introduction mathématique à la linguistique structurale

COURS DU CENTRE DE LINGUISTIQUE QUANTITATIVE [1]

1. — Daniel HÉRAULT. — *Eléments de théorie moderne des probabilités.* (1967), 256 pages.

En préparation

Iégor REZNIKOFF. — *Cours de logique mathématique.*
René MOREAU. — *Introduction à la formalisation des langages.*

MONOGRAPHIES DE LINGUISTIQUE MATHÉMATIQUE

1. Solomon MARCUS. — *Introduction mathématique à la linguistique structurale.* (1967), 292 pages.

Sous presse

I.I. REVZIN. — *Les modèles linguistiques,* traduit du russe par M. Yves GENTILHOMME.

(1) Pour recevoir le programme détaillé des cours du Centre de Linguistique quantitative, écrire à l'adresse suivante : Centre de linguistique quantitative, Institut Henri-Poincaré, 11, rue Pierre-Curie, 75 - PARIS (5e).

MONOGRAPHIES
DE LINGUISTIQUE MATHÉMATIQUE 1

introduction mathématique à la linguistique structurale

Solomon MARCUS
Professeur à l'Université de Bucarest

DUNOD
PARIS
1967

AVANT-PROPOS

Il y a un an, j'ai reçu l'invitation — dont je suis profondément honoré — de publier, dans la collection de Linguistique Quantitative dirigée par le regretté Professeur Jean Favard et par Monsieur le Professeur André Martinet, une version française de mon livre « Lingvistică matematică », paru à Bucarest, en 1963. Le présent livre, tout en conservant — avec des modifications de détail — une bonne partie de l'édition roumaine, en diffère sensiblement. Les paragraphes 15, 18, 23, 28-31 et 33-43 du chapitre I ; 1 et 17-28 du chapitre II ; 1 et 24-32 du chapitre III ; 18-19 et 39 du chapitre IV ; 1-4, 11 et 38-47 du chapitre V et les chapitres VI et VII, sont nouveaux. La bibliographie est reconsidérée et remise à jour. D'autre part, les chapitres VI et VII de l'édition roumaine n'ont pas été conservés dans l'édition française. En ce qui concerne les chapitres I-V de l'édition roumaine, leur utilisation dans le texte français a été possible grâce à la permission donnée par « Editura didactică şi pedagogică », ce dont je lui suis reconnaissant.

Tous ces changements ont été nécessaires en vue de faire de ce livre, ce que son titre annonce : une introduction mathématique à la linguistique structurale. A l'exception de quelques questions isolées, toutes les notions utilisées, qu'elles soient de mathématiques ou de linguistique, sont définies dans le texte. Afin d'initier le linguiste et le mathématicien à l'étude de certains aspects mathématiques du langage, le livre traite surtout des notions et des questions linguistiques des plus simples, étudiées par la linguistique structurale, et utilise des notions, relations et opérations mathématiques assez élémentaires : inclusions, ordre, quasi-ordre, opérations sur les ensembles, fonctions, éléments de la théorie des graphes, semi-groupes libres, espace métrique, algèbre de Boole.

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur Miron Nicolescu, dont l'appui constant et l'encouragement, pendant beaucoup d'années, ont contribué essentiellement à ma formation scientifique.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur Grigore Moisil d'avoir pris l'initiative de créer, il y a quelques années, un cours de linguistique mathématique à la Faculté de mathématiques et mécanique de l'Université de Bucarest et Monsieur le Professeur Alexandru Rosetti d'une initiative analogue, à la Faculté de philologie de la même Université. L'expérience que j'ai accumulée en enseignant ces cours, m'a beaucoup aidé pour la rédaction de ce livre.

Avril 1965

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I

OPPOSITIONS ET DISTRIBUTIONS

1. Introduction

C'est Ferdinand de Saussure qui, le premier parmi les linguistes, attira l'attention sur le rôle central joué par la notion d'opposition dans l'étude de la langue [25]. Le problème posé par Ferdinand de Saussure, à savoir l'examen systématique des oppositions linguistiques, a été traité par N. S. Troubetzkoy, qui a classé les différents types d'oppositions phonologiques ; il a fait remarquer que sa classification pouvait s'appliquer également, dans ses grandes lignes, aux oppositions qui se manifestent à d'autres niveaux de la langue [29]. La classification entreprise par N. S. Troubetzkoy a été améliorée par J. Cantineau, qui a étudié systématiquement la possibilité de l'adapter à ce qu'on appelle les « oppositions significatives » et qui a montré que les différents types d'oppositions mis en évidence par N. S. Troubetzkoy correspondent aux relations fondamentales de la logique symbolique [3], [4]. J. Cantineau propose d'employer le terme de « relation » au lieu de celui d'« opposition », le premier étant plus général et plus adéquat. Toutefois, comme le second terme a connu ces dernières années une large diffusion, nous utiliserons les deux termes (comme le fait J. Cantineau). Les travaux de A. Martinet [21], [22], L. Hjelmslev [11], P. L. Garvin [9], A. A. Reformatskii [24], ceux des descriptivistes américains, d'autres encore, ont enrichi la théorie des oppositions linguistiques. Des analogies intéressantes ont été mises en lumière entre les types d'oppositions linguistiques et certaines situations de la théorie des codes [1].

Le présent chapitre donne aux linguistes le moyen d'aborder, par des chemins linguistiques, les premiers éléments de la théorie des ensembles : aux mathématiciens il fait connaître, sous une forme mathématique, certaines notions classiques de la théorie des oppositions linguistiques.

2. L'idée d'ensemble

Le mot *ensemble* conserve, dans ce qui suit, son sens habituel : il désigne une notion primitive, donc qui ne peut être réduite à d'autres plus simples.

Les objets qui constituent un ensemble s'appellent *éléments*. Soit, par exemple, l'ensemble A des mots de la langue latine. Le mot « civis » est un élément de cet ensemble ; « civis » appartient à l'ensemble A. Le mot « mauvais » n'est pas un élément de cet ensemble : « mauvais » n'appartient pas à l'ensemble A. La relation « a est un élément de l'ensemble A » s'appelle *relation d'appartenance* et se note par le signe $\in$ (le signe de G. Peano). Donc : $a \in A$. Il résulte que « civis » $\in A$. Si un élément b n'appartient pas à l'ensemble A, nous écrivons $b \notin A$. On a donc : « mauvais » $\notin A$. Un autre exemple : Soit B l'ensemble des nombres plus petits que 100. Nous avons $35 \in B$, $163 \notin B$. On a l'habitude de désigner les ensembles par des majuscules, tandis que les éléments d'un ensemble se notent par des minuscules, mais nous ne suivrons pas toujours cet usage.

De quelle manière définit-on les ensembles ? Il existe deux possibilités :

a) Par la spécification de tous les éléments (par énumération). Par exemple : l'ensemble formé par les nombres 2, 5, 9, 11, 13, 14 ; l'ensemble formé par les mots latins « dux », « infans », « tempus ».

b) Par l'indication d'une propriété caractéristique (par description). Par exemple : l'ensemble des substantifs de la langue roumaine, l'ensemble des phrases correctement construites de la langue allemande, l'ensemble des nombres pairs, l'ensemble des cas de la langue russe.

Un ensemble défini par la spécification de ses éléments est, par là même, formé par un nombre fini d'éléments. Un ensemble défini par l'indication d'une propriété caractéristique peut être fini ou infini. Ainsi, l'ensemble des cas de la langue russe est un ensemble fini ; l'ensemble des nombres pairs est un ensemble infini.

