt:

$$Q_0 = Q_{17} \quad Q_{29} \quad Q_{41} \quad Q_{53} \quad Q_{65} \quad Q_{77},$$

d. h.

$$1 = 0{\cdot}962169 q^{17}, 0{\cdot}975296 q^{29}, 0{\cdot}988602 q^{41}, 1{\cdot}00209 q^{53}, 1{\cdot}015762 q^{65}, 1{\cdot}029620 q^{77},$$

woraus

$$q = 1{\cdot}002236,\ 1{\cdot}000863,\ 1{\cdot}000278,\ 0{\cdot}999961,\ 0{,}999759,\ 0{\cdot}999621 \text{ usw.}$$

folgt.

Eine dritte Gattung geschlossener Tonsysteme liefert die Annahme $k = 2$, der die Stufenzahl: $p + 1 = 12(m + 2) + 10$ entspricht, welcher nun wieder für

$$\begin{array}{rlllllllll} m = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \ldots \\ p + 1 = 12(m + 2) + 10 = & 34 & 46 & 58 & 70 & 82 & 94 & 106 & 118 & 130 \ldots \end{array}$$

stufige Tonsysteme entsprechen. Sie sind nicht alle von den der zweiten Gattung angehörigen verschieden, das 34stufige ist vielmehr identisch mit dem 17stufigen, das 58-, 82-, 106-, 130 ... stufige beziehentlich identisch mit dem 29-, 41-, 53-, 65stufigen zweiter Gattung, so daß als wesentlich zur dritten Gattung gehörig die den Annahmen

$$m = 1, \quad 3, \quad 5, \quad 7 \ldots 2n + 1$$

entsprechenden übrig bleiben, und also die Formel, welche nur Tonsysteme dritter Gattung liefert, geschrieben werden kann:

$$p + 1 = 24(n + 2) - 2.$$

In der Tat ergibt diese für die folgenden Werte von n die entsprechenden Stufenzahlen:

$$\begin{aligned} n &= 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \ldots, \\ p + 1 = 24(n + 2) - 2 &= 46, \quad 70, \quad 94, \quad 118, \quad 142, \quad 166, \ldots, \end{aligned}$$

welche Tonsysteme der dritten Gattung angehören, die unter den zur zweiten Gattung zählenden nicht angetroffen werden. Sie können alle als in die zweite Gattung interpolierte Tonsysteme betrachtet werden.

Das 46stufige fällt seiner Quintentemperatur, mithin auch seinen übrigen Eigenschaften nach zwischen das 17- und 29stufige zweiter Gattung, das 70stufige zwischen das 29- und das 41stufige, das 94-stufige zwischen das 41- und 53stufige, das 118stufige zwischen das 53- und 65stufige zweiter Gattung. Wenn mithin die Quintentemperatur q des 53stufigen Tonsystems vielleicht für zu klein, die des 65stufigen dagegen aus irgend einem Grunde als zu hoch erachtet werden sollte, so bietet sich zunächst das 118stufige Tonsystem als möglicherweise entsprechend an.

Die Quintentemperaturen q dieser geschlossenen Tonsysteme dritter Gattung erhält man wieder, wenn man der Reihe nach tetzt:

$$Q_0 = \quad Q_{46}, \qquad Q_{70}, \qquad Q_{94}, \quad Q_{118},$$

das heißt $\quad 1 = 0.938400 q^{46}, \quad 0.964180 q^{70},$

woraus $\quad q = 1.0002536, \quad 1.000521$

berechnet wird. Nun wäre eine vierte Gattung geschlossener Tonsysteme an der Reihe, erhalten durch die Voraussetzung $k = 3$, der die Stufenzahl

$$p + 1 = 12(m + 4) + 3$$

entspricht. Diese Systeme zählen beziehentlich:

$$\begin{aligned} m &= 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6, \ 7, \ 8, \ 9, \ 10, \ldots \\ p + 1 = 12(m + 4) + 3 &= 51, 63, 75, 87, 99, 111, 123, 135, 147, 159, 171, \ldots \end{aligned}$$

Stufen. Von ihnen ist das 51-, 87-, 123-, 159stufige mit dem 17-, 29-, 41-, 53-, ... stufigen der zweiten Gattung identisch. Die übrigen sind zwischen die Tonsysteme zweiter Gattung zu zweien und zweien eingeschoben.

So fortschreitend und der Reihe nach $k = 4, 5, 6, \ldots$ annehmend bekäme man eine 5., 6., 7., ... usw. Gattung geschlossener Tonsysteme von immerfort zunehmenden Stufenzahlen, die zum Teil sich zwischen dieselben einschieben. Begreiflicherweise behaupten die früheren vor den späteren Gattungen angehörigen Tonsysteme unter übrigens gleichen Umständen wegen der namhaft geringeren Stufenzahl den Vorzug, der übrigens in dem Falle, wo man alle Töne zu verwenden nicht in der Lage ist, an Bedeutung sehr verlieren kann, und auch dann wirklich verliert, wenn man wegen der Einrichtung der Tastatur von der geschlossenen Beschaffenheit des Tonsystems keinen Gebrauch machen kann.

Wir wollen nun mit einigen Tonsystemen, in welchen die Summe der Quadrate aller mit ihren Gewichtszahlen multiplizierten Verfälschungen der konsonanten Intervalle ein Minimum ist, einige Bekanntschaft suchen, so wie wir dies bei dem Tonsysteme der ersten Klasse getan haben, bemerken aber hier, daß man gerade wie bei den Tonsystemen erster Klasse für die Septime eine doppelte Wahl treffen kann. So wie sich nämlich dort als Septimen von *C* zwei Töne, nämlich *B* und *Ais* darbieten, von welchen der erste diese Stelle im 12stufigen Systeme wirklich übernimmt, während sich für die große Mehrzahl der übrigen Tonsysteme erster Klasse *Ais* besser verwerten läßt, so verhält sich die Sache in der zweiten Klasse auch. Es bieten sich als Septimen dar erstens die vierzehnte vom Grundtone *C* gezählte Quarte *Ceses*; wählt man sie, so ergeben sich für die Temperaturen der konsonanten Hauptintervalle die Gleichungen (45), d. h.

$$T = \frac{2^{15}}{5 \cdot 3^8 q^8}, \quad t = \frac{5 \cdot 3^8 q^8}{2^{15}}. \quad s = \frac{2^{25}}{7 \cdot 3^{14} \cdot q^{14}}.$$

Man kann aber noch einem anderen Tone die Rolle der Septime übertragen, nämlich der neununddreißigsten vom Grundtone *C* aus gezählten Quinte, deren musikalischer Name *Eisisisisis* ist. Die Schwingungszahl dieses Reintones entnimmt man der Quintentabelle, welche $Q_{39} = \frac{3^{39}}{2^{61}} = 1.757515\zeta$ ist.

Geht man nun von den reinen Tönen zu temperierten über, so erhält einerseits die 39. Quinte den Faktor q^{39}, während andererseits die reine Septime mit der Schwingungszahl $\frac{7}{4}\zeta$ in die temperierte $\frac{7}{4}s\zeta$ übergeht. Man hat also hier:

$$\frac{7}{4}s = \frac{3^{39}}{2^{61}} \cdot q^{39} \quad \text{oder} \quad s = \frac{3^{39}}{7 \cdot 2^{59}} q^{39}.$$

Diese zweite Septime ist viel weiter vom Grundtone entfernt als die erste, erweist sich also nur brauchbar bei solchen Tonsystemen, die eine sehr bedeutende Stufenzahl oder einen sehr großen Tonreichtum besitzen.

Setzen wir jetzt, von den Temperaturen zu den Verfälschungen übergehend,

$$q = 1 + \varkappa, \quad T = 1 + \theta, \quad t = 1 + \tau, \quad s = 1 + \sigma;$$

führen wir diese Werte in die obigen Formeln ein und lassen, weil $\varkappa$ der Natur der Sache nach einen sehr kleinen Bruch vorstellt, die höheren Potenzen desselben weg, so ergeben sich für die Verfälschungen der Hauptintervalle folgende Gleichungen:

$$\theta = \frac{2^{15}}{5 \cdot 3^8}\left[-\frac{37}{2^{15}} - 8\varkappa\right],$$

$$\tau = \frac{5 \cdot 3^8}{2^{15}}\left[\frac{37}{5 \cdot 3^8} + 9\varkappa\right],$$

$$\sigma = \frac{2^{25}}{7 \cdot 3^{14}}\left[\frac{73649}{2^{25}} - 14\varkappa\right]$$

oder, wenn die 39. Quinte als Septime beliebt wird:

$$\sigma = \frac{3^{39}}{7 \cdot 2^{59}}\left[\frac{17329886895011851}{3^{39}} + 39\varkappa\right].$$

Nennen wir jetzt die Gewichte der Verfälschungen der Quinte, großen Terz, kleinen Terz, Septime beziehentlich $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{s}$, so ist die Summe der Quadrate, die ein Minimum werden soll, folgende:

$$\sum = \mathfrak{q}^2\varkappa^2 + \mathfrak{T}^2\theta^2 + \mathfrak{t}^2\tau^2 + \mathfrak{s}^2\sigma^2,$$

und man hat im Falle des Minimums $\frac{d\sum}{d\varkappa} = 0$ oder, da

$$\frac{d\theta}{d\varkappa} = -\frac{2^{18}}{5 \cdot 3^8}, \quad \frac{d\tau}{d\varkappa} = \frac{5 \cdot 3^{10}}{2^{15}}, \quad \frac{d\sigma}{d\varkappa} = -\frac{2^{26}}{3^{14}},$$

bezw. wenn die zweite Septime vorgezogen wird,

$$\frac{d\sigma}{d\varkappa} = \frac{39 \cdot 3^{39}}{7 \cdot 2^{59}}$$

ist, eine der folgenden zwei Bestimmungsgleichungen für $\varkappa$

$$\mathfrak{q}^2\varkappa + \frac{2^{33}\mathfrak{T}^2}{5^2 3^{16}}\left[\frac{37}{2^{15}} + 8\varkappa\right] + \frac{5^2 \cdot 3^{18}\mathfrak{t}^2}{2^{30}}\left[\frac{37}{5 \cdot 3^8} + 9\varkappa\right] - \frac{2^{51}\mathfrak{s}^2}{7 \cdot 3^{28}}\left[\frac{73649}{2^{25}} - 14\varkappa\right] = 0$$

oder für den Fall der zweiten Septime

$$\mathfrak{q}^2\varkappa + \frac{2^{33}\mathfrak{T}^2}{2^2 \cdot 3^{16}}\left[\frac{37}{2^{15}} + 8\varkappa\right] + \frac{5^2 \cdot 3^{18}\mathfrak{t}^2}{2^{30}}\left[\frac{37}{5 \cdot 3^8} + 9\varkappa\right]$$
$$+ \frac{39 \cdot 3^{78}\mathfrak{s}^2}{7^2 \cdot 2^{118}}\left[\frac{17329886895011851}{3^{39}} + 39\varkappa\right] = 0.$$

Durch die Auflösung dieser beiden Gleichungen gewinnt man die vorteilhafteste Verfälschung der Quinte, welche das wohlklingendste Tonsystem gibt, ausgedrückt durch eine der folgenden beiden Formeln:

$$\varkappa = -\frac{2^{48}\cdot 3^{12}\cdot 7\cdot 37\,\mathfrak{T}^2 + 5^3\cdot 3^{38}\cdot 7\cdot 37\,\mathfrak{t}^2 - 2^{56}\cdot 5^2\cdot 73649\,\mathfrak{z}^2}{2^{30}\cdot 3^{28}\cdot 5^2\,7\,\mathfrak{q}^2 + 2^{66}\cdot 3^{12}\cdot 7\,\mathfrak{T}^2 + 5^4\cdot 3^{48}\cdot 7\,\mathfrak{t}^2 + 2^{82}\cdot 5^2\cdot 7\,\mathfrak{z}^2},$$

(48) oder für den Fall der entlegeneren Septime:

$$\varkappa = -\frac{2^{136}\cdot 7^2\cdot 37\,\mathfrak{T}^2 + 2^{88}\cdot 3^{36}\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 37\,\mathfrak{t}^2 + 3^{56}\cdot 5^2\cdot 13\cdot 17329886895011851\,\mathfrak{z}^2}{2^{118}\cdot 3^{16}\cdot 5^2\cdot 7^2\,\mathfrak{q}^2 + 2^{154}\cdot 7^2\,\mathfrak{T}^2 + 2^{88}\cdot 3^{36}\cdot 5^4\cdot 7^2\,\mathfrak{t}^2 + 3^{96}\cdot 5^2\cdot 13^2\,\mathfrak{z}^2}.$$

Wenden wir uns zuvörderst an die erste dieser beiden Formeln, welche *Ceses* als die Septime von *C* auffaßt, und setzen wir in derselben erst $\mathfrak{q}$, dann $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{t}$ und zuletzt $\mathfrak{z}$ unendlich, gewissermaßen nach dem Tonsysteme fragend, in welchem einmal die Quinte, dann die große Terz, sodann die kleine Terz und schließlich die Septime rein und untemperiert sind, so erhält man diesen vier Annahmen entsprechend

$$\begin{aligned}
&\text{für } \mathfrak{q} = \infty, && \varkappa = 0,\\
&\;\;\text{„} \quad \mathfrak{T} = \infty, && \varkappa = -\frac{37}{2^{18}} = -\frac{37}{262144} = -\frac{1}{7085},\\
&\;\;\text{„} \quad \mathfrak{t} = \infty, && \varkappa = -\frac{37}{5\cdot 3^{10}} = -\frac{37}{295245} = -\frac{1}{7980},\\
&\;\;\text{„} \quad \mathfrak{z} = \infty, && \varkappa = \frac{73649}{7\cdot 2^{26}} = \frac{73649}{469762048} = +\frac{1}{6378}.
\end{aligned}$$

Bei den Tonsystemen, welche das entlegenere *Eis*[5] als Septime erwählen, gestalten sich die Werte, welche die zweite Formel (48) gibt, in den obigen vier Fällen folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
&\text{für } \mathfrak{q} = \infty, && \varkappa = 0,\\
&\;\;\text{„} \quad \mathfrak{T} = \infty, && \varkappa = -\frac{37}{2^{18}} = -\frac{1}{7085},\\
&\;\;\text{„} \quad \mathfrak{t} = \infty, && \varkappa = -\frac{37}{9\cdot 3^{10}} = -\frac{1}{7980},\\
&\;\;\text{„} \quad \mathfrak{z} = \infty, && \varkappa = \frac{17329886895011851}{3^{40}\cdot 13} = -\frac{1}{9120}.
\end{aligned}$$

In beiden Fällen sind also die ersten drei Werte von $\varkappa$ gleich, nur für $\mathfrak{z} = \infty$ sind sie verschieden.