Donc, à l'encontre des ensembles infinis, qui se définissent seulement par description, les ensembles finis se définissent, quelque fois, par l'énumération des éléments, d'autres fois par description. Le fait qu'un certain ensemble fini est défini par l'un des deux procédés et non par l'autre, tient aussi au stade de nos connaissances. Par exemple, l'ensemble formé par les nombres 2, 5, 9, 11, 13, 14 est défini par la spécification de ses éléments. Cependant, dès qu'on a certaines connaissances sur les équations, on se rend compte qu'on peut définir l'ensemble ci-dessus aussi de la manière suivante : l'ensemble des racines de l'équation

$$(x-2)(x-5)(x-9)(x-11)(x-13)(x-14)=0\,.$$

Inversement, certains ensembles définis par une propriété caractéristique peuvent être définis aussi par énumération. Tel est l'ensemble des cas de la langue roumaine, qui peut être défini ainsi : {*nominatif*, *génitif*, *datif*, *accusatif*, *vocatif*}. (Nous aurons l'habitude de noter l'ensemble des éléments $a, b, \ldots, m, n$ par $\{a, b, \ldots, m, n\}$).

Un autre exemple : Considérons l'ensemble suivant de morphèmes latins (dans le sens approximatif de séquences significatives minimales) : $\{us, i, o, um, e, orum, is, os\}$. Cet ensemble est défini par la spécification de ses éléments. Cependant si l'on fait la liaison entre cet ensemble et la flexion du mot « lupus », on se rend compte que l'ensemble peut être aussi défini de la manière suivante : l'ensemble des morphènes afixales qui interviennent dans la flexion du mot « lupus ».

La définition d'un ensemble à l'aide d'une propriété caractéristique est, dans un certain sens, supérieure, du point de vue scientifique, à la définition par énumération, car elle ne se contente pas de ce qui apparaît à première vue, mais relève quelque chose de l'essence commune des éléments de l'ensemble.

La définition d'un ensemble par une propriété caractéristique de ses éléments peut être faite, d'habitude, de plusieurs manières, car il est possible que différentes propriétés conduisent au même ensemble. Par exemple 1, 2, 3, 4, 5 est d'une part, l'ensemble des nombres naturels plus petits que 6, et d'autre part, l'ensemble des restes qui s'obtiennent en divisant par 6 les nombres naturels plus grands que 6 et qui ne sont pas multiples de 6.

De même, l'ensemble des morphèmes *us, i, o, um, e, orum, is, os* est aussi l'ensemble des affixes qui apparaissent dans la flexion du mot « servus ». Cela nous conduit à l'idée que « lupus » et « servus » doivent être groupés ensemble du point de vue de leur flexion ; donc, la définition d'un ensemble par des propriétés caractéristiques donne la possibilité d'une organisation de plus en plus générale, de plus en plus abstraite, de plus en plus simplifiée.

Lorsqu'on définit un ensemble par une propriété, on doit tenir compte du fait que cette propriété fonctionne comme un tamis. Pour chaque objet on doit pouvoir répondre à la question : a-t-il ou non la propriété en question ? L'objet appartient ou non à l'ensemble selon que la réponse est affirmative ou négative. Si la propriété considérée est de telle nature que pour certains objets on ne peut pas préciser la réponse, alors cette propriété n'est pas capable de définir un ensemble. Par exemple, si pour certains mots nous ne sommes pas en mesure de préciser s'ils sont des adjectifs ou adjectifs numéraux, alors on ne peut pas parler de « l'ensemble des adjectifs ». Cette constatation a une conséquence fondamentale en ce qui concerne les perspectives d'application de la théorie des ensembles à la linguistique. Cette application est utile dès que les précisions dont nous avons parlé ci-dessus sont préalablement faites.

On peut considérer des ensembles formés d'un seul élément ; par exemple, l'ensemble formé de l'unique élément a. On désigne cet ensemble par $\{a\}$. Nous définirons, de même, l'*ensemble vide*, c'est-à-dire l'ensemble qui ne contient aucun élément ; on le note $\varnothing$ ou 0.

On peut considérer des ensembles dont les éléments sont à leur tour des ensembles. Par exemple, on peut considérer l'ensemble de toutes les sphères ; mais une sphère est à son tour un ensemble, l'ensemble de tous les points qui se trouvent à distance donnée par rapport à un point donné.

Prenons un autre exemple. En partant des traits acoustiques ou des traits articulatoires d'un son de la langue, on sélectionne, par un procédé décrit minutieusement dans le chapitre II, ce qu'on appelle les traits pertinents du point de vue de leur fonction linguistique ; la totalité de ces derniers constitue un *phonème*. Ainsi, le phonème roumain P contient seulement une partie des traits du son P. On peut considérer l'ensemble des phonèmes P, F, R de la langue roumaine, mais chacun de ces phonèmes est, à son tour, comme on l'a vu, un ensemble. On a ainsi :

$P = \{$ *occlusif, sourd, bilabial* $\}$, $F = \{$ *fricatif, sourd, labiodental* $\}$,
$R = \{$ *vibratif, neutre, médio-palatal* $\}$.

3. Opposition privative et opposition zéro

Soit un ensemble X. Dans ce qui suit, nous supposerons que tous les ensembles considérés sont formés par des éléments de X. X sera l'*ensemble de base*.

Soient A et B deux ensembles. Supposons qu'on ait la situation suivante :

« Si $a \in A$, alors $a \in B$ ».

Dans ce cas, on dit que l'ensemble A est *contenu* ou *inclus* dans l'ensemble B, et la relation correspondante qui s'établit entre A et B s'appelle relation d'inclusion et se note par $\subseteq$.

Donc :

$$A \subseteq B \tag{1}$$

On dit que A est un sous-ensemble ou une partie de l'ensemble B.

Prenons un exemple. Soient X = l'ensemble des catégories morphologiques, $A = \{$*nombre, cas*$\}$, $B = \{$*nombre, cas, genre, degré de comparaison*$\}$. On a $A \subseteq B$, car les deux éléments de A appartiennent aussi à B. Cette relation d'inclusion a une signification linguistique, si on se rapporte, par exemple à la langue russe. On peut convenir que A représente le substantif et B l'adjectif. Nous observons que l'ensemble B n'est pas inclus dans l'ensemble A, car certains éléments de B n'appartiennent pas à A. On écrit cela de la manière suivante :

$$B \nsubseteq A\,. \tag{2}$$

Chaque fois que sont réalisées les conditions (1) et (2), nous disons que l'ensemble A est *strictement inclus* ou *strictement contenu* dans l'ensemble B et on écrira

$$A \subset B\,. \tag{3}$$

Au lieu de dire que A est strictement inclus dans B, on peut encore s'exprimer ainsi : La relation — ou l'opposition — entre A et B est *privative au détriment de A* ou *privative en faveur de B*. Par exemple, l'opposition entre substantif et adjectif est privative en faveur de l'adjectif.

On peut représenter suggestivement la relation d'inclusion stricte entre A et B, de la façon suivante (Fig. 1).

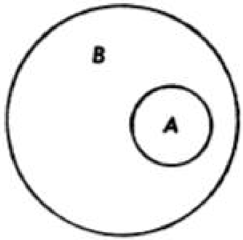


FIG. 1.

Nous avons la propriété suivante :

Si l'opposition entre A et B est privative en faveur de B, et si l'opposition entre B et C est privative en faveur de C, alors l'opposition entre A et C est privative en faveur de C.

Démonstration. Nous avons, par hypothèse, $A \subset B$ et $B \subset C$ et nous devons démontrer que $A \subset C$. Soit $a \in A$. De $A \subset B$ il résulte que $a \in B$; de $B \subset C$ il résulte que $a \in C$, donc $A \subseteq C$. D'autre part, $C \nsubseteq B$ entraîne l'existence d'un élément c tel que $c \in C$, mais $c \notin B$. De la dernière relation et du fait que $A \subset B$ il résulte que $c \notin A$, donc il existe un élément qui appartient à C sans appartenir à A. Cela signifie que $C \nsubseteq A$, par conséquent $A \subset C$. La démonstration est terminée.