Multipliziert man Zähler und Nenner der ersten dieser vier verschiedenen Werte von $\varkappa$ mit $\mathfrak{q}^2$, des zweiten mit $\mathfrak{T}^2$, des dritten mit $\mathfrak{t}^2$ des vierten mit $\mathfrak{z}^2$, addiert sodann alle Zähler der auf diese Weise gewonnenen Brüche und auch alle Nenner, konstruiert hieraus einen Bruch, dessen Zähler die Summe aller Zähler und dessen Nenner die Summe aller Nenner ist, so erhält man bekanntlich einen Mittelwert zwischen den vier vorliegenden Werten von $\varkappa$, der größer ist als der kleinste und kleiner als der größte derselben. Dieser Mittelwert ist aber offenbar der allgemeine Wert der zweiten Formel (48) für $\varkappa$ selbst, mithin ist in allen Tonsystemen zweiter Klasse, welche *Eis*^{5} zur Septime erwählen, die Verfälschung der Quinte $\varkappa$ zwischen folgenden sehr eng aneinander liegenden Grenzen eingeschlossen:

$$-\frac{1}{7085} < \varkappa < 0.$$

Und läßt man die Verfälschung $\varkappa$ von Null aus allmählich nach der negativen Seite abnehmen, so begegnet man zuert dem Werte $\varkappa = -\frac{1}{9120}$, welcher das Tonsystem der reinen Septime gibt; dann kommt man zu dem Werte $\varkappa = -\frac{1}{7980}$, welchem das Tonsystem der reinen Kleinterzen entspricht, schließlich gelangt man zu $\varkappa = -\frac{1}{7085}$, zu dem das Tonsystem der Großterzen gehört, und mit welchem Werte von $\varkappa$ die Reihe derjenigen Werte geschlossen ist, die überhaupt aus der Formel (48) für die verschiedensten $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{s}$ gezogen werden können.

Ein Tonsystem mit sehr reiner Quinte, verfälscht nämlich nur mit $\frac{1}{25382}$ der Schwingungszahl haben wir bei Bildung der Gattungen geschlossener Tonsysteme zweiter Klasse in dem 53stufigen System kennen gelernt; es gehört zu den Systemen, welche *Ceses* als Septime haben. Diese scheinen mithin von allen Werten von $\varkappa$ von Null an bis $\varkappa = -\frac{1}{9120}$ Besitz zu nehmen, und von da geht erst der Bereich derjenigen Tonsysteme an, für welche *Eis*^{5} als Septime dient. Hieraus geht hervor, daß sich die Grenzen der Werte von $\varkappa$ für die in Rede stehenden Tonsysteme noch enger zusammenziehen lassen; man hat nämlich

$$-\frac{1}{7085} < \varkappa < -\frac{1}{9120}.$$

Um zu untersuchen, zwischen welchen Grenzen die Verfälschungen der übrigen Intervalle, nämlich θ, τ und σ enthalten sind, wenn $\varkappa$ zwischen den oben angegebenen Grenzen bleibt, setzt man für $\varkappa$ zuerst eine, dann die andere seiner beiden Grenzen in die Formeln für θ, τ und σ ein und berechnet die Werte dieser letzteren. Man gewinnt so

$$\text{für } \varkappa = -\frac{1}{7085}, \quad \theta = 0, \qquad \tau = -\frac{1}{7085}, \quad \sigma = -\frac{1}{811},$$

$$\text{„} \quad \varkappa = -\frac{1}{9120}, \quad \theta = -\frac{1}{3973}, \quad \tau = \frac{1}{7082}, \qquad \sigma = 0.$$

Während also zwischen diesen Grenzen die große Terz immer ein wenig zu tief bleibt um eine Größe, welche $\frac{1}{3973}$ nicht überschreitet, ist die kleine Terz anfangs ungefähr um die Hälfte dieses Betrages zu tief und wird dann um gleichviel zu hoch. Die Septime bleibt immer zu tief, aber auch nur um einen sehr geringen Bruchteil ihrer Schwingungszahl.

Der bloße Anblick der kleinen gebrochenen Werte, die aus den Formeln (48) gewonnen werden, lehrt, daß es unter den Tonsystemen zweiter Klasse und vorzugsweise unter denjenigen, die sich der entlegenen Septime Eis^5 bedienen, sehr reine, wohlklingende gibt, bei welchen die Verfälschung der konsonanten Intervalle nur beiläufig $\frac{1}{8000}$ der Schwingungszahl beträgt, also selbst mit den allerfeinsten Beobachtungsmitteln nicht mehr wahrnehmbar ist. Diese Reinheit kommt aber leider teuer zu stehen, indem ein sehr beträchtlicher Aufwand an Tonmitteln damit verknüpft ist und durch die jedermann zu Gebote stehenden Stimmmittel nicht zu erreichen ist und, wenn zufällig erreicht, auf keine Weise vom menschlichen Ohr beurteilt werden kann.

Suchen wir nun einige dieser Tonsysteme mehr im besonderen kennen zu lernen. Das mit vollkommen reinen Quinten ist bereits oben angeführt worden, wobei wir gesehen haben, daß es ein sehr brauchbares Tonsystem sei, welches nur um $\frac{1}{886}$ temperierte Terzen enthält.

Das 53stufige System haben wir als ein solches kennen gelernt, welches die Quinte nur um den sehr kleinen Bruchteil $\frac{1}{25382}$ zu tief nimmt. Man hat also in diesem 53stufigen System $q = \frac{25381}{25382}$.

Rechnet man hiezu die Temperaturen der übrigen konsonanten Intervalle nach den Formeln (45), so erhält man

$$T = \frac{1229}{1230} = 1 - \frac{1}{1230}, \quad t = \frac{1293}{1292} = 1 + \frac{1}{1292}, \quad s = \frac{364}{363} = 1 + \frac{1}{363}.$$

Der Anblick dieser Zahlen lehrt, daß man hier ein Tonsystem hat, welches bescheidene Ansprüche vollkommen befriedigen kann. Es verbindet mit beinahe ganz reinen Quinten eine große und kleine Terz, die 10- bis 12mal reiner sind als die Terzen des chromatischen Systems. Die Septime ist wohl um etwas, einem feinen Gehöre bereits Merkliches zu hoch, sie verträgt dies aber viel besser als eine gleich große Verfälschung in entgegengesetzter Richtung, was in der Natur dieses konsonanten Intervalles zu liegen scheint, sowie auch ein geringes

Schweben dieses Intervalles dem psychischen Charakter desselben sehr gut entspricht und dem Wohlklang keinen Eintrag tut. Petzval hielt es daher der Mühe wert, dieses unstreitig sehr brauchbare System zweiter Klasse einer ausführlichen Berechnung zu unterwerfen. Da es ein geschlossenes 53stufiges Tonsystem ist, so sind seine nach der Größe der Schwingungszahlen geordneten Töne im musikalischen Sinne äquidistant, d. h. diese Schwingungszahlen bilden eine geometrische Progression, deren erstes Glied $\mathfrak{c}$ und deren Exponent $\sqrt[53]{2}$ ist. Die von Petzval berechnete Tabelle ist die nachstehende. In der zweiten Spalte befinden sich die musikalischen Namen der Tonstufen, in der dritten ihre arithmetischen Benennungen, in der vierten die Logarithmen der Schwingungszahlen, in der fünften die Schwingungszahlen selbst in Form von Dezimalbrüchen, in der sechsten ihre einfachsten angenäherten Werte in Form eines gewöhnlichen Bruches, in der siebenten die Logarithmen der reziproken Werte der Schwingungszahlen, oder was dasselbe ist, die Logarithmen der Saitenlängen, die Saitenlänge für C gleich Eins genommen, endlich in der achten die Saitenlängen selbst. (Siehe S. 392 f.)

In diesem 53stufigen Tonsysteme besitzt der große ganze Ton 9 Stufen, der kleine ganze Ton 8 Stufen, der große Halbton hat 5 Stufen, der kleine Halbton hat deren 3, der große und kleine Halbton geben zusammen $5 + 3 = 8$, also einen kleinen Ganzton, wie es sein muß. Die Schwingungszahlen dieser verschiedenen Fundamental-Intervalle sind von den in der reinen Tonleiter vorhandenen nur außerordentlich wenig verschieden. So hat der aus 3 Stufen bestehende Halbton das Schwingungsverhältnis mit $1.040014 = \frac{26}{25}$, während in der reinen Tonleiter dieser Halbton $\frac{25}{24} = 1.041667$ ist; der große Halbton, der aus fünf Stufen zusammengesetzt ist, hat die Schwingungszahl 1.067577, eine Zahl, die sich von dem Schwingungsverhältnisse in der reinen Tonleiter, nämlich $\frac{15}{16} = 1.066667$ noch weniger unterscheidet. Mit noch größerer Genauigkeit sind die beiden Ganztöne in diesem System wiedergegeben, nämlich der kleine $= 1.110295$, was beinahe genau $\frac{10}{9}$, und der große $= 1.124911$, was beinahe genau $\frac{9}{8}$ ist. Die beiden Terzen sind von genügender, Quinte und Quarte aber von ausgezeichneter Reinheit. An brauchbaren Intervallen verschiedener Art, die durch einfache Brüche ausgedrückt sind, ist ein namhafter Überfluß vorhanden. Daran, daß die Septime etwas stärker temperiert ist, wird wohl kein Musiker Anstand nehmen, weil ja ein jeder dieses Intervall mißachtet und nicht einmal für eine Konsonanz gelten läßt.

53 stufiges Tonsystem II. Klasse.

r			$\log \sqrt[53]{2^r} =$	$\sqrt[53]{2^r} =$		Saitenlänge	
0	*C*	Q_0	0·0000000	1·000000	1	1 00000	
1	*His*	Q_{12}	0·0056798	1·013164	$\frac{77}{76}$	0·98701	
2	*Ais*^{3}	Q_{24}	0·0113596	1·026501	$\frac{39}{38}$	0·97418	
3	*Es*^{3}	Q_{-17}	0·0170394	1·040014	$\frac{26}{25}$	0·96153	
4	*Des*	Q_{-5}	0·0227192	1.053705	$\frac{39}{37}$	0·94903	
5	*Cis*	Q_7	0·0283991	1·067577		0·93670	
6	*His*^{2}	Q_{14}	0·034078	1·081630		0·92453	
7	*Fes*^{3}	Q_{-22}	0·0397587	1·095869		0 91252	
8	*Es*^{2}	Q_{-10}	0·0454385	1·110295		0·90066	
9	*D*	Q_2	0·0511183	1·124911	$\frac{9}{8}$	0·88896	
10	*Cis*^{2}	Q_{14}	0·0567981	1·139720		0·87741	
11	*His*^{3}	Q_{26}	0·0624779	1·154723		0·86601	*Ges*$^4 = Q_{-27}$
12	*Fes*^{2}	Q_{-15}	0·0681577	1·169924		0·85476	
13	*Es*	Q_{-3}	0·0738375	1·185325	$\frac{31}{26}$	0·84365	
14	*Dis*	Q_9	0·0795174	1·200929	$\frac{6}{5}$	0·83269	
15	*Cis*^{3}	Q_{21}	0·0851972	1·216739		0·82187	
16	*Ges*^{3}	Q_{-20}	0·0908770	1·232756		0·81119	
17	*Fes*	Q_{-8}	0·0965568	1·248984		0·80065	
18	*E*	Q_4	0·1022366	1·265426		0·79025	
19	*Dis*^{2}	Q_{16}	0·1079164	1·282084		0·77998	
20	*As*^{4}	Q_{-25}	0·1135962	1·298961		0 76985	*Cis*$^4 = Q_{28}$
21	*Ges*^{2}	Q_{-13}	0·1192760	1·316061		0·75984	
22	*F*	Q_{-1}	0·1249558	1·333385		0 74997	
23	*Eis*	Q_{11}	0·1306356	1·350939		0·74023	
24	*Dis*^{3}	Q_{23}	0·1363154	1·368723		0·73061	
25	*As*^{3}	Q_{-18}	0·1419953	1·386741		0·72112	

r			$\log \sqrt[53]{2^r} =$	$\sqrt[53]{2^r} =$		Saitenlänge	
26	*Ges*	Q_{-6}	0·1476751	1·404996		0·71175	
27	*Fis*	Q_{6}	0·1533549	1·423491		0·70250	
28	*Eis*^{2}	Q_{18}	0·1590347	1·442230		0·69337	
29	*Bes*^{3}	Q_{-23}	0·1647145	1·461216		0·68436	
30	*As*^{2}	Q_{-11}	0·1703943	1·480452		0·67547	
31	*G*	Q_{1}	0·1760741	1·499941		0·66669	
32	*Fis*^{2}	Q_{13}	0·1817540	1·519686		0·65803	
33	*Eis*^{3}	Q_{25}	0·1874338	1·539692		0·64948	*Ces*$^4 = Q_{-28}$
34	*Bes*^{2}	Q_{-16}	0·1931136	1·559960		0·64104	
35	*As*	Q_{-4}	0·1987934	1·580496		0·63271	
36	*Gis*	Q_{8}	0·2044732	1·601302	$\frac{8}{5}$	0·62449	
37	*Fis*^{3}	Q_{20}	0·2101530	1·622382	$\frac{13}{8}$	0·61638	
38	*Ces*^{3}	Q_{-21}	0·2158328	1·643739		0·60837	
39	*Bes*	Q_{-9}	0·2215126	1·665377		0·60046	
40	*A*	Q_{3}	0·2271925	1·687301		0·59266	
41	*Gis*^{2}	Q_{15}	0·2328723	1·709512		0·58496	
42	*Fis*^{4}	Q_{27}	0·2385521	1·732017		0·57736	*Des*$^4 = Q_{-26}$
43	*Ces*^{2}	Q_{-14}	0·2442319	1·754817		0·56986	
44	*B*	Q_{-2}	0·2499116	1·777917		0·56246	
45	*Ais*	Q_{10}	0·2555914	1·801323		0·55515	
46	*Gis*^{3}	Q_{22}	0·2612713	1·825036		0·54793	
47	*Des*^{3}	Q_{-19}	0·2669511	1·849060		0·54082	
48	*Ces*	Q_{-7}	0·2726309	1·873402		0·53379	
49	*H*	Q_{5}	0·2783108	1·898064		0·52685	
50	*Ais*^{2}	Q_{17}	0·2839906	1·923050		0·52001	
51	*Gis*^{4}	Q_{29}	0·2896704	1·948365		0·51325	*Es*$^4 = Q_{-24}$
52	*Des*^{2}	Q_{-12}	0·2953502	1·974014		0·50658	
53	*C*	Q_{0}	0·3010300	2·000000		0·50000	