Soient deux ensembles A et B tels que la relation (1) est vérifiée, mais non la relation (3). Dans ce cas nous dirons que les ensembles A et B sont égaux et nous écrirons :

$$A = B . \tag{4}$$

La relation d'égalité entre deux ensembles s'appelle encore *opposition zéro*. Elle se représente ainsi :

$$A = B .$$

Exemple. Soient A = l'ensemble des consonnes sifflantes de la langue roumaine, et B = l'ensemble des consonnes de la langue roumaine qui sont en même temps sifflantes et médio-palatales. On a $A = \{ \check{S}, \check{Z} \}$, $B = \{ \check{S}, \check{Z} \}$, donc $A = B$. Cela est dû au fait que, dans la langue roumaine, toute consonne sifflante est, de manière obligatoire, médio-palatale.

4. Opérations sur les ensembles

Nous nommerons la *réunion* de deux ensembles A et B l'ensemble C défini de la manière suivante : un élément de X (l'ensemble fondamental) appartient à C si et seulement si cet élément appartient au moins à l'un des ensembles A et B.

L'opération de réunion se note par le signe $\cup$. Nous avons donc

$$C = A \cup B .$$

Etant donné que la définition de l'ensemble réunion est symétrique par rapport aux deux termes A et B, nous avons

$$A \cup B = B \cup A .$$

C'est la propriété de commutativité de la réunion.

Exemple 1. $X = \{ a, b, c, d, e, f \}$, $A = \{ a, b, c, d, e \}$, $B = \{ a, d, e, f \}$, $C = \{ a \}$, $D = \{ f \}$. On a : $A \cup B = \{ a, b, c, d, e, f \}$, $A \cup C = \{ a, b, c, d, e \}$, $C \cup D = \{ a, f \}$.

Exemple 2. X = l'ensemble des substantifs, A = l'ensemble des substantifs qui n'ont pas de singulier, B = l'ensemble des substantifs qui n'ont pas de pluriel. $A \cup B$ = l'ensemble des substantifs défectifs quant au nombre.

Exemple 3. X = l'ensemble des consonnes de la langue roumaine, A = l'ensemble des consonnes sourdes, B = l'ensemble des consonnes occlusives, $A \cup B$ = l'ensemble des consonnes sourdes ou occlusives = $\{ P, F, T, S, \check{S}, R, M, B, N, D, G \}$ (P est aussi bien sourde qu'occlusive, F est sourde mais n'est pas occlusive, G est occlusive mais n'est pas sourde).

Nous appellerons *intersection* ou *partie commune* de deux ensembles A et B l'ensemble D défini de la manière suivante : un élément de X appartient à D si et seulement si cet élément appartient aussi bien à A qu'à B. L'opération d'intersection se note par $\cap$. Nous avons donc

$$D = A \cap B .$$

Etant donné que la définition de l'intersection est symétrique par rapport aux deux termes, A et B, nous avons :

$$A \cap B = B \cap A ,$$

qui est la propriété de *commutatitivité* de l'intersection.

Exemple 1. $X = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$, $A = \{ 1, 2, 3 \}$, $B = \{ 2, 3, 4, 5 \}$. $A \cap B = \{ 2, 3 \}$.

Exemple 2. X = l'ensemble des substantifs et des verbes : A = l'ensemble des mots de X susceptibles de deux valeurs de nombre ; B = l'ensemble des mots de X susceptibles de valeurs casuelles ; $A \cap B$ = l'ensemble des substantifs qui ne sont ni des singularia tantum, ni des pluralia tantum.

Exemple 3. A = l'ensemble des catégories morphologiques du substantif français, B = l'ensemble des catégories morphologiques du verbe français, $A \cap B = \{ \text{nombre} \}$.

Observation. Les opérations de réunion et d'intersection s'étendent à plus de deux ensembles de la manière suivante. Etant donnée une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles, on dit que l'ensemble A est leur réunion et on écrit

$$A = \bigcup_{E \in \mathcal{F}} E \qquad \text{ou} \qquad A = \bigcup_{E \in \mathcal{F}} E$$

si dans A se trouvent exactement les éléments appartenant au moins à l'un des ensembles de $\mathcal{F}$.

On appellera *différence* de deux ensembles A et B l'ensemble E, défini ainsi : un élément de X appartient à E si et seulement s'il appartient à A, mais n'appartient pas à B. L'opération de prise de la différence se note par le signe $-$. Nous avons donc :

$$E = A - B .$$

Exemple 1. $A = \{ a, b, d, h \}$, $B = \{ b, d \}$, $A - B = \{ a, h \}$.

Exemple 2. $A =$ l'ensemble des phrases qui ont du sens, $B =$ l'ensemble des phrases qui n'ont pas de sens, $A - B =$ l'ensemble des phrases qui ont du sens $= A$.

Exemple 3. $A =$ l'ensemble des verbes roumains suivants : « a lucra », « a mînca », « a umbla » ; $B =$ l'ensemble des verbes qui ont à la 3ᵉ personne indicatif, présent, singulier la même forme qu'à la 3ᵉ personne indicatif, présent, pluriel ; $A - B = 0$.

La différence $X - B$ s'appelle le *complémentaire* de l'ensemble B. Nous allons le noter par $\overline{B}$ ou par $\complement(B)$. (Dans le chapitre V, la notation $\overline{B}$ prendra d'autres acceptions).

Exemple 1. $X =$ l'ensemble des consonnes, $B =$ l'ensemble des consonnes sourdes, $\overline{B} =$ l'ensemble des consonnes sonores ou neutres.

Exemple 2. $X =$ l'ensemble des mots, $B =$ l'ensemble des mots qui ne sont pas susceptibles de valeurs de temps, $\overline{B} =$ l'ensemble des verbes.

Exemple 3. $X =$ l'ensemble des voyelles pures de la langue française $(= \{ a, e, i, o, u, y \})$; $B = \{ a, i, o \}$; $\overline{B} = \{ e, u, y \}$.

5. Oppositions équipollentes et oppositions disjonctives

Soient A et B deux ensembles. En dehors des relations d'inclusion stricte et d'égalité, que nous avons étudiées antérieurement, on peut encore considérer les types de relations suivants :

1) Si $A \neq 0$, $B \neq 0$, $A \nsubseteq B$, $B \nsubseteq A$ et $A \cap B \neq 0$, alors on dit que les ensembles A et B sont en *relation d'équipollence* ou qu'ils déterminent une *oppo-*

sition équipollente. Cette relation est représentée d'une manière suggestive par le schéma suivant (Fig. 2).

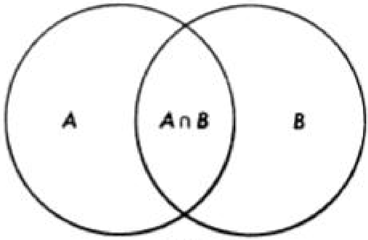


FIG. 2.

Exemple 1. $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, $B = \{ 4, 5, 6 \}$, $A \cap B = \{ 4, 5 \}$, $B \nsubseteq A$, car $B - A = \{ 6 \} \neq 0$, $A \nsubseteq B$, car $A - B = \{ 1, 2, 3 \} \neq 0$.

Exemple 2. X = l'ensemble des catégories morphologiques. $A = \{$ *nombre*, *genre*, *cas*, *degré de comparaison* $\}$, $B = \{$ *nombre*, *personne*, *temps*, *mode*, *diathèse*, *aspect* $\}$, $A \cap B = \{$ *nombre* $\}$, $B \nsubseteq A$, puisque $B - A = \{$ *personne*, *temps*, *mode*, *diathèse*, *aspect* $\}$, $A \nsubseteq B$, vu que $A - B = \{$ *genre*, *cas*, *degré de comparaison* $\} \neq 0$. A et B sont donc en opposition équipollente. En fait, c'est l'opposition entre adjectif et verbe, en langue roumaine.