Es ist noch die Frage zu beantworten, auf welche Weise die Namen der 53 Tonstufen bestimmt worden sind. Es reicht hierzu die Kenntnis der folgenden zwei Umstände aus. Erstens hat der ganze Ton neun Stufen; hieraus folgt, daß die von *C* aus gezählte neunte Stufe den Namen *D* tragen wird, von da aus heißt die neunte, also von *C* aus die neunzehnte Stufe *E*, von da aus weitere je neun Stufen gezählt, gibt N^0 27 *Fis*, ebenso N^0 36 *Gis*, N^0 45 *Ais*; die 54^{te} ist aber gleichbedeutend mit der ersten Stufe und heißt *His*. Der zweite Umstand ist, daß die Silbe *is*, zu irgend einem Tone hinzugesetzt, eine Erhöhung um genau einem großen Halbton, also um 5 Stufen bedeutet; man zähle also von *C* aus 5, 10, 15, 20, 25, usw. Stufen, und man erhält der Reihe nach die Töne: *Cis*, *Cisis*, Cis^3, Cis^4 usf. Auf dieselbe Weise erhält man von *D* je 5 Stufen zählend *Dis*, *Disis*, Dis^3, Dis^4, usf. Endlich bedeutet die angefügte Endsilbe *es* eine Erniedrigung um 5 Stufen; daher man nach rückwärts fünf Stufen zählend jedesmal die Endsilbe *es* mit anfügen kann. Zudem weiß man, daß die große Terz aus einem großen und einem kleinen Ganzton zusammengesetzt ist, also $9 + 8 = 17$ Stufen hat; die kleine Terz besteht aus einem großen ganzen und aus einem kleinen Halbton, hat also $9 + 5 = 14$ Stufen; die Quinte ist zusammengesetzt aus einer großen und einer kleinen Terz, befindet sich daher auf der $17 + 14 = 31^{\text{ten}}$ Stufe, dorthin setze man also *G* usw.

Hat man sich diesen ganzen Reichtum von 53 Tönen an irgend einem Instrumente, wie Orgel oder Harmonium verschafft, so hat man 53 Dur- und Molltonarten, bei welchen man im Quintenzirkel herumwandern kann, und es ist nicht notwendig, sich die Töne in einer Tabelle zurechtzulegen, um in derselben ersichtlich zu machen, über welche Intervalle man in einer jeden Tonart verfügt, weil man in allen Tonarten alle Intervalle hat. Kann man aus irgend einer Ursache von allen 53 Tönen nicht Gebrauch machen, muß man sich vielmehr auf eine geringere Anzahl beschränken, so ist es unerläßlich, sich diesen Vorrat zum musikalischen Gebrauche gewählter Töne, die eine zusammenhängende Quintenreihe zu bilden haben, tabellarisch zurechtzulegen.

Zur Beurteilung jedoch, welche geringste Anzahl von Tönen hinreiche, um gute Musik machen und namentlich die Meisterwerke neuerer Tonsetzer vortragen zu können, bieten die bisher gewonnenen Einsichten nicht genügenden Anhalt, und ist es notwendig sich einige, wenn auch nur oberflächliche Kenntnisse der Harmonielehre zu verschaffen. Nur ist die gewöhnliche Harmonielehre, wie sie in verschiedenen Werken über diesen Gegenstand angetroffen wird, bloß für das 12stufige Tonsystem gültig; für denjenigen, der sich einen weit größeren Tonreichtum gestatten kann, und darunter sogar neue Konsonanzen wie die reine Septime, ist sie zu enge gehalten und muß notwendig eine Erweiterung erfahren. Petzval hat sich denn auch zu diesem Ende mit den *mathematischen Grundsätzen, welche zur Bildung einer neuen Harmonielehre* nötig sind, befaßt. Von diesen Arbeiten ist indessen der größte Teil verloren gegangen, und bilden die gefundenen handschriftlichen Aufzeichnungen nur einzelne Bruchstücke davon.

Im Zusammenhange mit dieser Harmonielehre steht auch die von ihm ersonnene *rationelle Tastatur*, von welcher, weil sie sich gleichfalls auf die vorgetragene Theorie bezieht, und weil Petzval diesen Gegenstand in seinen Vorträgen mit besonderer Vorliebe zu behandeln pflegte, einiges im nächsten Abschnitte Platz finden mag.

VI. Die rationelle Tastatur.

Es ist eine allgemein anerkannte Tatsache, daß, wenn man aus einer beträchtlichen Anzahl von Elementen beliebiger Art die mannigfaltigsten Kombinationen zu machen und Gruppen zu zweien, dreien, vieren usf. auf die verschiedenste Weise zu bilden hat, man Sorge tragen muß, sich diese Elemente auf die vorteilhafteste Weise, zum bequemen Gebrauche geordnet, zurechtzulegen. Dies ist vorzugsweise mit den zum musikalischen Gebrauche bestimmten Tönen der Fall. Die rationellste Anordnung derselben kann dann auch als das Urbild einer rationellen Tastatur betrachtet werden.

Petzval bezeichnet diejenige als die rationelle Tastatur, welche die geringste Anzahl möglichst bequemer Fingersätze in den verschiedenen Tonarten, in denen Musikstücke auf derselben vorgetragen werden, zuläßt. Sie hat zu der Tastatur des gebräuchlichen Klaviers sozusagen den direkten Gegensatz zu bilden. Denn während bei diesem Instrumente zu dem Vorrate von zwölf Tönen, der eine wahre Tonarmut genannt werden muß, nicht weniger als 12 verschiedene, meist sehr unbequeme Fingersätze benötigt werden, braucht man bei allen Tonsystemen der ersten Klasse nur *einen einzigen* sehr bequemen Fingersatz, wenn man die rationelle Tastatur annimmt. Sie ist so beschaffen, daß, wenn man ein Musikstück in irgend einer Tonart einstudiert hat, man es auch in allen übrigen Tonarten, wie viele deren im Tonsysteme auch sein mögen, ohne Schwierigkeit und genau mit denselben Bewegungen der Hand abspielen kann.

Diese rationelle Tastatur oder vielmehr das geometrische Urbild, sozusagen der Grundriß derselben, wird auf eine höchst einfache Weise gebildet. Man schreibt nämlich die bekannte Quintenreihe in horizontaler Richtung auf, vom Grundtone *C* nach rechts und links ins Unbegrenzte fortgesetzt:

... *Ges*, *Des*, *As*, *Es*, *B*, *F*, *C*, *G*, *D*, *A*, *E*, *H*, *Fis*, *Cis*, *Gis*

und zeichnet in derselben vom Grundtone angefangenen jeden zweiten Ton nach Belieben aus, z. B. durch Unterstreichen. Aus den auf diese Weise bezeichneten Tönen bildet man eine besondere erste Reihe:

(I) ... *Fes*, *Ges*, *As*, *B*, *C*, *D*, *E*, *Fis*, *Gis*, *Ais*, *His*, ...

aus den übrigen eine besondere zweite Reihe:

(II) ... *Ces*, *Des*, *Es*, *F*, *G*, *A*, *H*, *Cis*, *Dis*, *Eis*, ...

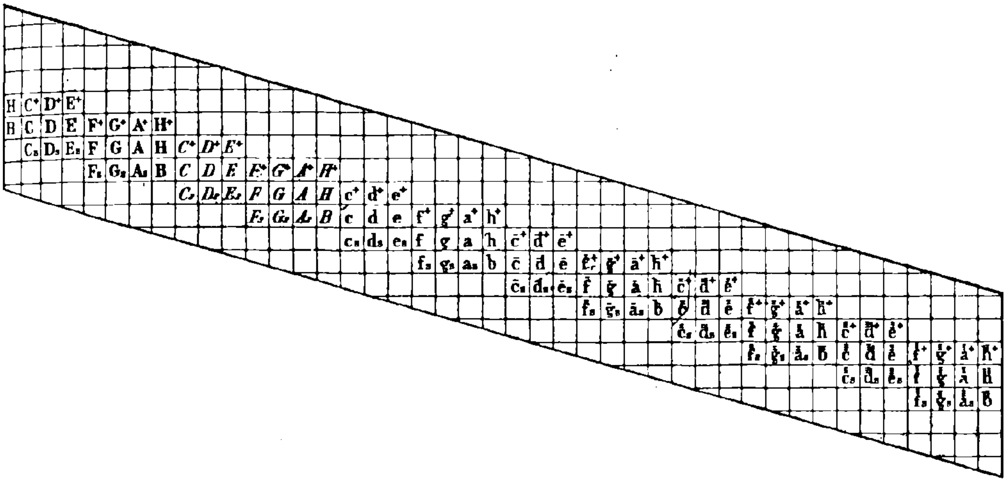
Diese zwei Reihen schreibt man nun abwechselnd untereinander, so jedoch, daß, wenn in einer hinzuzuschreibenden Reihe *C* vorkommt, dies unter *Cis* der nächst vorhergehenden Reihe zu stellen ist. Kommt aber in der nächst aufzuschreibenden Reihe *Ces* vor, so hat es unter *C* seinen Platz einzunehmen.

Man erhält auf diese Weise eine Art Abbildung der rationellen Tastatur, welche allen Tonsystemen der ersten Klasse gemeinsam ist und in allen Tonarten nur einen einzigen Fingersatz hat. Hiervon überzeugt man sich leicht auf folgende Weise: In der Reihe reiner Quinten ist das musikalische Intervall zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Tönen ausgedrückt durch die Zahl $\frac{3}{2}$, und geht man nicht zu dem nächst folgenden, sondern zu dem zweiten über, so besteht zwischen diesem und dem zweitfolgenden ein Intervall von $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$, oder wenn man sich die Töne der Quintenreihe auf die erste Oktave zurückgeführt denkt, das Intervall $\frac{9}{8}$ gleich einem großen Ganzton. Hieraus folgt, daß in jeder der beiden Reihen I und II die Töne äquidistant und je um einen ganzen Ton voneinander verschieden sind.

Zeichnet man nun in der angeführten Weise die rationelle Tastatur auf, nämlich:

Cis,	*Dis*,	*Eis*,														
C,	*D*,	*E*,	*Fis*,	*Gis*,	*Ais*,	*His*,										
Ces,	*Des*,	*Es*,	*F*,	*G*,	*A*,	*H*,	*Cis*,	*Dis*,	*Eis*,							
			Fes,	*Ges*,	*As*,	*B*,	*C*,	*D*,	*E*,	*Fis*,	*Gis*,	*Ais*,	*His*,			
							Ces,	*Des*,	*Es*,	*F*,	*G*,	*A*,	*H*,	*Cis*,	*Dis*,	...
										Fes,	*Ges*,	*As*,	*B*,	*C*,	*D*,	...
														Ces,	*Des*,	...,

so sind auch in der vertikalen Richtung die Töne der übereinander geschriebenen Reihen äquidistant und je um einen kleinen Halbton voneinander verschieden. Hieraus folgt nun unmittelbar, daß je zwei Tonpaare, welche in demselben horizontalen und in demselben vertikalen Abstande sich befinden, auch in demselben musikalischen Abstande



stehen werden. Die beigedruckte schematische Anordnung stellt die *rationelle Tastatur der Tonsysteme I. Klasse* dar. Stellt z. B. das erste Tonpaar eine große Terz vor, so wird das zweite auch eine große Terz sein; da dies aber von zwei beliebigen Tonpaaren gesagt werden kann, so gilt es allgemein für eine jede geometrische Gestalt. Alle Tongruppen nämlich, welche in der Tastatur durch gerade Linien zusammengezogen, kongruente geometrische Figuren bilden, besitzen auch, die Tonhöhe abgerechnet, gleichzeitig oder hintereinander angeschlagen einerlei Klang.

Da auf dieser Tastatur ein jedes Tonstück in allen Tonarten einerlei geometrische Gestalt hat, und da die Tonleiter ebenfalls ein kleines Musikstück ist, ja dasselbe auch von jedem Akkorde gesagt werden kann, so haben Tonleiter und Akkorde hier allenthalben einerlei Form, und es kann jedes dieser Tongebilde durch eine *Patrone* dargestellt werden.

Alle Dur-Tonleitern besitzen dann eine Patrone gemeinschaftlich, und wo immer man dieselbe auf die rationelle Tastatur legen mag, stets wird man durch die Fenster der Patrone eine richtige Durtonleiter heraussehend erblicken. In gleicher Weise gehören zu den Moll-Tonleitern die bekanntlich anders im Aufsteigen und anders im Absteigen gebildet werden, zwei Patronen und zu einem jeden der in der Musik gebräuchlichen, sei es konsonanten oder dissonanten Akkorde, je eine Patrone.

Die Anzahl der in der Musik gebrauchten Akkorde ist nun allerdings außerordentlich groß, und man würde ziemlich viele Patronen gebrauchen, wenn man einen jeden Akkord durch eine solche darstellen wollte. Sie haben aber nicht alle dieselbe Wichtigkeit, insbesondere war dies nicht der Fall für Petzvals Vorträge, in welchen er nicht eine vollständige Harmonielehre geben wollte, sondern nur zu zeigen bestrebt war, daß irgend ein von ihm berechnetes Tonsystem die praktischen Bedürfnisse der Musik befriedige.

Er hat daher aus den Akkorden die allerwichtigsten drei- und vierstimmigen, die im allgemeinen musikalischen Gebrauche stehen, auserlesen, und für jede eine Patrone gebildet, und alle diese Patronen in einem einzigen Blatte vereinigt und mit der üblichen musikalischen Nomenklatur und kontrapunktischen Bezeichnung versehen, wie dies aus der beigedruckten Abbildung zu ersehen ist.[1])

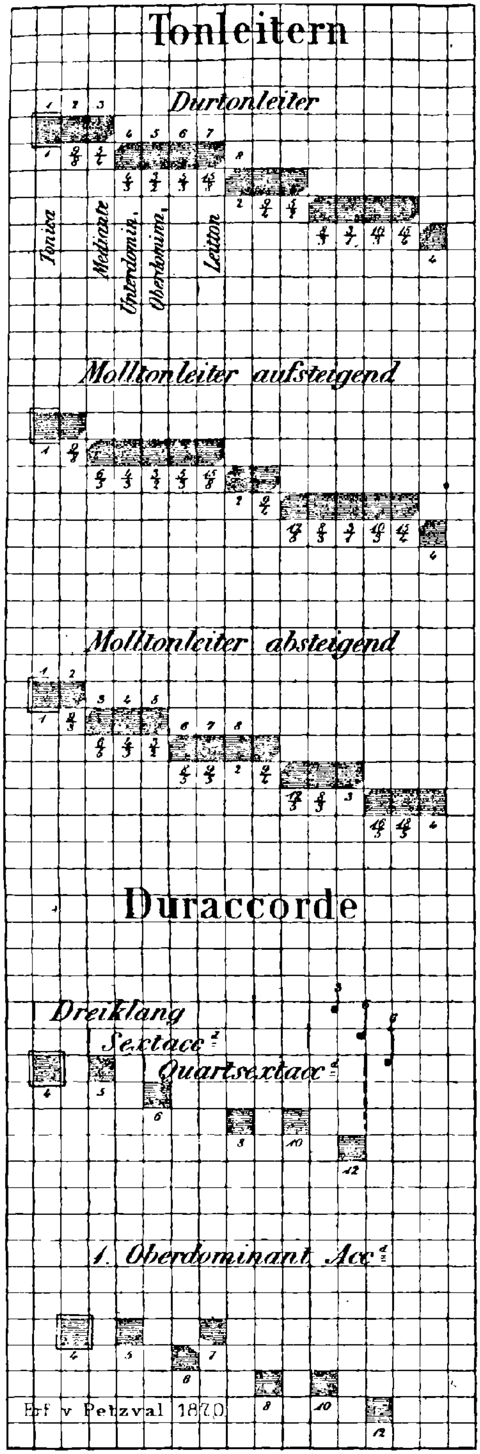
Diese Patronensammlung erspart hier viel Worte, weil der wissenschaftlich gebildete Leser mit Hilfe derselben und der rationellen Tastatur sogleich erkennt, was in jeder Tonart Moll- und Dur-Dreiklang, Sextakkord, Quartsextakkord, verminderter Quintakkord usw. bedeute. Zudem dienen diese Blätter auch dazu, gewisse Probleme der Harmonielehre mit großer Leichtigkeit durch die unmittelbare Anschauung zu lösen, ein Tonstück aus einer Tonart in eine beliebige andere zu übertragen, zu jedem gegebenen Gesange oder einer Melodie die vierstimmige Akkordbegleitung zu finden usf.

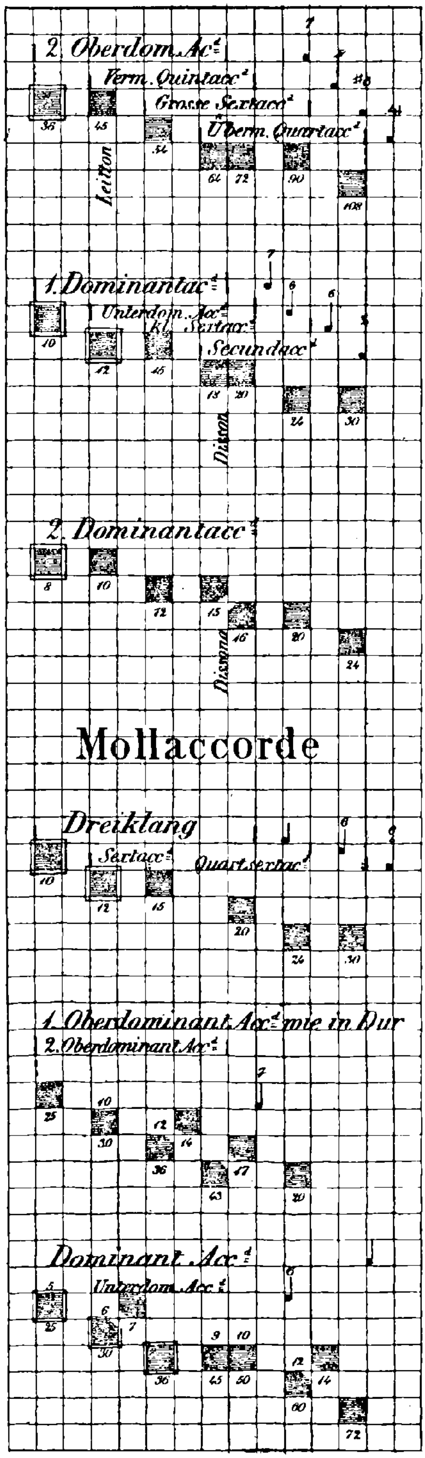
Mittels der rationellen Tastatur und der dazu gehörigen Patronensammlung gewinnt man aber nur eine allgemeine Kenntnis der Eigenschaften der Tonsysteme der ersten Klasse. Der intelligente Musiker und besonders derjenige, der von einem neuen Tonsysteme Gebrauch zu machen wünscht, kann sich mit einer solchen nicht begnügen, denn es liegt ihm ja ob, sich sein nach diesem Tonsystem ausgeführtes Instrument selber zu stimmen oder mindestens die Anleitung dazu zu geben.

Er muß sich daher mit den besonderen Eigenschaften des Tonsystems, das er zum praktischen Gebrauche gewählt und aus gewichtigen Gründen allen anderen vorgezogen hat, innigst befreunden, den musikalischen Abstand je zweier derselben in einer jeden Tonart muß er in Zahlen anzugeben wissen, und muß auch die zu demselben gehörige Saitenlänge kennen, und allenfalls auch imstande sein Fragen zu beantworten, wie die folgenden: Gibt es in irgend einer Tonart einen Akkord 6, 7, 9, 11 und in welcher? Dazu ist aber unerläßlich, daß

1) In der Abbildung hat man sich die schraffierten Felder ausgeschnitten zu denken; die so entstandenen Löcher nennt Petzval die „Fenster.“

Patronen für Tonsysteme I. Klasse.





man sich wenigstens diejenigen Töne des erwählten Tonsystems, die man praktisch zu verwenden wünscht, die im Bilde der rationellen Tastatur ersichtlichen, 21 an der Zahl, mit ihren Schwingungsverhältnissen tabellarisch so geordnet vorführe, daß man mit einem einzigen Blicke den in jeder Tonart zur Verfügung stehenden Tonreichtum zu untersuchen imstande ist. Petzval hat zu diesem Ende eine zweckmäßige Anordnung in 3 Tabellen getroffen, von welchen die erste das geschlossene 31stufige Tonsystem darstellt, nämlich das Tonsystem der *gleichberechtigten Intervalle.* (S. 401.) Die zweite Tabelle enthielt das ebenfalls geschlossene 43stufige Tonsystem, die dritte aber ein unendliches Tonsystem, welches seinen Eigenschaften nach zwischen dem 31stufigen und dem 43stufigen enthalten ist; diese letzten beiden Tabellen sind verloren gegangen. Sie haben alle drei vorausgesetzt, daß man sich zum musikalischen Gebrauche von dem vorhandenen Tonreichtume von beziehentlich 31, 43 und unendlich vielen Tönen nur 21, wie sie in der Tastatur vorkommen, ausgewählt habe.

Die vorhandene Tabelle enthält also in einer horizontalen Reihe unten die Tonstufen des Systems, hier 31, und darunter die Schwingungsverhältnisse in zwei verschiedenen Gestalten: als Dezimalbruch und als ein demselben möglichst nahe kommender gewöhnlicher Bruch; darüber sind die Tonarten in der ersten Vertikallinie bezeichnet mit großen deutschen Frakturbuchstaben, an welche sich in horizontaler Reihe alle diejenigen Töne anschließen, die in dieser Tonart verwendet werden können in der ihnen zugewiesenen Ordnung und dem, dem Intervalle entsprechenden Abstande, welcher numerisch durch die unter einem jeden derselben vorhandene Zahl ausgedrückt ist.

Diese Töne sind durch kleine lateinische Buchstaben bezeichnet, so zwar, daß z. B. c^+ so viel wie *cis*, g^+ so viel wie *gis*, usf., c_s so viel wie *ces* usw. bedeudet. Die Hauptkonsonanzen, kleine Terz, große Terz, Quinte, Septime und Oktave sind mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet, um leichter kenntlich zu sein. Damit diese Tabelle auch zur Einteilung des Griffbrettes bei solchen musikalischen Instrumenten, die derlei besitzen, dienen kann, ist eine eigene Spalte mit der Überschrift Saitenlänge eröffnet. Durch die Ziffern I, II . . . VIII ist zugleich an der unteren Seite die Dur-, an der oberen die Moll-Tonleiter bezeichnet, so daß man auch aus dieser Tabelle, wie aus der rationellen Tastatur und der angefügten Patronensammlung, alle Tonleitern und die konsonannten Akkorde unmittelbar ablesen kann.

Links von der Tabelle stehen die charakteristischen Hauptmerkmale des Tonsystems, welches durch dieselbe dargestellt ist, d. h. die Temperaturen der konsonanten Intervalle in gewöhnlicher Bruchform, 31 stufiges Tonsystem I. Klasse.

$q = \frac{334}{335}$ $T = \frac{2213}{2212}$ $t = \frac{290}{291}$ $s = \frac{1593}{1594}$

Tonarten

Molltonleiter	I					II			III					IV					V			VI					VII					VIII
Saitenlängen	1·00000	0·97789	0·95626	0·93512	0·91444	0·89422	0·87446	0·85512	0·83621	0·81772	0·79964	0·78196	0·76467	0·74776	0·73122	0·71505	0·69925	0·68378	0·66867	0·65388	0·63942	0·62528	0·61146	0·59794	0·58472	0·57179	0·55914	0·54678	0·53469	0·52287	0·51131	0·50000
	$\mathfrak{F}_s$		f		f^+	g_s		g		g^+	$\mathbf{A}_s$		a		a^+	b		h	$\mathbf{C}_s$	h^+	c		c^+	d_s		$\mathbf{D}$			e_s		e	$\mathbf{F}_s$
	$\mathfrak{C}_s$		c		c^+	d_s		d		d^+	$\mathbf{E}_s$		e	f_s	e^+	f		f^+	$\mathbf{G}_s$		g		g^+	a_s		$\mathbf{A}$			b		h	$\mathbf{C}_s$
	$\mathfrak{G}_s$		g		g^+	a_s		a		a^+	$\mathbf{B}$		h	c_s	h^+	c		c^+	$\mathbf{D}_s$		d		d^+	e_s		$\mathbf{E}$	f_s		f		f^+	$\mathbf{G}_s$
	$\mathfrak{D}_s$		d		d^+	e_s		e	$\mathbf{F}_s$	e^+	$\mathbf{F}$		f^+	g_s		g		g^+	$\mathbf{A}_s$		a		a^+	b		$\mathbf{H}$	c_s		c		c^+	$\mathbf{D}_s$
	$\mathfrak{A}_s$		a		a^+	b		h	$\mathbf{C}_s$	h^+	$\mathbf{C}$		c^+	d_s		d		d^+	$\mathbf{E}_s$		e	f_s	e^+	f		$\mathbf{F}^+$	g_s		g		g^+	$\mathbf{A}_s$
	$\mathfrak{E}_s$		e	f_s	e^+	f		f^+	$\mathbf{G}_s$		$\mathbf{G}$		g^+	a_s		a		a^+	$\mathbf{B}$		h	c_s	h^+	c		$\mathbf{C}^+$	d_s		d		d^+	$\mathbf{E}_s$
	$\mathfrak{B}$		h	c_s	h^+	c		c^+	$\mathbf{D}_s$		$\mathbf{D}$		d^+	e_s		e	f_s	e^+	$\mathbf{F}$		f^+	g_s		g		$\mathbf{G}^+$	a_s		a		a^+	$\mathbf{B}$
	$\mathfrak{F}$		f^+	g_s		g		g^+	$\mathbf{A}_s$		$\mathbf{A}$		a^+	b		h	c_s	h^+	$\mathbf{C}$		c^+	d_s		d		$\mathbf{D}^+$	e_s		e	f_s	e^+	$\mathbf{F}$
	$\mathfrak{C}$		c^+	d_s		d		d^+	$\mathbf{E}_s$		$\mathbf{E}$	f_s	e^+	f		f^+	g_s		$\mathbf{G}$		g^+	a_s		a		$\mathbf{A}^+$	b		h	c_s	h^+	$\mathbf{C}$
	$\mathfrak{G}$		g^+	a_s		a		a^+	$\mathbf{B}$		$\mathbf{H}$	c_s	h^+	c		c^+	d_s		$\mathbf{D}$		d^+	e_s		e	f_s	$\mathbf{E}^+$	f		f^+	g_s		$\mathbf{G}$
	$\mathfrak{D}$		d^+	e_s		e	f_s	e^+	$\mathbf{F}$		$\mathbf{F}^+$	g_s		g		g^+	a_s		$\mathbf{A}$		a^+	b		h	c_s	$\mathbf{H}^+$	c		c^+	d_s		$\mathbf{D}$
	$\mathfrak{A}$		a^+	b		h	c_s	h^+	$\mathbf{C}$		$\mathbf{C}^+$	d_s		d		d^+	e_s		$\mathbf{E}$	f_s	e^+	f		f^+	g_s		g		g^+	a_s		$\mathbf{A}$
	$\mathfrak{E}$	f_s	e^+	f		f^+	g_s		$\mathbf{G}$		$\mathbf{G}^+$	a_s		a		a^+	b		$\mathbf{H}$	c_s	h^+	c		c^+	d_s		d		d^+	e_s		$\mathbf{E}$
	$\mathfrak{H}$	c_s	h^+	c		c^+	d_s		$\mathbf{D}$		$\mathbf{D}^+$	e_s		e	f_s	e^+	f		$\mathbf{F}^+$	g_s		g		g^+	a_s		a		a^+	b		$\mathbf{H}$
	$\mathfrak{F}^+$	g_s		g		g^+	a_s		$\mathbf{A}$		$\mathbf{A}^+$	b		h	c_s	h^+	c		$\mathbf{C}^+$	d_s		d		d^+	e_s		e	f_s	e^+	f		$\mathbf{F}^+$
	$\mathfrak{C}^+$	d_s		d		d^+	e_s		$\mathbf{E}$	f_s	$\mathbf{E}^+$	f		f^+	g_s		g		$\mathbf{G}^+$	a_s		a		a^+	b		h	c_s	h^+	c		$\mathbf{C}^+$
	$\mathfrak{G}^+$	a_s		a		a^+	b		$\mathbf{H}$	c_s	$\mathbf{H}^+$	c		c^+	d_s		d		$\mathbf{D}^+$	e_s		e	f_s	e^+	f		f^+	g_s		g		$\mathbf{G}^+$
	$\mathfrak{D}^+$	e_s		e	f_s	e^+	f		$\mathbf{F}^+$	g_s		g		g^+	a_s		a		$\mathbf{A}^+$	b		h	c_s	h^+	c		c^+	d_s		d		$\mathbf{D}^+$
	$\mathfrak{A}^+$	b		h	c_s	h^+	c		$\mathbf{C}^+$	d_s		d		d^+	e_s		e	f_s	$\mathbf{E}^+$	f		f^+	g_s		g		g^+	a_s		a		$\mathbf{A}^+$
	$\mathfrak{E}^+$	f		f^+	g_s		g		$\mathbf{G}^+$	a_s		a		a^+	b		h	c_s	$\mathbf{H}^+$	c		c^+	d_s		d		d^+	e_s		e		$\mathbf{E}^+$
	$\mathfrak{H}^+$	c		c^+	d_s		d		$\mathbf{D}^+$	e_s		e		e^+	f		f^+	g_s		g		g^+	a_s		a		a^+	b		h		$\mathbf{H}^+$
Stufen	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Schwingungs-verhältnisse	1·00000	1·02261	1·04574	1·06938	1·09356	1·11829	1·14357	1·16943	1·19587	1·22291	1·25057	1·27884	1·30776	1·33733	1·36757	1·39849	1·43010	1·46245	1·49551	1·52933	1·56391	1·59928	1·63544	1·67242	1·71023	1·74890	1·78845	1·82889	1·87024	1·91253	1·95578	2·00000
nahe	1	$\frac{45}{44}$	$\frac{23}{22}$	$\frac{77}{72}$	$\frac{31}{29}$	$\frac{19}{17}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{11}{9}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{23}{18}$	$\frac{17}{13}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{26}{19}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{19}{13}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{26}{17}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{18}{11}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{53}{31}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{59}{33}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{21}{11}$	$\frac{88}{45}$	2
Durtonleiter	I Tonica					II					III Mediante			IV Unterdominante					V Oberdominante					VI					VII Leitton			VIII