Exemple 3. X = l'ensemble des valeurs morphologiques (morphèmes au sens de Hjelmslev [12], [13] et sèmes au sens de Skalička [27]). $A = \{$ *singulier*, *nominatif*, *déterminé* $\}$, $B = \{$ *pluriel*, *nominatif*, *déterminé* $\}$, $A \cap B = \{$ *nominatif*, *déterminé* $\}$, $A - B = \{$ *singulier* $\}$, $B - A = \{$ *pluriel* $\}$. L'opposition entre les ensembles A et B généralise et synthétise l'opposition entre *la maison* et *les maisons*, entre *le cahier* et *les cahiers*, entre *l'homme* et *les hommes*, etc. C'est une opposition équipollente.

2) Si $A \neq 0$, $B \neq 0$ et $A \cap B = 0$, on dit que A et B sont *disjoints* ou bien qu'ils sont en *relation de disjonction*. On peut encore dire que l'opposition entre A et B est *disjonctive*. Certains auteurs appellent l'opposition disjonctive *relation d'extériorité* (par exemple, J. Cantineau [4]). Cette relation est représentée d'une manière suggestive par le schéma suivant (Fig. 3).

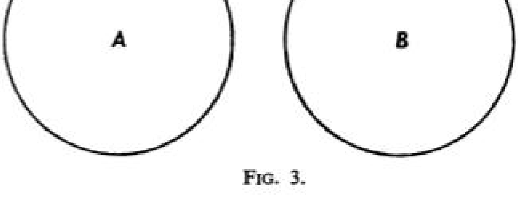


FIG. 3.

Exemple 1. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{f, h\}$, $A \cap B = 0$.

Exemple 2. A = l'ensemble des consonnes labiales, B = l'ensemble des consonnes dentales ; $A \cap B = 0$.

Exemple 3. A = { *singulier*, 1re *personne*, *présent*, *indicatif*, *voix active* }, B = { *pluriel*, 3e *personne*, *parfait*, *subjonctif*, *voix passive* }, $A \cap B = 0$.

A et B sont, ici, ce que nous avons appelé dans [18] *grammatèmes* et dans [19] *combinaisons saturées de valeurs*.

6. Le schéma des types d'oppositions

D'après ce qui résulte des considérations faites jusqu'à présent, tout type d'opposition entre deux ensembles A et B peut être caractérisé à l'aide de trois ensembles : $A - B$, $B - A$ et $A \cap B$. En effet, une opposition est privative si et seulement si l'un et seulement un des ensembles $A - B$, $B - A$ est vide. Une opposition est équipollente si et seulement si $A \cap B \neq 0$, $A - B \neq 0$, $B - A \neq 0$. Enfin, une opposition est disjonctive si et seulement si $A - B \neq 0$, $B - A \neq 0$ et $A \cap B = 0$. On a donc le tableau suivant :

A	B	$A - B$	$B - A$	$A \cap B$	Type d'opposition
		0	$\neq 0$	A	privative en faveur de B
		$\neq 0$	0	B	privative en faveur de A
		0	0	$=A=B$	opposition zéro
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	opposition équipollente
$\neq 0$	$\neq 0$	A	B	0	opposition disjonctive

Une opposition (A, B) pour laquelle $A \neq 0 \neq B$, s'appelle *opposition propre* ; dans le cas contraire elle s'appelle *impropre*.

Il est facile de voir qu'une opposition impropre est ou bien opposition zéro, ou opposition privative. Une opposition équipollente ou disjonctive est toujours propre.

7. Base et ensembles différentiels d'une opposition

Les ensembles A et B s'appellent les *termes* de l'opposition.

L'ensemble $A \cap B$ s'appelle la *base* de l'opposition entre A et B. $A - B$ et $B - A$ s'appellent les *ensembles différentiels* de l'opposition entre A et B.

On peut donc dire que l'opposition privative se caractérise par le fait qu'un et seulement un des ensembles différentiels est vide. L'opposition zéro se caractérise par le fait que les deux ensembles différentiels sont vides. L'opposition équipollente a lieu entre deux ensembles non vides et se caractérise par le fait que aussi bien la base que les ensembles différentiels sont non vides. L'opposition disjonctive a lieu entre deux ensembles non vides et se caractérise par le fait que la base est vide.

Les types d'oppositions que nous venons de décrire sont issus de la classification des oppositions linguistiques de N. S. Troubetzkoy [29].

Les oppositions sont intéressantes lorsqu'elles se manifestent entre ensembles qui se ressemblent en quelque mesure, donc qui ont certains éléments communs. La ressemblance totale trivialise l'opposition (par exemple, l'opposition zéro) ; l'absence d'une ressemblance partielle, donc de certains éléments communs, diminue elle aussi l'intérêt de l'étude de l'opposition (par exemple, l'opposition disjonctive).

Ainsi, il est plus intéressant d'étudier l'opposition entre les ensembles $A = \{$ *sourd*, *dental*, *fricatif* $\}$ et $B = \{$ *sonore*, *dental*, *fricatif* $\}$ que l'opposition entre $A = \{$ *sourd*, *dental*, *fricatif* $\}$ et $C = \{$ *sonore*, *vélaire*, *occlusif* $\}$ vu que la première opposition est à base non vide, tandis que la seconde opposition est à base vide. La première opposition (qui, au fond, est l'opposition entre les phonèmes roumains S et Z) est équipollente, tandis que la seconde opposition (qui revient à l'opposition entre S et G) est disjonctive.

8. Solidarité, sélection, constellation

Il existe une autre manière de concevoir les types d'oppositions entre ensembles, en utilisant la relation d'appartenance d'un élément à un ensemble et la relation d'implication de la logique. On dit que *la proposition P implique la proposition Q*, si, dès que la proposition P est vraie, la proposition Q est aussi vraie. On écrit, dans ce cas, $P \Rightarrow Q$ (P implique Q). Lorsque la relation « $P \Rightarrow Q$ » est fausse, on écrit $P \not\Rightarrow Q$. La situation « $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ » généralise la relation que L. Hjelmslev appelle *relation de solidarité* ou *interdépendance*. La situation « $P \Rightarrow Q$ et $Q \not\Rightarrow P$ » généralise le type de relation que Hjelmslev nomme *relation de sélection ou détermination* ; enfin, la situation « $P \not\Rightarrow Q$ et $Q \not\Rightarrow P$ » généralise le type de relation que Hjelmslev nomme *relation combinatoire* ou *constellation* [11].

Si deux ensembles A et B sont en opposition zéro, par là même la présence d'un élément dans A implique la présence du même élément dans B et réciproquement, la présence d'un élément dans B implique la présence du même élément dans A. Donc l'opposition zéro entre A et B définit une *relation de solidarité* des éléments de A avec les éléments de B : $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$ et $(x \in B) \Rightarrow (x \in A)$. La relation de solidarité s'exerce entre la proposition « $x \in A$ » et la proposition « $x \in B$ ». Si A et B sont en opposition privative en faveur de B, la présence d'un élément dans A implique la présence du même élément dans B ; c'est ce que nous allons exprimer en disant que les éléments de A remplissent une fonction *sélective* par rapport à B ou bien que les éléments de A se trouvent en *relation de sélection* avec certains éléments de B. Les éléments de A sont appelés *éléments sélectants* ; les mêmes éléments considérés en tant qu'éléments de B, sont appelés *éléments sélectés*. Entre la proposition $(x \in A)$ et la proposition $(x \in B)$ il existe une relation de sélectivité : $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$, mais $(x \in B) \not\Rightarrow (x \in A)$.