namentlich die Temperatur q der Quinte, die T der großen Terz, t der kleinen Terz und s der Septime. Die ganz gleiche Anordnung hatten auch die beiden anderen Tabellen.

Sowie dies aus den beiden verloren gegangen hervorging, so zeigt auch die vorhandene, daß nicht alle Tonarten sämtliche konsonanten Intervalle besitzen, namentlich fehlt zu den Grundtönen *Fes*, *Ces*, *Ges* die kleine Terz; man wird daher aus *Fes*-, *Ces*- und *Ges*-Moll nicht spielen können, und es sind mithin diese Tonarten reine Dur-Tonarten. Ebenso fehlt zu den Grundtönen *Dis*, *Ais*, *Eis* und *His* die große Terz; es sind also die Tonarten *Dis*, *Ais*, *Eis* und *His* spezifische Molltonarten. Die übrigen Grundtöne von *Des* angefangen bis *Gis*, 14 an der Zahl, haben sowohl große als kleine Terzen. Man hat daher den genügenden Vorrat von 14 Tonarten, die nach Belieben Dur oder Moll sein können. Desgleichen ist ersichtlich, daß man nur bei 11 der 21 Tonarten, die sich in jener Tabelle befinden, reine Septimen hat; die übrigen müssen sich mit einem dissonanten Stellvertreter begnügen.

Außer der hier vorgeführten rationellen Tastatur für die Tonsysteme der ersten Klasse hat Petzval vermutlich auch eine solche für die Tonsysteme der zweiten Klasse hergestellt, die indessen verloren gegangen zu sein scheint. Die Vermutung gründet sich darauf, daß sich zwei Patronen für diese Tastatur gefunden haben: Tonleitern und Akkorde zweiter Klasse mit lateinischem Grundtone, und Tonleitern und Akkorde zweiter Klasse mit gotischem Grundtone. Diese Tastaturen samt den Patronen hat Petzval hauptsächlich zu seinen Studien über die Bildung der Akkorde und die mathematischen Grundsätze, welche zur Bildung einer neuen Harmonielehre nötig sind, benützt.

Die Tastatur für die Tonsysteme erster Klasse hat Petzval überdies im Jahre 1870 an einem Klavier praktisch durchgeführt. In seiner ausgedehnten Sommerwohnung auf dem Kahlenberge bei Wien hatte er nämlich auch eine vollständig eingerichtete mechanische Werkstätte, in welcher er mit großer Geschicklichkeit allerhand Instrumente und Behelfe für seine verschiedenen Studien und physikalischen Versuche herstellte — die von ihm geschliffenen Linsen für optische Instrumente hatten einen Weltruf. So hatte er also auch einen fertigen, leeren Klavierkasten für das 31stufige Tonsystem (mit 21 ausgewählten Tönen für die Oktave) eingerichtet, mit Saiten bespannt, und die von ihm ersonnene Tastatur selbst hergestellt und eingebaut. Er pflegte seine Hörer gelegentlich in seine Wohnung einzuladen und trug ihnen als Beispiel zu seinen Vorträgen verschiedene Musikstücke vor, an denen er praktisch erwies, wie einfach das Spiel einerseits sei, und wie man andererseits an Instrumenten mit festen Tönen durch Erweiterung der Tonreihe die Unreinheiten vermeiden und einen höheren Wohlklang zu erzielen vermag.

Aber er pflegte zu sagen, daß weder eine verbesserte Tastatur noch auch eines der von ihm berechneten tonreicheren Tonsysteme Eingang finden werde. „Denn das tonarme, 12stufige widersteht doch allen Angriffen hinlänglich durch die bloße Trägheit der Massen, und derjenige, welcher sich die unfruchtbare Aufgabe stellen würde, dasselbe zu verdrängen, und wenn auch durch ein besseres zu ersetzen, würde einen hoffnungslosen Kampf unternehmen müssen nicht nur mit den vielen Millionen in ihrer Ruhe gestörten Musikern, die den Erdball bevölkern, sondern auch mit den noch zahlreicheren Millionen musikalischer Instrumente, in denen das chromatische System verkörpert ist, und die in Form von Kisten, Schachteln, Röhren usw. mit hölzerner und blecherner Halsstarrigkeit sich einem jeden Versuche, ein besseres Tonsystem einzuführen, widersetzen würden. Wären daher die bitteren Vorwürfe auch alle begründet, die dem chromatischen System von Seite seiner heftigsten Gegner gemacht werden, wäre es wirklich wahr, daß es den Sänger zwinge, der Klavierbegleitung zuliebe falsch zu singen, den Violinspieler falsch zu geigen, daß es das Gehör ganzer Völker verderbe und als alleinige Ursache zu betrachen sei, daß die moderne Musik alles Sangbare allmählig ganz verliert und in einen barbarischen Lärm der Instrumentalmassen mehr und mehr ausartet, so müßte man sich diesem betrübenden, aber unabänderlichen Sachverhalte eben fügen, und diesen musikalischen Katzenjammer in stoischem Gleichmute als einen integrierenden Bestandteil des Fluches der Erbsünde ansehen, von dem sich das Menschengeschlecht nimmer befreien kann.“

Diese pessimistische Vorraussage **Petzvals** dürfte sich indessen nicht verwirklichen, vielmehr deuten insbesondere die späteren Bestrebungen anderer auf das Gegenteil hin. So hat 14 Jahre später (1884) **Jankó** den gleichen Gedanken hinsichtlich des einheitlichen Fingersatzes mit seiner Klaviatur ausgeführt, mit der Abweichung, daß die Tasten nicht in drei sondern in sechs Reihen, und zwar stufenförmig über einander angeordnet sind. Da aber diese Klaviatur für ein 12-stufiges System eingerichtet ist, so stellt sie sich eigentlich nur als eine auf eine bequeme Hand- und Fingerhaltung abzielende Verbesserung des gebräuchlichen Klavieres dar.

Zu den Tasteninstrumenten dagegen, die auch für eine reine Stimmung eingerichtet sind, gehören:

Das Harmonium von **Appun**, (das sogenannte mathematische Harmonium) mit 36 Stufen (1868), das **Bosanquetsche** Harmonium mit 53 Stufen (1875), das Enharmonium des Japaners Tanaka mit 20 Stufen (1890), das Harmonium von Steiner (1891) und zuletzt das Harmonium von Eitz mit 52 Stufen in jeder Oktave. Das letztere Instrument, welches sich im Institute für theoretische Physik der Universität Berlin befindet, ist wegen seiner zwar sinnreichen aber sehr verwickelten Klaviatur vom spieltechnischen Standpunkte aus schwer zu behandeln, dagegen für wissenschaftliche Zwecke ganz vorzüglich geeignet.

Diese Bestrebungen weisen wohl deutlich darauf hin, daß man die Sache keineswegs auf sich beruhen läßt; auch dürfen wir daraus mit einiger Sicherheit den Schluß ziehen, daß man nicht eher ruhen werde, bis nicht etwas Vollkommeneres aber genügend Einfaches gefunden sein wird. Und wenn auch nach der praktisch-musikalischen Seite (z. B. in betreff der Notenschrift) noch manche Ergänzung nötig sein wird, so werden doch Petzvals Untersuchungen ihren Wert behalten, und wird er doch immer als Führer dienen können.

A. Reihe der reinen Quinten.

Q_0	$1 = 1{\cdot}000000$	*C*	Q_{22}	$\frac{3^{22}}{2^{34}} = 1{\cdot}826618$	*Gis*^{3}	Q_{44}	$\frac{3^{44}}{2^{69}} = 1{\cdot}668266$	*Dis*^{6}
Q_1	$\frac{3}{2} = 1\ 500000$	*G*	Q_{23}	$\frac{3^{23}}{2^{36}} = 1{\cdot}369963$	*Dis*^{3}	Q_{45}	$\frac{3^{45}}{2^{71}} = 1{\cdot}251200$	*Ais*^{6}
Q_2	$\frac{3^2}{2^3} = 1{\cdot}125000$	*D*	Q_{24}	$\frac{3^{24}}{2^{38}} = 1{\cdot}027472$	*Ais*^{3}	Q_{46}	$\frac{3^{46}}{2^{72}} = 1{\cdot}876800$	*Eis*^{6}
Q_3	$\frac{3^3}{2^4} = 1{\cdot}687500$	*A*	Q_{25}	$\frac{3^{25}}{2^{39}} = 1{\cdot}541209$	*Eis*^{3}	Q_{47}	$\frac{3^{47}}{2^{74}} = 1{\cdot}407600$	*His*^{6}
Q_4	$\frac{3^4}{2^6} = 1{\cdot}265625$	*E*	Q_{26}	$\frac{3^{26}}{2^{41}} = 1{\cdot}155906$	*His*^{3}	Q_{48}	$\frac{3^{48}}{2^{76}} = 1{\cdot}055700$	*Fis*^{6}
Q_5	$\frac{3^5}{2^7} = 1{\cdot}898437$	*H*	Q_{27}	$\frac{3^{27}}{2^{42}} = 1{\cdot}733860$	*Fis*^{3}	Q_{49}	$\frac{3^{49}}{2^{77}} = 1{\cdot}583550$	*Cis*^{7}
Q_6	$\frac{3^6}{2^9} = 1{\cdot}423828$	*Fis*	Q_{28}	$\frac{3^{28}}{2^{44}} = 1{\cdot}300395$	*Cis*^{4}	Q_{50}	$\frac{3^{50}}{2^{79}} = 1{\cdot}187662$	*Gis*^{7}
Q_7	$\frac{3^7}{2^{11}} = 1{\cdot}067871$	*Cis*	Q_{29}	$\frac{3^{29}}{2^{45}} = 1{\cdot}950592$	*Gis*^{4}	Q_{51}	$\frac{3^{51}}{2^{80}} = 1{\cdot}781493$	*Dis*^{7}
Q_8	$\frac{3^8}{2^{12}} = 1{\cdot}601806$	*Gis*	Q_{30}	$\frac{3^{30}}{2^{47}} = 1{\cdot}462944$	*Dis*^{4}	Q_{52}	$\frac{3^{52}}{2^{82}} = 1{\cdot}336120$	*Ais*^{7}
Q_9	$\frac{3^9}{2^{14}} = 1{\cdot}201354$	*Dis*	Q_{31}	$\frac{3^{31}}{2^{49}} = 1{\cdot}097208$	*Ais*^{4}	Q_{53}	$\frac{3^{53}}{2^{84}} = 1{\cdot}002090$	*Eis*^{7}
Q_{10}	$\frac{3^{10}}{2^{15}} = 1{\cdot}802032$	*Ais*	Q_{32}	$\frac{3^{32}}{2^{50}} = 1{\cdot}645812$	*Eis*^{4}	Q_{54}	$\frac{3^{54}}{2^{85}} = 1{\cdot}503135$	*His*^{7}
Q_{11}	$\frac{3^{11}}{2^{17}} = 1{\cdot}351524$	*Eis*	Q_{33}	$\frac{3^{33}}{2^{52}} = 1{\cdot}234359$	*His*^{4}	Q_{55}	$\frac{3^{55}}{2^{87}} = 1{\cdot}127351$	*Fis*^{7}
Q_{12}	$\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1{\cdot}013643$	*His*	Q_{34}	$\frac{3^{34}}{2^{53}} = 1{\cdot}851539$	*Fis*^{4}	Q_{56}	$\frac{3^{56}}{2^{88}} = 1{\cdot}691027$	*Cis*^{8}
Q_{13}	$\frac{3^{13}}{2^{20}} = 1{\cdot}520464$	*Fis*^{2}	Q_{35}	$\frac{3^{35}}{2^{55}} = 1{\cdot}388654$	*Cis*^{5}	Q_{57}	$\frac{3^{57}}{2^{90}} = 1{\cdot}268270$	*Gis*^{8}
Q_{14}	$\frac{3^{14}}{2^{22}} = 1{\cdot}140348$	*Cis*^{2}	Q_{36}	$\frac{3^{36}}{2^{57}} = 1{\cdot}041490$	*Gis*^{5}	Q_{58}	$\frac{3^{58}}{2^{91}} = 1{\cdot}902405$	*Dis*^{8}
Q_{15}	$\frac{3^{15}}{2^{23}} = 1{\cdot}710523$	*Gis*^{2}	Q_{37}	$\frac{3^{37}}{2^{58}} = 1{\cdot}562236$	*Dis*^{5}	Q_{59}	$\frac{3^{59}}{2^{93}} = 1{\cdot}426804$	*Ais*^{8}
Q_{16}	$\frac{3^{16}}{2^{25}} = 1{\cdot}282892$	*Dis*^{2}	Q_{38}	$\frac{3^{38}}{2^{60}} = 1{\cdot}171677$	*Ais*^{5}	Q_{60}	$\frac{3^{60}}{2^{95}} = 1{\cdot}070103$	*Eis*^{8}
Q_{17}	$\frac{3^{17}}{2^{26}} = 1{\cdot}924338$	*Ais*^{2}	Q_{39}	$\frac{3^{39}}{2^{61}} = 1{\cdot}757515$	*Eis*^{5}	Q_{61}	$\frac{3^{61}}{2^{96}} = 1{\cdot}605154$	*His*^{8}
Q_{18}	$\frac{3^{18}}{2^{28}} = 1{\cdot}443253$	*Eis*^{2}	Q_{40}	$\frac{3^{40}}{2^{63}} = 1{\cdot}318136$	*His*^{5}	Q_{62}	$\frac{3^{62}}{2^{98}} = 1{\cdot}203866$	*Fis*^{8}
Q_{19}	$\frac{3^{19}}{2^{30}} = 1{\cdot}082440$	*His*^{2}	Q_{41}	$\frac{3^{41}}{2^{64}} = 1{\cdot}977205$	*Fis*^{5}	Q_{63}	$\frac{3^{63}}{2^{99}} = 1{\cdot}805799$	*Cis*^{9}
Q_{20}	$\frac{3^{20}}{2^{31}} = 1{\cdot}623660$	*Fis*^{2}	Q_{42}	$\frac{3^{42}}{2^{66}} = 1{\cdot}482903$	*Cis*^{6}	Q_{64}	$\frac{3^{64}}{2^{101}} = 1{\cdot}354349$	*Gis*^{9}
Q_{21}	$\frac{3^{21}}{2^{33}} = 1{\cdot}217745$	*Cis*^{3}	Q_{43}	$\frac{3^{43}}{2^{68}} = 1{\cdot}112177$	*Gis*^{6}	Q_{65}	$\frac{3^{65}}{2^{103}} = 1{\cdot}015762$	*Dis*^{9}

A. Reihe der reinen Quinten.

Q_{66}	$\frac{3^{66}}{2^{104}} = 1{\cdot}523643$	*Ais*^{9}	Q_{88}	$\frac{3^{88}}{2^{139}} = 1{\cdot}391557$	*Eis*^{12}	Q_{110}	$\frac{3^{110}}{2^{174}} = 1{\cdot}270921$	*His*^{15}
Q_{67}	$\frac{3^{67}}{2^{106}} = 1{\cdot}142732$	*Eis*^{9}	Q_{89}	$\frac{3^{89}}{2^{141}} = 1{\cdot}043667$	*His*^{12}	Q_{111}	$\frac{3^{111}}{2^{175}} = 1{\cdot}906382$	*Fis*^{15}
Q_{68}	$\frac{3^{68}}{2^{107}} = 1{\cdot}714098$	*His*^{9}	Q_{90}	$\frac{3^{90}}{2^{142}} = 1{\cdot}565501$	*Fis*^{12}	Q_{112}	$\frac{3^{112}}{2^{177}} = 1{\cdot}429786$	*Cis*^{16}
Q_{69}	$\frac{3^{69}}{2^{109}} = 1{\cdot}285573$	*Fis*^{9}	Q_{91}	$\frac{3^{91}}{2^{144}} = 1{\cdot}174126$	*Cis*^{13}	Q_{113}	$\frac{3^{113}}{2^{179}} = 1{\cdot}072340$	*Gis*^{16}
Q_{70}	$\frac{3^{70}}{2^{110}} = 1{\cdot}928360$	*Cis*^{10}	Q_{92}	$\frac{3^{92}}{2^{145}} = 1{\cdot}761189$	*Gis*^{13}	Q_{114}	$\frac{3^{114}}{2^{180}} = 1{\cdot}608510$	*Dis*^{16}
Q_{71}	$\frac{3^{71}}{2^{112}} = 1{\cdot}446270$	*Gis*^{10}	Q_{93}	$\frac{3^{93}}{2^{147}} = 1{\cdot}320892$	*Dis*^{13}	Q_{115}	$\frac{3^{115}}{2^{182}} = 1{\cdot}206382$	*Ais*^{16}
Q_{72}	$\frac{3^{72}}{2^{114}} = 1{\cdot}084702$	*Dis*^{10}	Q_{94}	$\frac{3^{94}}{2^{148}} = 1{\cdot}981338$	*Ais*^{13}	Q_{116}	$\frac{3^{116}}{2^{183}} = 1{\cdot}809573$	*Eis*^{16}
Q_{73}	$\frac{3^{73}}{2^{115}} = 1{\cdot}627054$	*Ais*^{10}	Q_{95}	$\frac{3^{95}}{2^{150}} = 1{\cdot}486003$	*Eis*^{13}	Q_{117}	$\frac{3^{117}}{2^{185}} = 1{\cdot}357180$	*His*^{16}
Q_{74}	$\frac{3^{74}}{2^{117}} = 1{\cdot}220290$	*Eis*^{10}	Q_{96}	$\frac{3^{96}}{2^{152}} = 1{\cdot}114502$	*His*^{13}	Q_{118}	$\frac{3^{118}}{2^{187}} = 1{\cdot}017885$	*Fis*^{16}
Q_{75}	$\frac{3^{75}}{2^{118}} = 1{\cdot}830436$	*His*^{10}	Q_{97}	$\frac{3^{97}}{2^{153}} = 1{\cdot}671754$	*Fis*^{13}	Q_{119}	$\frac{3^{119}}{2^{188}} = 1{\cdot}526828$	*Cis*^{17}
Q_{76}	$\frac{3^{76}}{2^{120}} = 1{\cdot}372827$	*Fis*^{10}	Q_{98}	$\frac{3^{98}}{2^{155}} = 1{\cdot}253815$	*Cis*^{14}	Q_{120}	$\frac{3^{120}}{2^{190}} = 1{\cdot}145121$	*Gis*^{17}
Q_{77}	$\frac{3^{77}}{2^{122}} = 1{\cdot}029620$	*Cis*^{11}	Q_{99}	$\frac{3^{99}}{2^{156}} = 1{\cdot}880723$	*Gis*^{14}	Q_{121}	$\frac{3^{121}}{2^{191}} = 1{\cdot}717681$	*Dis*^{17}
Q_{78}	$\frac{3^{78}}{2^{123}} = 1{\cdot}544430$	*Gis*^{11}	Q_{100}	$\frac{3^{100}}{2^{158}} = 1{\cdot}410542$	*Dis*^{14}	Q_{122}	$\frac{3^{122}}{2^{193}} = 1{\cdot}288261$	*Ais*^{17}
Q_{79}	$\frac{3^{79}}{2^{125}} = 1{\cdot}158322$	*Dis*^{11}	Q_{101}	$\frac{3^{101}}{2^{160}} = 1{\cdot}057906$	*Ais*^{14}	Q_{123}	$\frac{3^{123}}{2^{194}} = 1{\cdot}932391$	*Eis*^{17}
Q_{80}	$\frac{3^{80}}{2^{126}} = 1{\cdot}737484$	*Ais*^{11}	Q_{102}	$\frac{3^{102}}{2^{161}} = 1{\cdot}586860$	*Eis*^{14}	Q_{124}	$\frac{3^{124}}{2^{196}} = 1{\cdot}449293$	*His*^{17}
Q_{81}	$\frac{3^{81}}{2^{128}} = 1{\cdot}303113$	*Eis*^{11}	Q_{103}	$\frac{3^{103}}{2^{163}} = 1{\cdot}190145$	*His*^{14}	Q_{125}	$\frac{3^{125}}{2^{198}} = 1{\cdot}086970$	*Fis*^{17}
Q_{82}	$\frac{3^{82}}{2^{129}} = 1{\cdot}954669$	*His*^{11}	Q_{104}	$\frac{3^{104}}{2^{164}} = 1{\cdot}785217$	*Fis*^{14}	Q_{126}	$\frac{3^{126}}{2^{199}} = 1{\cdot}630455$	*Cis*^{18}
Q_{83}	$\frac{3^{83}}{2^{131}} = 1{\cdot}466002$	*Fis*^{11}	Q_{105}	$\frac{3^{105}}{2^{166}} = 1{\cdot}338913$	*Cis*^{15}	Q_{127}	$\frac{3^{127}}{2^{201}} = 1{\cdot}222841$	*Gis*^{18}
Q_{84}	$\frac{3^{84}}{2^{133}} = 1{\cdot}099501$	*Cis*^{12}	Q_{106}	$\frac{3^{106}}{2^{168}} = 1{\cdot}004184$	*Gis*^{15}	Q_{128}	$\frac{3^{128}}{2^{202}} = 1{\cdot}834262$	*Dis*^{18}
Q_{85}	$\frac{3^{85}}{2^{134}} = 1{\cdot}649252$	*Gis*^{12}	Q_{107}	$\frac{3^{107}}{2^{169}} = 1{\cdot}506277$	*Dis*^{15}	Q_{129}	$\frac{3^{129}}{2^{204}} = 1{\cdot}375696$	*Ais*^{18}
Q_{86}	$\frac{3^{86}}{2^{136}} = 1{\cdot}236939$	*Dis*^{12}	Q_{108}	$\frac{3^{108}}{2^{171}} = 1{\cdot}129708$	*Ais*^{15}	Q_{130}	$\frac{3^{130}}{2^{206}} = 1{\cdot}031772$	*Eis*^{18}
Q_{87}	$\frac{3^{87}}{2^{137}} = 1{\cdot}855409$	*Ais*^{12}	Q_{109}	$\frac{3^{109}}{2^{172}} = 1{\cdot}694562$	*Eis*^{15}	Q_{131}	$\frac{3^{131}}{2^{207}} = 1{\cdot}547658$	*His*^{18}