Si A et B sont en opposition équipollente ou disjonctive, entre la proposition $(x \in A)$ et la proposition $(x \in B)$ il existe une relation combinatoire, car $(x \in A) \not\Rightarrow (x \in B)$ et $(x \in B) \not\Rightarrow (x \in A)$.

Enfin, si A et B sont en opposition disjonctive, alors entre la proposition « $x \in A$ » et la proposition « $x \notin B$ » a lieu une relation de sélection. Une relation de sélection a lieu aussi, dans ce cas, entre la proposision « $x \in B$ » et la proposition « $x \notin A$ ». En effet, nous avons : $(x \in A) \Rightarrow (x \notin B)$, mais $(x \notin B) \not\Rightarrow (x \in A)$; $(x \in B) \Rightarrow (x \notin A)$, mais $(x \notin A) \not\Rightarrow (x \in B)$.

On trouve aussi chez Paul L. Garvin [9] la notion de sélection sous le nom de dépendance.

Comme on le voit, les types d'oppositions introduits par Trubetzkoy peuvent être exprimés à l'aide des types de relations considérés par Hjelmslev ; une sorte de réciproque a lieu, à savoir : soient deux propositions P et Q, relatives à des éléments d'un même ensemble T. Notons par $P(x)$ le fait que la proposition P est vraie pour l'élément $x \in T$; notons par $Q(x)$ le fait que la proposition Q est vraie pour $x \in T$. La relation de solidarité entre P et Q correspond à l'opposition zéro entre les ensembles $\{ x ; P(x) \}$ et $\{ x ; Q(x) \}$. La relation de sélection entre P et Q revient à l'opposition privative entre les ensembles $\{ x ; P(x) \}$ et $\{ x ; Q(x) \}$. La relation de combinaison entre P et Q correspond à l'opposition équipollente ou disjonctive entre les ensembles $\{ x ; P(x) \}$ et $\{ x ; Q(x) \}$.

9. Oppositions sur un ensemble

Dans ce qui suit, nous allons noter l'opposition entre deux ensembles A et B de la manière suivante : (A/B). Une opposition entre deux ensembles est une paire ordonnée d'ensembles. Il faut donc faire la distinction entre l'opposition (A/B) et l'opposition (B/A).

Considérons un ensemble $\mathscr{A}$ dont les éléments sont des oppositions. Si ces oppositions s'exercent entre ensembles qui sont des éléments d'un ensemble Ω, nous dirons que $\mathscr{A}$ est un ensemble d'oppositions sur Ω. $\mathscr{A}$ pourrait être, par exemple, la totalité des oppositions qui sont établies, dans une certaine langue, entre les ensembles de traits différentiels phonologiques (dans ce cas nous noterons $\mathscr{A}$ par $\mathscr{A}_\rho$) ; $\mathscr{A}$ pourrait encore être la totalité des oppositions qui s'établissent, dans une certaine langue, entre les ensembles de traits différentiels morphologiques, c'est-à-dire de morphèmes au sens de Hjelmslev (dans ce cas nous noterons $\mathscr{A}$ par $\mathscr{A}_m$).

10. Oppositions proportionnelles

Soient (A_1/B_1) et (A_2/B_2) deux éléments de $\mathscr{A}$. On dira que l'opposition (A_1/B_1) est *proportionnelle* à l'opposition (A_2/B_2) et on écrira

$$(A_1/B_1) \sim (A_2/B_2),$$

si $A_1 - B_1 = A_2 - B_2$ et $B_1 - A_1 = B_2 - A_2$; donc deux oppositions proportionnelles ont les mêmes ensembles différentiels.

Exemple 1. Les éléments de $\mathscr{A}$ sont des oppositions entre ensembles finis de couleurs. $A_1 = \{$ *rouge, noir, jaune, bleu* $\}$, $B_1 = \{$ *vert, noir, violet, jaune* $\}$, $A_2 = \{$ *rouge, bleu, blanc, orange* $\}$, $B_2 = \{$ *blanc, orange, vert, violet* $\}$. Nous avons $A_1 - B_1 = \{$ *rouge, bleu* $\} = A_2 - B_2$,

$$B_1 - A_1 = \{ \textit{vert, violet} \} = B_2 - A_2 .$$

Donc l'opposition (A_1/B_1) est proportionnelle à l'opposition (A_2/B_2).

Exemple 2. $\mathscr{A} = \mathscr{A}_m$, $A_1 = \{$ *singulier, nominatif, déterminé* $\}$ $B_1 = \{$ *pluriel, nominatif, déterminé* $\}$, $A_2 = \{$ *singulier, génitif, déterminé* $\}$, $B_2 = \{$ *pluriel, génitif, déterminé* $\}$. Nous avons $A_1 - B_1 =$ *singulier* $= A_2 - B_2$, $B_1 - A_1 =$ *pluriel* $= B_2 - A_2$. Donc l'opposition (A_1/B_1) est proportionnelle à l'opposition (A_2/B_2).

Exemple 3. $\mathscr{A} = \mathscr{A}_p$. $A_1 = \{$ *fricatif, sourd, dental* $\}$, $B_1 = \{$ *fricatif, sonore, dental* $\}$, $A_2 = \{$ *occlusif, sourd, dentale* $\}$, $B_2 = \{$ *occlusif, sonore, dental* $\}$. Nous avons $A_1 - B_1 = \{$ *sourd* $\} = A_2 - B_2$,

$$B_1 - A_1 = \{ \textit{sonore} \} = B_2 - A_2.$$

Donc l'opposition (A_1/B_1) est proportionnelle à l'opposition (A_2/B_2). On peut donc dire que l'opposition entre les phonèmes roumains S et Z est proportionnelle avec l'opposition entre T et D.

Exemple 4. Dans la langue allemande, les phonèmes P, B, T, D, K et G présentent les oppositions proportionnelles deux par deux

$$(P/B) \sim (T/D) \sim (K/G),$$

les traits différentiels étants toujours « sourd » et « sonore ».

Considérant aussi les phonèmes M et N, nous avons les relations de proportionnalité suivantes : $(B/D) \sim (P/T) \sim (M/N)$, $(B/M) \sim (D/N)$.

11. Oppositions isolées

Une opposition de $\mathscr{A}$ qui n'est proportionnelle à aucune autre opposition de $\mathscr{A}$, est, par définition, *une proposition isolée dans* $\mathscr{A}$. L'intérêt scientifique de ces oppositions est incomparablement plus petit que celui des oppositions proportionnelles.

Exemple 1. $\mathscr{A} = \mathscr{A}_p$. $A = \{$ *continue*, *neutre*, *latérale* $\}$, $B = \{$ *fricative*, *neutre*, *antéro-palatale* $\}$. L'opposition entre A et B (en langue roumaine, l'opposition entre la consonne L et la semi-consonne Y) est isolée dans $\mathscr{A}_p$, car il n'existe pas en langue roumaine de consonne latérale autre que L et ni de consonne antéro-palatale autre que Y.

Exemple 2. L'opposition entre les phonèmes allemands P et S est isolée.

On distingue deux types d'oppositions non isolées : celles de première espèce et celles de deuxième espèce. Soit (A/B) une opposition non isolée. On dit que (A/B) est non isolée de *première espèce* s'il existe une suite finie d'ensembles $A_1, ..., A_n$, telle que $A = A_1$, $B = A_n$ et les oppositions (A_i/A_{i+1}) $(i = 1, ..., n-1)$ soient, toutes isolées. Le plus petit nombre n de termes jouissant des propriétés ci-dessus est, par définition, le *degré de non-isolation* de l'opposition (A/B). Toute opposition non isolée qui n'est pas de première espèce est, par définition, *non isolée* de *deuxième espèce*.

12. Oppositions proportionnelles à gauche et à droite

On dira que deux oppositions (A_1/B_1) et (A_2/B_2) sont proportionnelles à gauche si $A_1 - B_1 = A_2 - B_2$.

Exemple 1. $A_1 = \{$ *rouge*, *jaune*, *vert* $\}$, $B_1 = \{$ *rouge*, *jaune*, *blanc* $\}$, $A_2 = \{$ *rouge*, *jaune*, *vert* $\}$, $B_2 = \{$ *rouge*, *jaune*, *violet* $\}$.

On a $A_1 - B_1 = \{$ *vert* $\} = A_2 - B_2$. Donc (A_1/B_1) est proportionnelle à gauche avec (A_2/B_2). Mais (A_1/B_1) n'est pas proportionnelle avec (A_2/B_2), car $B_1 - A_1 = \{$ *blanc* $\} \neq \{$ *violet* $\} = B_2 - A_2$.

Exemple 2. $A_1 = \{$ *singulier*, *nominatif*, *déterminé* $\}$, $B_1 = \{$ *singulier*, *génitif*, *déterminé* $\}$, $A_2 = \{$ *pluriel*, *nominatif*, *non déterminé* $\}$, $B_2 = \{$ *pluriel*, *accusatif*, *non déterminé* $\}$. Nous avons $A_1 - B_1 = \{$ *nominatif* $\} = A_2 - B_2$. Mais (A_1/B_1) n'est pas proportionnelle à (A_2/B_2), car $B_1 - A_1 = \{$ *génitif* $\} \neq \{$ *accusatif* $\} = B_2 - A_2$. A_1, B_1, A_2 et B_2 sont ici des ensembles de morphèmes au sens de L. Hjelmslev [11], [12], [13].

PROPOSITION 1. *Si (A_1/B_1) est privative en faveur de A_1, et (A_2/B_2) privative en faveur de A_2 et si (A_1/B_1) est proportionnelle à gauche à (A_2/B_2), alors (A_1/B_1) est proportionnelle avec (A_2/B_2).*

Démonstration. Nous avons, à cause de l'hypothèse de privativité en faveur du premier terme, $B_1 - A_1 = B_2 - A_2 = 0$. D'autre part, à cause de l'hypothèse de proportionnalité à gauche, nous avons $A_1 - B_1 = A_2 - B_2$. Donc (A_1/B_1) est proportionnelle à (A_2/B_2).

PROPOSITION 2. *Si (A_1/B_1) et (A_2/B_2) sont privatives au détriment du premier terme, alors elles sont proportionnelles à gauche.*

Démonstration. En effet, nous avons $A_1 - B_1 = A_2 - B_2 = 0$.

PROPOSITION 3. *Si (A_1/B_1) est proportionnelle à gauche à (A_2/B_2) et si (A_2/B_2) est privative au détriment de A_2, alors (A_1/B_1) est privative au détriment de A_1.*

Démonstration. Nous avons, à cause de l'hypothèse, $A_1 - B_1 = A_2 - B_2$ et $A_2 - B_2 = 0$, donc $A_1 - B_1 = 0$.

On peut définir d'une manière analogue les oppositions proportionnelles à droite, (A_1/B_1) est proportionnelle à droite à (A_2/B_2) si $B_1 - A_1 = B_2 - A_2$.

Exemple. $A_1 = \{$ *singulier, nominatif, déterminé* $\}$, $B_1 = \{$ *singulier, génitif, déterminé* $\}$, $A_2 = \{$ *pluriel, datif, non déterminé* $\}$, $B_2 = \{$ *pluriel, génitif, non déterminé* $\}$. On a $B_1 - A_1 = \{$ *génitif* $\} = B_2 - A_2$, donc (A_1/B_1) est proportionnelle à droite avec (A_2/B_2). Mais l'opposition (A_1/B_1) n'est pas proportionnelle à gauche avec (A_2/B_2), car $A_1 - B_1 = \{$ *nominatif* $\} \neq \{$ *datif* $\} = A_2 - B_2$.

Toutes les propriétés des oppositions proportionnelles à gauche se transposent, par symétrie, aux oppositions proportionnelles à droite. Voici trois énoncés de ce type (la démonstration est laissée au soin du lecteur) :

PROPOSITION 1′. *Si (A_1/B_1) est privative en faveur de B_1 et (A_2/B_2) privative en faveur de B_2 et si (A_1/B_1) est proportionnelle à droite à (A_2/B_2), alors (A_1/B_1) est proportionnelle à (A_2/B_2).*

PROPOSITION 2′. *Si (A_1/B_1) est privative au détriment de B_1 et (A_2/B_2) est privative au détriment de B_2, alors (A_1/B_1) est proportionnelle à droite à (A_2/B_2).*

PROPOSITION 3′. *Si (A_1/B_1) est proportionnelle à droite à (A_2/B_2) et si (A_2/B_2) est privative au détriment de B_2, alors (A_1/B_1) est privative au détriment de B_1.*

PROPOSITION 4. *Si (A_1/B_1) est proportionnelle à gauche (à droite) à (A_2/B_2), alors (B_1/A_1) est proportionnelle à droite (à gauche) à (B_2/A_2).*

Démonstration. Elle découle des définitions de la proportionnalité à gauche et à droite.

13. Invariants de la relation de proportionnalité

Nous allons maintenant chercher à établir des propositions du type suivant : « Si (A_1/B_1) possède la propriété P et si (A_2/B_2) est proportionnelle à (A_1/B_1), alors (A_2/B_2) possède de même la propriété P ». Sur une propriété P qui se trouve dans cette situation on dira que c'est *un invariant de la relation de proportionnalité* ou qu'elle se conserve par proportionnalité.

PROPOSITION 4'. *Si une propriété P est un invariant de la relation de proportionnalité, alors la propriété* « non P » (*c'est-à-dire la propriété obtenue par la négation de P*) *est, de même, un invariant de la relation de proportionnalité.*

Démonstration. On procède par l'absurde. Si « non P » n'était pas invariante, il existerait alors une opposition (A_1/B_1) ne possédant pas la propriété P, mais proportionnelle à une opposition (A_2/B_2) possédant la propriété P. Mais cela contredirait l'hypothèse.

PROPOSITION 5. *Si (A_1/B_1) est proportionnelle à (A_2/B_2) et si (A_2/B_2) est une opposition zéro, alors (A_1/B_1) est, de même, une opposition zéro.*

Démonstration. En effet, de $A_2 = B_2$ et de $A_1 - B_1 = A_2 - B_2 = 0$ il résulte que $A_1 \subseteq B_1$; d'autre part, de $B_1 - A_1 = B_2 - A_2 = 0$ il résulte que $B_1 \subseteq A_1$, donc $A_1 = B_1$.

Observation. Il est facile de montrer que la proposition suivante est vraie elle aussi : Si (A_1/B_1) et (A_2/B_2) sont des oppositions zéro, (A_1/B_1) est proportionnelle à (A_2/B_2). En effet, on a $A_1 - B_1 = A_2 - B_2$, $B_1 - A_1 = B_2 - A_2$.

PROPOSITION 6. *Si (A_1/B_1) est proportionnelle à (A_2/B_2) et si (A_2/B_2) est une opposition disjonctive, alors (A_1/B_1) est soit équipollente, soit disjonctive.*

Démonstration. En effet, on a $A_2 - B_2 = A_2$, $B_2 - A_2 = B_2$, donc $A_1 - B_1 = A_2$, $B_1 - A_1 = B_2$, ce qui entraîne $(A_1 - B_1) \neq 0 \neq (B_1 - A_1)$. d'où *a fortiori* $A_1 \neq 0 \neq B_1$. Donc si (A_1/B_1) n'est pas équipollente, elle est disjonctive.