A. Reihe der reinen Quinten.

Q_{132}	$\frac{3^{132}}{2^{209}} = 1{\cdot}160744$	*Fis*^{18}	Q_{154}	$\frac{3^{154}}{2^{244}} = 1{\cdot}060118$	*Cis*^{22}	Q_{176}	$\frac{3^{176}}{2^{278}} = 1{\cdot}936431$	*Gis*^{25}
Q_{133}	$\frac{3^{133}}{2^{210}} = 1{\cdot}741116$	*Cis*^{19}	Q_{155}	$\frac{3^{155}}{2^{245}} = 1{\cdot}590177$	*Gis*^{22}	Q_{177}	$\frac{3^{177}}{2^{280}} = 1{\cdot}452323$	*Dis*^{25}
Q_{134}	$\frac{3^{134}}{2^{212}} = 1{\cdot}305837$	*Gis*^{19}	Q_{156}	$\frac{3^{156}}{2^{247}} = 1{\cdot}192632$	*Dis*^{22}	Q_{178}	$\frac{3^{178}}{2^{282}} = 1{\cdot}089242$	*Ais*^{25}
Q_{135}	$\frac{3^{135}}{2^{213}} = 1{\cdot}958755$	*Dis*^{19}	Q_{157}	$\frac{3^{157}}{2^{248}} = 1{\cdot}788949$	*Ais*^{22}	Q_{179}	$\frac{3^{179}}{2^{283}} = 1{\cdot}633863$	*Eis*^{25}
Q_{136}	$\frac{3^{136}}{2^{215}} = 1{\cdot}469066$	*Ais*^{19}	Q_{158}	$\frac{3^{158}}{2^{250}} = 1{\cdot}341712$	*Eis*^{22}	Q_{180}	$\frac{3^{180}}{2^{285}} = 1{\cdot}225397$	*His*^{25}
Q_{137}	$\frac{3^{137}}{2^{217}} = 1{\cdot}101800$	*Eis*^{19}	Q_{159}	$\frac{3^{159}}{2^{252}} = 1{\cdot}006284$	*His*^{22}	Q_{181}	$\frac{3^{181}}{2^{286}} = 1{\cdot}838096$	*Fis*^{25}
Q_{138}	$\frac{3^{138}}{2^{218}} = 1{\cdot}652700$	*His*^{19}	Q_{160}	$\frac{3^{160}}{2^{253}} = 1{\cdot}509426$	*Fis*^{22}	Q_{182}	$\frac{3^{182}}{2^{288}} = 1{\cdot}378572$	*Cis*^{26}
Q_{139}	$\frac{3^{139}}{2^{220}} = 1{\cdot}239525$	*Fis*^{19}	Q_{161}	$\frac{3^{161}}{2^{255}} = 1{\cdot}132069$	*Cis*^{23}	Q_{183}	$\frac{3^{183}}{2^{290}} = 1{\cdot}033929$	*Gis*^{26}
Q_{140}	$\frac{3^{140}}{2^{221}} = 1{\cdot}859287$	*Cis*^{20}	Q_{162}	$\frac{3^{162}}{2^{256}} = 1{\cdot}698104$	*Gis*^{23}	Q_{184}	$\frac{3^{184}}{2^{291}} = 1{\cdot}550894$	*Dis*^{26}
Q_{141}	$\frac{3^{141}}{2^{223}} = 1{\cdot}394465$	*Gis*^{20}	Q_{163}	$\frac{3^{163}}{2^{258}} = 1{\cdot}273578$	*Dis*^{23}	Q_{185}	$\frac{3^{185}}{2^{293}} = 1{\cdot}163170$	*Ais*^{26}
Q_{142}	$\frac{3^{142}}{2^{225}} = 1{\cdot}045849$	*Dis*^{20}	Q_{164}	$\frac{3^{164}}{2^{259}} = 1{\cdot}910367$	*Ais*^{23}	Q_{186}	$\frac{3^{186}}{2^{294}} = 1{\cdot}744755$	*Eis*^{26}
Q_{143}	$\frac{3^{143}}{2^{226}} = 1{\cdot}568774$	*Ais*^{20}	Q_{165}	$\frac{3^{165}}{2^{261}} = 1{\cdot}432775$	*Eis*^{23}	Q_{187}	$\frac{3^{187}}{2^{296}} = 1{\cdot}308566$	*His*^{26}
Q_{144}	$\frac{3^{144}}{2^{228}} = 1{\cdot}176580$	*Eis*^{20}	Q_{166}	$\frac{3^{166}}{2^{263}} = 1{\cdot}074581$	*His*^{23}	Q_{188}	$\frac{3^{188}}{2^{297}} = 1{\cdot}962850$	*Fis*^{26}
Q_{145}	$\frac{3^{145}}{2^{229}} = 1{\cdot}764870$	*His*^{20}	Q_{167}	$\frac{3^{167}}{2^{264}} = 1{\cdot}611872$	*Fis*^{23}	Q_{189}	$\frac{3^{189}}{2^{299}} = 1{\cdot}472137$	*Cis*^{27}
Q_{146}	$\frac{3^{146}}{2^{231}} = 1{\cdot}323653$	*Fis*^{20}	Q_{168}	$\frac{3^{168}}{2^{266}} = 1{\cdot}208904$	*Cis*^{24}	Q_{190}	$\frac{3^{190}}{2^{301}} = 1{\cdot}104103$	*Gis*^{27}
Q_{147}	$\frac{3^{147}}{2^{232}} = 1{\cdot}985479$	*Cis*^{21}	Q_{169}	$\frac{3^{169}}{2^{267}} = 1{\cdot}813356$	*Gis*^{24}	Q_{191}	$\frac{3^{191}}{2^{302}} = 1{\cdot}656154$	*Dis*^{27}
Q_{148}	$\frac{3^{148}}{2^{234}} = 1{\cdot}489109$	*Gis*^{21}	Q_{170}	$\frac{3^{170}}{2^{269}} = 1{\cdot}360017$	*Dis*^{24}	Q_{192}	$\frac{3^{192}}{2^{304}} = 1{\cdot}242116$	*Ais*^{27}
Q_{149}	$\frac{3^{149}}{2^{236}} = 1{\cdot}116832$	*Dis*^{21}	Q_{171}	$\frac{3^{171}}{2^{271}} = 1{\cdot}020013$	*Ais*^{24}	Q_{193}	$\frac{3^{193}}{2^{305}} = 1{\cdot}863174$	*Eis*^{27}
Q_{150}	$\frac{3^{150}}{2^{237}} = 1{\cdot}675248$	*Ais*^{21}	Q_{172}	$\frac{3^{172}}{2^{272}} = 1{\cdot}530019$	*Eis*^{24}	Q_{194}	$\frac{3^{194}}{2^{307}} = 1{\cdot}397380$	*His*^{27}
Q_{151}	$\frac{3^{151}}{2^{239}} = 1{\cdot}256436$	*Eis*^{21}	Q_{173}	$\frac{3^{173}}{2^{274}} = 1{\cdot}147514$	*His*^{24}	Q_{195}	$\frac{3^{195}}{2^{309}} = 1{\cdot}048035$	*Fis*^{27}
Q_{152}	$\frac{3^{152}}{2^{240}} = 1{\cdot}884654$	*His*^{21}	Q_{174}	$\frac{3^{174}}{2^{275}} = 1{\cdot}721272$	*Fis*^{24}	Q_{196}	$\frac{3^{196}}{2^{310}} = 1{\cdot}572053$	*Cis*^{28}
Q_{153}	$\frac{3^{153}}{2^{242}} = 1{\cdot}413490$	*Fis*^{21}	Q_{175}	$\frac{3^{175}}{2^{277}} = 1{\cdot}290954$	*Cis*^{25}	Q_{197}	$\frac{3^{197}}{2^{312}} = 1{\cdot}179039$	*Gis*^{28}

B. Reihe der reinen Quarten.

Q_0	$1 = 1{\cdot}000000$	*C*	Q_{-22}	$\frac{2^{35}}{3^{22}} = 1{\cdot}094919$	*Fes*^{3}	Q_{-44}	$\frac{2^{70}}{3^{44}} = 1{\cdot}198849$	*Bes*^{6}
Q_{-1}	$\frac{2^{2}}{3^{1}} = 1{\cdot}333333$	*F*	Q_{-23}	$\frac{2^{37}}{3^{23}} = 1{\cdot}459892$	*Bes*^{3}	Q_{-45}	$\frac{2^{72}}{3^{45}} = 1{\cdot}598465$	*Es*^{7}
Q_{-2}	$\frac{2^{4}}{3^{2}} = 1{\cdot}777777$	*B*	Q_{-24}	$\frac{2^{39}}{3^{24}} = 1{\cdot}946523$	*Es*^{4}	Q_{-46}	$\frac{2^{73}}{3^{46}} = 1{\cdot}065643$	*As*^{7}
Q_{-3}	$\frac{2^{5}}{3^{3}} = 1{\cdot}185185$	*Es*	Q_{-25}	$\frac{2^{40}}{3^{25}} = 1{\cdot}297682$	*As*^{4}	Q_{-47}	$\frac{2^{75}}{3^{47}} = 1{\cdot}420858$	*Des*^{7}
Q_{-4}	$\frac{2^{7}}{3^{4}} = 1{\cdot}580246$	*As*	Q_{-26}	$\frac{2^{42}}{3^{26}} = 1{\cdot}730243$	*Des*^{4}	Q_{-48}	$\frac{2^{77}}{3^{48}} = 1{\cdot}894477$	*Ges*^{7}
Q_{-5}	$\frac{2^{8}}{3^{5}} = 1{\cdot}053497$	*Des*	Q_{-27}	$\frac{2^{43}}{3^{27}} = 1{\cdot}153495$	*Ges*^{4}	Q_{-49}	$\frac{2^{78}}{3^{49}} = 1{\cdot}262984$	*Ces*^{7}
Q_{-6}	$\frac{2^{10}}{3^{6}} = 1{\cdot}404663$	*Ges*	Q_{-28}	$\frac{2^{45}}{3^{28}} = 1{\cdot}537994$	*Ces*^{4}	Q_{-50}	$\frac{2^{80}}{3^{50}} = 1{\cdot}683979$	*Fes*^{7}
Q_{-7}	$\frac{2^{12}}{3^{7}} = 1{\cdot}872885$	*Ces*	Q_{-29}	$\frac{2^{46}}{3^{29}} = 1{\cdot}025329$	*Fes*^{4}	Q_{-51}	$\frac{2^{81}}{3^{51}} = 1{\cdot}122653$	*Bes*^{7}
Q_{-8}	$\frac{2^{13}}{3^{8}} = 1{\cdot}248590$	*Fes*	Q_{-30}	$\frac{2^{48}}{3^{30}} = 1{\cdot}367105$	*Bes*^{4}	Q_{-52}	$\frac{2^{83}}{3^{52}} = 1{\cdot}496871$	*Es*^{8}
Q_{-9}	$\frac{2^{15}}{3^{9}} = 1{\cdot}664786$	*Bes*	Q_{-31}	$\frac{2^{50}}{3^{31}} = 1{\cdot}822807$	*Es*^{5}	Q_{-53}	$\frac{2^{85}}{3^{53}} = 1{\cdot}995828$	*As*^{8}
Q_{-10}	$\frac{2^{16}}{3^{10}} = 1{\cdot}109857$	*Es*^{2}	Q_{-32}	$\frac{2^{51}}{3^{32}} = 1{\cdot}215205$	*As*^{5}	Q_{-54}	$\frac{2^{86}}{3^{54}} = 1{\cdot}330552$	*Des*^{8}
Q_{-11}	$\frac{2^{18}}{3^{11}} = 1{\cdot}479810$	*As*^{2}	Q_{-33}	$\frac{2^{53}}{3^{33}} = 1{\cdot}620273$	*Des*^{5}	Q_{-55}	$\frac{2^{88}}{3^{55}} = 1{\cdot}774069$	*Ges*^{8}
Q_{-12}	$\frac{2^{20}}{3^{12}} = 1{\cdot}973080$	*Des*^{2}	Q_{-34}	$\frac{2^{54}}{3^{34}} = 1{\cdot}080182$	*Ges*^{5}	Q_{-56}	$\frac{2^{89}}{3^{56}} = 1{\cdot}182712$	*Ces*^{8}
Q_{-13}	$\frac{2^{21}}{3^{13}} = 1{\cdot}315387$	*Ges*^{2}	Q_{-35}	$\frac{2^{56}}{3^{35}} = 1{\cdot}440243$	*Ces*^{5}	Q_{-57}	$\frac{2^{91}}{3^{57}} = 1{\cdot}576950$	*Fes*^{8}
Q_{-14}	$\frac{2^{23}}{3^{14}} = 1{\cdot}753849$	*Ces*^{2}	Q_{-36}	$\frac{2^{58}}{3^{36}} = 1{\cdot}920324$	*Fes*^{5}	Q_{-58}	$\frac{2^{92}}{3^{58}} = 1{\cdot}051300$	*Bes*^{8}
Q_{-15}	$\frac{2^{24}}{3^{15}} = 1{\cdot}169233$	*Fes*^{2}	Q_{-37}	$\frac{2^{59}}{3^{37}} = 1{\cdot}280216$	*Bes*^{5}	Q_{-59}	$\frac{2^{94}}{3^{59}} = 1{\cdot}401733$	*Es*^{9}
Q_{-16}	$\frac{2^{26}}{3^{16}} = 1{\cdot}558977$	*Bes*^{2}	Q_{-38}	$\frac{2^{61}}{3^{38}} = 1{\cdot}706954$	*Es*^{6}	Q_{-60}	$\frac{2^{96}}{3^{60}} = 1{\cdot}868978$	*As*^{9}
Q_{-17}	$\frac{2^{27}}{3^{17}} = 1{\cdot}039318$	*Es*^{3}	Q_{-39}	$\frac{2^{62}}{3^{39}} = 1{\cdot}137969$	*As*^{6}	Q_{-61}	$\frac{2^{97}}{3^{61}} = 1{\cdot}245985$	*Des*^{9}
Q_{-18}	$\frac{2^{29}}{3^{18}} = 1{\cdot}385757$	*As*^{3}	Q_{-40}	$\frac{2^{64}}{3^{40}} = 1{\cdot}517293$	*Des*^{6}	Q_{-62}	$\frac{2^{99}}{3^{62}} = 1{\cdot}661314$	*Ges*^{9}
Q_{-19}	$\frac{2^{31}}{3^{19}} = 1{\cdot}847676$	*Des*^{3}	Q_{-41}	$\frac{2^{65}}{3^{41}} = 1{\cdot}011528$	*Ges*^{6}	Q_{-63}	$\frac{2^{100}}{3^{63}} = 1{\cdot}107542$	*Ces*^{9}
Q_{-20}	$\frac{2^{32}}{3^{20}} = 1{\cdot}231784$	*Ges*^{3}	Q_{-42}	$\frac{2^{67}}{3^{42}} = 1{\cdot}348705$	*Ces*^{6}	Q_{-64}	$\frac{2^{102}}{3^{64}} = 1{\cdot}476723$	*Fes*^{9}
Q_{-21}	$\frac{2^{34}}{3^{21}} = 1{\cdot}642379$	*Ces*^{3}	Q_{-43}	$\frac{2^{69}}{3^{43}} = 1{\cdot}798273$	*Fes*^{6}	Q_{-65}	$\frac{2^{104}}{3^{65}} = 1{\cdot}968964$	*Bes*^{9}