PROPOSITION 7. *Si (A_1/B_1) est proportionnelle à (A_2/B_2) et si (A_2/B_2) est une opposition équipollente, alors (A_1/B_1) est soit équipollente soit disjonctive.*

Démonstration. On a, à cause de l'hypothèse, $A_1 - B_1 = A_2 - B_2 \neq 0$, $B_1 - A_1 = B_2 - A_2 \neq 0$. Donc, si $A_1 \cap B_1 = 0$, (A_1/B_1) est disjonctive et si $A_1 \cap B_1 \neq 0$, (A_1/B_1) est équipollente.

Les propositions 6 et 7 peuvent être combinées en un énoncé unique :

PROPOSITION 8. *La propriété d'une opposition d'être disjonctive ou équipollente est un invariant de la relation de proportionnalité.*

PROPOSITION 9. *Si (A_1/B_1) est privative au détriment (en faveur) de A_1 et si (A_2/B_2) est proportionnelle à (A_1/B_1), alors (A_2/B_2) est privative au détriment (en faveur) de A_2.*

Démonstration. Soit (A_1/B_1) privative en faveur de A_1, donc $B_1 - A_1 = 0$ et $A_1 - B_1 \neq 0$. Par hypothèse, on a $B_2 - A_2 = B_1 - A_1$, donc $B_2 - A_2 = 0$;

on a, de même, par hypothèse $A_2 - B_2 = A_1 - B_1$, donc $A_2 - B_2 \neq 0$. Il en résulte que (A_2/B_2) est privative en faveur de A_2.

Soit (A_1/B_1) privative en faveur de B_1, donc $A_1 - B_1 = 0$ et $B_1 - A_1 \neq 0$. Par hypothèse, on a $A_2 - B_2 = A_1 - B_1$, donc $A_2 - B_2 = 0$; toujours par hypothèse on a $B_2 - A_2 = B_1 - A_1$, donc $B_2 - A_2 \neq 0$. Il en résulte que (A_2/B_2) est privative en faveur de A_2.

COROLLAIRE. *La propriété d'une opposition d'être privative est un invariant de la relation de proportionnalité.*

PROPOSITION 10. *La propriété d'une opposition d'être équipollente n'est pas un invariant de la relation de proportionnalité.*

Démonstration. Soient $A_1 = \{$ *singulier, nominatif, déterminé* $\}$ $B_1 = \{$ *pluriel, génitif, non déterminé* $\}$, $A_2 = \{$ *singulier, nominatif, déterminé, masculin, comparatif de supériorité* $\}$, $B_2 = \{$ *pluriel, génitif, non déterminé, masculin, comparatif de supériorité* $\}$. On a $A_1 \cap B_1 = 0$, donc (A_1/B_1) est disjonctive. $A_1 - B_1 = \{$ *singulier, nominatif, déterminé* $\} = A_2 - B_2$, $B_1 - A_1 = \{$ *pluriel, génitif, non déterminé* $\} = B_2 - A_2$, donc (A_1/B_1) est proportionnelle à (A_2/B_2). Cependant (A_2/B_2) n'est pas disjonctive, mais équipollente, car $A_2 \cap B_2 = \{$ *masculin, comparatif de supériorité* $\} \neq 0$.

Cette démonstration entraîne aussi le

COROLLAIRE. *La propriété d'une opposition d'être disjonctive n'est pas un invariant de la relation de proportionnalité.*

PROPOSITION 11. *La propriété d'une opposition d'être propre n'est pas un invariant de la relation de proportionnalité.*

Démonstration. Soient $A_1 = \{$ *nominatif* $\}$, $B_1 = \{$ *singulier, nominatif* $\}$, $A_2 = 0$, $B_2 = \{$ *singulier* $\}$. On a $A_1 - B_1 = 0 = A_2 - B_2$, $B_1 = A_1 = \{$ *singulier* $\} = B_2 - A_2$, donc (A_1/B_1) est proportionnelle à (A_2/B_2). Toutefois (A_2/B_2) est impropre, tandis que (A_1/B_1) est propre.

14. Oppositions homogènes et oppositions singulières

On introduira, maintenant, un nouveau type de relation entre oppositions, à savoir, la *relation d'homogénéité*. L'opposition (A_1/B_1) est homogène à l'opposition (A_2/B_2) si $A_1 \cap B_1 = A_2 \cap B_2$, en d'autres mots, si les deux oppositions ont la même base. (A_1/B_1) et (A_2/B_2) forment une *paire homogène*.

Si une opposition (A/B) n'est homogène à aucune autre opposition de $\mathscr{A}$, en dehors de (B/A), on dit alors que (A/B) est une opposition *singulière* dans $\mathscr{A}$.

Exemple 1. $A_1 = \{$ *rouge, jaune* $\}$, $B_1 = \{$ *vert, jaune* $\}$, $A_2 = \{$ *blanc, jaune* $\}$, $B_2 = \{$ *bleu, jaune* $\}$. On a $A_1 \cap B_1 = \{$ *jaune* $\} = A_2 \cap B_2$, donc (A_1/B_1) est homogène à (A_2/B_2).

Exemple 2. $A_1 = \{$ *neutre, bilabial, fricatif* $\}$, $B_1 = \{$ *sourd, labio-dental, fricatif* $\}$, $A_2 = \{$ *sonore, labio-dental, fricatif* $\}$, $B_2 = \{$ *neutre, vélaire, fricatif* $\}$. On a $A_1 \cap B_1 = \{$ *fricatif* $\} = A_2 \cap B_2$, donc (A_1/B_1) est homogène à (A_2/B_2). L'opposition entre les phonèmes roumains W et F est donc homogène à l'opposition entre V et H.

Exemple 3. $A_1 = \{$ *singulier, nominatif, déterminé* $\}$, $B_1 = \{$ *singulier, génitif, non déterminé* $\}$, $A_2 = \{$ *singulier, nominatif, non déterminé* $\}$, $B_2 = \{$ *singulier, génitif, déterminé* $\}$. On a $A_1 \cap B_1 = \{$ *singulier* $\} = A_2 \cap B_2$. (A_1/B_1) est donc homogène à (A_2/B_2).

Exemple 4. $\mathscr{A} = \mathscr{A}_p$. $A = \{$ *occlusif, sourd, vélaire* $\}$, $B = \{$ *occlusif, sonore, vélaire* $\}$. On a $A \cap B = \{$ *occlusif, vélaire* $\}$. En roumain, on ne retrouve cette base dans aucune autre opposition de $\mathscr{A}_p$, donc l'opposition (A/B) (c'est-à-dire l'opposition entre les consonnes K et G) est singulière en $\mathscr{A}_p$.

Exemple 5. $A_1 = \{$ *singulier, nominatif, déterminé* $\}$, $B_1 = \{$ *pluriel, nominatif, déterminé* $\}$, $A_2 = \{$ *singulier, nominatif, déterminé, masculin, comparatif d'infériorité* $\}$, $B_2 = \{$ *pluriel, nominatif, déterminé, féminin, comparatif de supériorité* $\}$. On a $A_1 \cap B_1 = \{$ *nominatif, déterminé* $\} = A_2 \cap B_2$, donc (A_1/B_1) est homogène à (A_2/B_2). Il en résulte que (A_1/B_1) n'est pas singulière en $\mathscr{A}_m$.

Considérons, maintenant, l'ensemble Γ dont les éléments sont des ensembles formés par une valeur de nombre, une valeur casuelle et une valeur de détermination. Γ est donc formé des ensembles de valeurs du substantif roumain. Notons par $\mathscr{A}_{\text{substantif}}$ l'ensemble de toutes les oppositions qui se forment avec les éléments de Γ. L'opposition entre A_1 et A_2, considérée ci-dessus, est singulière en $\mathscr{A}_{\text{substantif}}$, car $A_1 - A_2 = \{$ *singulier* $\}$, $A_2 - A_1 = \{$ *pluriel* $\}$ et il n'existe plus d'autres valeurs de nombre que *singulier* et *pluriel*.