B. Reihe der reinen Quarten.

Q_{-66}	$\frac{2^{105}}{3^{66}} = 1{\cdot}312643$	Es^{10}	Q_{-88}	$\frac{2^{140}}{3^{88}} = 1{\cdot}437238$	As^{13}	Q_{-110}	$\frac{2^{175}}{3^{110}} = 1{\cdot}573661$	Des^{16}
Q_{-67}	$\frac{2^{107}}{3^{67}} = 1{\cdot}750191$	As^{10}	Q_{-89}	$\frac{2^{142}}{3^{89}} = 1{\cdot}916318$	Des^{13}	Q_{-111}	$\frac{2^{176}}{3^{111}} = 1{\cdot}049107$	Ges^{16}
Q_{-68}	$\frac{2^{108}}{3^{68}} = 1{\cdot}166794$	Des^{10}	Q_{-90}	$\frac{2^{143}}{3^{90}} = 1{\cdot}277545$	Ges^{13}	Q_{-112}	$\frac{2^{178}}{3^{112}} = 1{\cdot}398809$	Ces^{16}
Q_{-69}	$\frac{2^{110}}{3^{69}} = 1{\cdot}555725$	Ges^{10}	Q_{-91}	$\frac{2^{145}}{3^{91}} = 1{\cdot}703394$	Ces^{13}	Q_{-113}	$\frac{2^{180}}{3^{113}} = 1{\cdot}865079$	Fes^{16}
Q_{-70}	$\frac{2^{111}}{3^{70}} = 1{\cdot}037150$	Ces^{10}	Q_{-92}	$\frac{2^{146}}{3^{92}} = 1{\cdot}135596$	Fes^{13}	Q_{-114}	$\frac{2^{181}}{3^{114}} = 1{\cdot}243386$	Bes^{16}
Q_{-71}	$\frac{2^{113}}{3^{71}} = 1{\cdot}382867$	Fes^{10}	Q_{-93}	$\frac{2^{148}}{3^{93}} = 1{\cdot}514128$	Bes^{13}	Q_{-115}	$\frac{2^{183}}{3^{115}} = 1{\cdot}657848$	Es^{17}
Q_{-72}	$\frac{2^{115}}{3^{72}} = 1{\cdot}843822$	Bes^{10}	Q_{-94}	$\frac{2^{149}}{3^{94}} = 1{\cdot}009418$	Es^{14}	Q_{-116}	$\frac{2^{184}}{3^{116}} = 1{\cdot}105232$	As^{17}
Q_{-73}	$\frac{2^{116}}{3^{73}} = 1{\cdot}229215$	Es^{11}	Q_{-95}	$\frac{2^{151}}{3^{95}} = 1{\cdot}345891$	As^{14}	Q_{-117}	$\frac{2^{186}}{3^{117}} = 1{\cdot}473643$	Des^{17}
Q_{-74}	$\frac{2^{118}}{3^{74}} = 1{\cdot}638953$	As^{11}	Q_{-96}	$\frac{2^{153}}{3^{96}} = 1{\cdot}794522$	Des^{14}	Q_{-118}	$\frac{2^{188}}{3^{118}} = 1{\cdot}964857$	Ges^{17}
Q_{-75}	$\frac{2^{119}}{3^{75}} = 1{\cdot}092635$	Des^{11}	Q_{-97}	$\frac{2^{154}}{3^{97}} = 1{\cdot}196348$	Ges^{14}	Q_{-119}	$\frac{2^{189}}{3^{119}} = 1{\cdot}309905$	Ces^{17}
Q_{-76}	$\frac{2^{121}}{3^{76}} = 1{\cdot}456847$	Ges^{11}	Q_{-98}	$\frac{2^{156}}{3^{98}} = 1{\cdot}595131$	Ces^{14}	Q_{-120}	$\frac{2^{191}}{3^{120}} = 1{\cdot}746540$	Fes^{17}
Q_{-77}	$\frac{2^{123}}{3^{77}} = 1{\cdot}942463$	Ces^{11}	Q_{-99}	$\frac{2^{157}}{3^{99}} = 1{\cdot}063420$	Fes^{14}	Q_{-121}	$\frac{2^{192}}{3^{121}} = 1{\cdot}164360$	Bes^{17}
Q_{-78}	$\frac{2^{124}}{3^{78}} = 1{\cdot}294975$	Fes^{11}	Q_{-100}	$\frac{2^{159}}{3^{100}} = 1{\cdot}417894$	Bes^{14}	Q_{-122}	$\frac{2^{194}}{3^{122}} = 1{\cdot}552480$	Es^{18}
Q_{-79}	$\frac{2^{126}}{3^{79}} = 1{\cdot}726634$	Bes^{11}	Q_{-101}	$\frac{2^{161}}{3^{101}} = 1{\cdot}890525$	Es^{15}	Q_{-123}	$\frac{2^{195}}{3^{123}} = 1{\cdot}034986$	As^{18}
Q_{-80}	$\frac{2^{127}}{3^{80}} = 1{\cdot}151089$	Es^{12}	Q_{-102}	$\frac{2^{162}}{3^{102}} = 1{\cdot}260350$	As^{15}	Q_{-124}	$\frac{2^{197}}{3^{124}} = 1{\cdot}379982$	Des^{18}
Q_{-81}	$\frac{2^{129}}{3^{81}} = 1{\cdot}534785$	As^{12}	Q_{-103}	$\frac{2^{164}}{3^{103}} = 1{\cdot}680467$	Des^{15}	Q_{-125}	$\frac{1^{199}}{3^{125}} = 1{\cdot}839976$	Ges^{18}
Q_{-82}	$\frac{2^{130}}{3^{82}} = 1{\cdot}023190$	Des^{12}	Q_{-104}	$\frac{2^{165}}{3^{104}} = 1{\cdot}120311$	Ges^{15}	Q_{-126}	$\frac{2^{200}}{3^{126}} = 1{\cdot}226651$	Ces^{18}
Q_{-83}	$\frac{2^{132}}{3^{83}} = 1{\cdot}364254$	Ges^{12}	Q_{-105}	$\frac{2^{167}}{3^{105}} = 1{\cdot}493748$	Ces^{15}	Q_{-127}	$\frac{2^{202}}{3^{127}} = 1{\cdot}635534$	Fes^{18}
Q_{-84}	$\frac{2^{134}}{3^{84}} = 1{\cdot}819005$	Ces^{12}	Q_{-106}	$\frac{2^{169}}{3^{106}} = 1{\cdot}991664$	Fes^{15}	Q_{-128}	$\frac{2^{203}}{3^{128}} = 1{\cdot}090356$	Bes^{18}
Q_{-85}	$\frac{2^{135}}{3^{85}} = 1{\cdot}212670$	Fes^{12}	Q_{-107}	$\frac{2^{170}}{3^{107}} = 1{\cdot}327776$	Bes^{15}	Q_{-129}	$\frac{2^{205}}{3^{129}} = 1\ 453808$	Es^{19}
Q_{-86}	$\frac{2^{137}}{3^{86}} = 1{\cdot}616893$	Bes^{12}	Q_{-108}	$\frac{2^{172}}{3^{108}} = 1{\cdot}770368$	Es^{16}	Q_{-130}	$\frac{2^{207}}{3^{130}} = 1{\cdot}938411$	As^{19}
Q_{-87}	$\frac{2^{138}}{3^{87}} = 1{\cdot}077929$	Es^{13}	Q_{-109}	$\frac{2^{173}}{3^{109}} = 1{\cdot}180245$	As^{16}	Q_{-131}	$\frac{2^{208}}{3^{131}} = 1{\cdot}292274$	Des^{19}

B. Reihe der reinen Quarten.

Q_{-132}	$\frac{2^{210}}{3^{132}} = 1{\cdot}723032$	*Ges*[19]	Q_{-154}	$\frac{2^{245}}{3^{154}} = 1{\cdot}886582$	*Ces*[22]	Q_{-176}	$\frac{2^{279}}{3^{176}} = 1{\cdot}032827$	*Fes*[25]
Q_{-133}	$\frac{2^{211}}{3^{133}} = 1{\cdot}148688$	*Ces*[19]	Q_{-155}	$\frac{2^{246}}{3^{155}} = 1{\cdot}257721$	*Fes*[32]	Q_{-177}	$\frac{2^{281}}{3^{177}} = 1{\cdot}377103$	*Bes*[25]
Q_{-134}	$\frac{2^{213}}{3^{134}} = 1{\cdot}531584$	*Fes*[19]	Q_{-156}	$\frac{2^{248}}{3^{156}} = 1{\cdot}676961$	*Bes*[22]	Q_{-178}	$\frac{2^{283}}{3^{178}} = 1{\cdot}836138$	*Es*[26]
Q_{-135}	$\frac{2^{214}}{3^{135}} = 1{\cdot}021056$	*Bes*[19]	Q_{-157}	$\frac{2^{249}}{3^{157}} = 1{\cdot}117974$	*Es*[23]	Q_{-179}	$\frac{2^{284}}{3^{179}} = 1{\cdot}224092$	*As*[26]
Q_{-136}	$\frac{2^{216}}{3^{136}} = 1{\cdot}361408$	*Es*[20]	Q_{-158}	$\frac{2^{251}}{3^{158}} = 1{\cdot}490632$	*As*[23]	Q_{-180}	$\frac{2^{286}}{3^{180}} = 1{\cdot}632123$	*Des*[26]
Q_{-137}	$\frac{2^{218}}{3^{137}} = 1{\cdot}815211$	*As*[20]	Q_{-159}	$\frac{2^{253}}{3^{159}} = 1{\cdot}987510$	*Des*[23]	Q_{-181}	$\frac{2^{287}}{3^{181}} = 1{\cdot}088082$	*Ges*[26]
Q_{-138}	$\frac{2^{219}}{3^{138}} = 1{\cdot}210140$	*Des*[20]	Q_{-160}	$\frac{2^{254}}{3^{160}} = 1{\cdot}325006$	*Ges*[23]	Q_{-182}	$\frac{2^{289}}{3^{182}} = 1{\cdot}450776$	*Ces*[26]
Q_{-139}	$\frac{2^{221}}{3^{139}} = 1{\cdot}613521$	*Ges*[20]	Q_{-161}	$\frac{2^{256}}{3^{161}} = 1{\cdot}766675$	*Ces*[23]	Q_{-183}	$\frac{2^{291}}{3^{183}} = 1{\cdot}934368$	*Fes*[26]
Q_{-140}	$\frac{2^{222}}{3^{140}} = 1{\cdot}075680$	*Ces*[20]	Q_{-162}	$\frac{2^{257}}{3^{162}} = 1{\cdot}177783$	*Fes*[23]	Q_{-184}	$\frac{2^{292}}{3^{184}} = 1{\cdot}289578$	*Bes*[26]
Q_{-141}	$\frac{2^{224}}{3^{141}} = 1{\cdot}434240$	*Fes*[20]	Q_{-163}	$\frac{2^{259}}{3^{163}} = 1{\cdot}570378$	*Bes*[23]	Q_{-185}	$\frac{2^{294}}{3^{185}} = 1{\cdot}719438$	*Es*[27]
Q_{-142}	$\frac{2^{226}}{3^{142}} = 1{\cdot}912321$	*Bes*[20]	Q_{-164}	$\frac{2^{260}}{3^{164}} = 1{\cdot}046919$	*Es*[24]	Q_{-186}	$\frac{2^{295}}{3^{186}} = 1{\cdot}146292$	*As*[27]
Q_{-143}	$\frac{2^{227}}{3^{143}} = 1{\cdot}274880$	*Es*[21]	Q_{-165}	$\frac{2^{262}}{3^{165}} = 1{\cdot}395892$	*As*[24]	Q_{-187}	$\frac{2^{297}}{3^{187}} = 1{\cdot}528389$	*Des*[27]
Q_{-144}	$\frac{2^{229}}{3^{144}} = 1{\cdot}699841$	*As*[21]	Q_{-166}	$\frac{2^{264}}{3^{166}} = 1{\cdot}861189$	*Des*[24]	Q_{-188}	$\frac{2^{298}}{3^{188}} = 1{\cdot}018926$	*Ges*[27]
Q_{-145}	$\frac{2^{230}}{3^{145}} = 1{\cdot}133227$	*Des*[21]	Q_{-167}	$\frac{2^{265}}{3^{167}} = 1{\cdot}240792$	*Ges*[24]	Q_{-189}	$\frac{2^{300}}{3^{189}} = 1{\cdot}358568$	*Ces*[27]
Q_{-146}	$\frac{2^{232}}{3^{146}} = 1{\cdot}510969$	*Ges*[21]	Q_{-168}	$\frac{2^{267}}{3^{168}} = 1{\cdot}654390$	*Ces*[24]	Q_{-190}	$\frac{2^{302}}{3^{190}} = 1{\cdot}811424$	*Fes*[27]
Q_{-147}	$\frac{2^{233}}{3^{147}} = 1{\cdot}007313$	*Ces*[21]	Q_{-169}	$\frac{2^{268}}{3^{169}} = 1{\cdot}102927$	*Fes*[24]	Q_{-191}	$\frac{2^{303}}{3^{191}} = 1{\cdot}207616$	*Bes*[27]
Q_{-148}	$\frac{2^{235}}{3^{148}} = 1{\cdot}343084$	*Fes*[21]	Q_{-170}	$\frac{2^{270}}{3^{170}} = 1{\cdot}470569$	*Bes*[24]	Q_{-192}	$\frac{2^{305}}{3^{192}} = 1{\cdot}610155$	*Es*[28]
Q_{-149}	$\frac{2^{237}}{3^{149}} = 1{\cdot}790779$	*Bes*[21]	Q_{-171}	$\frac{2^{272}}{3^{171}} = 1{\cdot}960759$	*Es*[25]	Q_{-193}	$\frac{2^{306}}{3^{193}} = 1{\cdot}073436$	*As*[28]
Q_{-150}	$\frac{2^{238}}{3^{150}} = 1{\cdot}193852$	*Es*[22]	Q_{-172}	$\frac{2^{273}}{3^{172}} = 1{\cdot}307172$	*As*[35]	Q_{-194}	$\frac{2^{308}}{3^{194}} = 1{\cdot}431249$	*Des*[28]
Q_{-151}	$\frac{2^{240}}{3^{151}} = 1{\cdot}591803$	*As*[22]	Q_{-173}	$\frac{2^{275}}{3^{173}} = 1{\cdot}742897$	*Des*[25]	Q_{-195}	$\frac{2^{310}}{3^{195}} = 1{\cdot}908332$	*Ges*[28]
Q_{-152}	$\frac{2^{241}}{3^{152}} = 1{\cdot}061202$	*Des*[22]	Q_{-174}	$\frac{2^{276}}{3^{174}} = 1{\cdot}161931$	*Ges*[25]	Q_{-196}	$\frac{2^{311}}{3^{196}} = 1{\cdot}272221$	*Ces*[28]
Q_{-153}	$\frac{2^{243}}{3^{153}} = 1{\cdot}414936$	*Ges*[22]	Q_{-175}	$\frac{2^{278}}{3^{175}} = 1{\cdot}549241$	*Ces*[25]	Q_{-197}	$\frac{2^{313}}{3^{197}} = 1{\cdot}696295$	*Fes*[28]

ZEITSCHRIFT
FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856—1896) UND M. CANTOR (1859—1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN VON

R. MEHMKE UND **C. RUNGE**

IN STUTTGART IN GÖTTINGEN.

51. BAND.

MIT 109 FIGUREN IM TEXT UND 3 TAFELN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1904.

Inhalt.

Kleinere Mitteilungen.

Preisaufgaben aus der angewandten Mathematik.

Bücherschau.