Exemple 6. Dans la langue allemande l'opposition entre les phonèmes T et D est singulière, car ce sont les seules occlusives dentales.

Dans la même langue, l'opposition entre les phonèmes D et B est homogène à l'opposition entre les phonèmes D et G, la base commune de ces oppositions étant l'occlusion faible.

Exemple 7. Dans la langue française, l'opposition entre les phonèmes D et N est singulière.

15. Une classification des oppositions non singulières

Soit (A/B) une opposition non singulière. On dit que (A/B) est *non singulière de première espèce*, s'il existe une suite finie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ telle que $A = A_1$, $B = A_n$ et toutes les oppositions (A_1/A_{i+1}) $(i = 1, \ldots, n-1)$ soient singulières.

Le plus petit nombre n de termes jouissant des propriétés ci-dessus est, par définition, le *degré de non-singularité* de l'opposition (A/B).

Les oppositions non singulières de première espèce sont, à leur tour, de deux sortes : *linéaires*, si la suite $A_1, ..., A_n$ correspondante est uniquement déterminée, et *non linéaire*, dans le cas contraire.

Toute opposition non singulière qui n'est pas de première espèce est, par définition, de *deuxième espèce*.

Exemple 1. En allemand, l'opposition entre les phonèmes x et η est non singulière et linéaire, car x, K, G, η est l'unique suite jouissant des propriétés désirées. Le degré de non-singularité est ici 4.

Exemple 2. En allemand, l'opposition entre les phonèmes U et E est non singulière et non linéaire, car on a les quatre suites suivantes : 1) $U, O, \ddot{O}, E$, 2) $U, \ddot{U}, \ddot{O}, E$, 3) $U, \ddot{U}, \dot{I}, E$, 4) $U, O, A, \ddot{A}, E$ jouissant des propriétés désirées. Le degré de non-singularité est ici 4.

16. Oppositions identiques

On dira que deux oppositions (A_1/B_1) et (A_2/B_2) *coïncident* (ou *sont identiques*) et on écrira $(A_1/B_1) \equiv (A_2/B_2)$ si $A_1 = A_2$ et $B_1 = B_2$.

PROPOSITION 12. *Si (A_1/B_1) est proportionnelle et homogène à (A_2/B_2), alors $(A_1/B_1) \equiv (A_2/B_2)$.*

Démonstration. L'hypothèse de proportionnalité entraîne

$$A_1 - B_1 = A_2 - B_2\,, \quad B_1 - A_1 = B_2 - A_2\,.$$

De l'hypothèse d'homogénéité il résulte $A_1 \cap B_1 = A_2 \cap B_2$. Mais :

$$A_1 = (A_1 \cap B_1) \cup (A_1 - B_1)\,, \quad A_2 = (A_2 \cap B_2) \cup (A_2 - B_2)\,,$$

donc

$$A_1 = (A_2 \cap B_2) \cup (A_2 - B_2) = A_2\,.$$

De même,

$$B_1 = (B_1 \cap A_1) \cup (B_1 - A_1)\,, \quad B_2 = (B_2 \cap A_2) \cup (B_2 - A_2)\,,$$

donc $B_1 = B_2$.

17. Invariants de la relation d'homogénéité

PROPOSITION 13. *Si (A_1/B_1) est impropre ou disjonctive et si (A_2/B_2) est homogène à (A_1/B_1), alors (A_2/B_2) est, de même, impropre ou disjonctive* (en d'autres termes, la propriété d'une opposition d'être impropre ou disjonctive est un invariant de la relation d'homogénéité).

Démonstration. Du fait que (A_1/B_1) est disjonctive, il résulte que

$$A_1 \cap B_1 = 0\,.$$

De l'hypothèse d'homogénéité il résulte que $A_2 \cap B_2 = A_1 \cap B_1$, donc $A_2 \cap B_2 = 0$. Donc, si on n'a pas $A_2 = 0$ ou $B_2 = 0$, (A_2/B_2) est disjonctive.

Du fait que (A_1/B_1) est impropre il résulte que $A_1 = 0$ ou $B_1 = 0$. Soit, pour faire un choix, $A_1 = 0$. On a donc $A_1 \cap B_1 = 0$. Mais (A_2/B_2) est homogène à (A_1/B_1), donc $A_2 \cap B_2 = 0$, donc (A_2/B_2) est soit impropre, soit disjonctive.

PROPOSITION 14. *La propriété d'une opposition d'être privative n'est pas un invariant de la relation d'homogénéité.*

Démonstration. Soient $A_1 = \{\text{nominatif}\}$, $B_1 = \{\text{singulier, nominatif}\}$, $A_2 = \{\text{pluriel, nominatif}\}$, $B_2 = B_1$. On a $A_1 \cap B_1 = \{\text{nominatif}\} = A_2 \cap B_2$, donc (A_1/B_1) est homogène par rapport à (A_2/B_2). Mais (A_1/B_1) est privative, tandis que (A_2/B_2) est équipollente. La démonstration de la proposition 14 prouve aussi la

PROPOSITION 15. *La propriété d'une opposition d'être équipollente n'est pas un invariant de la relation d'homogénéité.*

18. L'indépendance de quelques types d'oppositions et leurs rapports quantitatifs

Considérons les quatre types d'oppositions suivants : 1) singulière et non isolée, 2) singulière et isolée, 3) non isolée et non singulière et 4) isolée et non singulière. L'indépendance logique de ces quatre types est immédiate. En considérant les phonèmes allemands P, B, R, L, T et $\check{S}$, on obtient les exemples illustratifs suivants : type 1 : (P/B) : type 2 : (R/L), type 3 : (P/T) et type 4 : $(P/\check{S})$.

Selon Troubetzkoy [29], dans tout système phonologique les oppositions isolées sont plus nombreuses que les oppositions non isolées. En allemand, parmi les oppositions singulières il y a une prépondérance des oppositions non isolées, tandis que parmi les oppositions non singulières il y a une prépondérance des oppositions isolées. Les oppositions du type 4 ci-dessus sont les plus nombreuses, tandis que les oppositions du type 1 sont les moins nombreuses. Les oppositions du type 3 sont plus nombreuses que celles du type 2.

19. Schéma des invariants

Nous allons réunir en tableau les propriétés invariantes par rapport à la relation de proportionnalité ou par rapport à la relation d'homogénéité. Nous représenterons l'invariance par le signe + et sa négation par le signe −. Les oppositions privatives en faveur du premier terme seront nommées *privatives à gauche*.

TABLEAU 2

Type d'oppositions	Relation de proportionnalité	Relation d'homogénéité
1. Zéro	+	−
2. Propre	−	−
3. Privative	+	−
4. Equipollente	−	−
5. Disjonctive	−	−
6. Equipollente ou disjonctive.	+	−
7. Impropre ou disjonctive ...	−	+
8. Privative à gauche	+	−
9. Privative à droite	+	−

20. Lien avec certaines notions introduites par Troubetzkoy et Cantineau. Caractéristique d'une opposition

Les oppositions qui se trouvent en relation d'homogénéité correspondent à ce que Troubetzkoy appelle « oppositions multilatérales ». Les oppositions singulières correspondent aux oppositions bilatérales de Troubetzkoy. La dénomination d'« opposition multilatérale » est impropre et elle donne naissance à des confusions, car elle cache le fait qu'il n'est pas tellement question d'un type d'opposition, que d'un type de relation entre oppositions.

Les oppositions disjonctives n'ont pas été considérées explicitement par Troubetzkoy. Cet auteur les a englobées dans la classe des oppositions équipollentes, en définissant ces dernières par la condition que les ensembles différentiels soient non vides. Les oppositions disjonctives ont été considérées par Cantineau, qui les a nommées « relations d'extériorité ». Comme nous l'avons déjà dit, Cantineau a proposé d'utiliser le terme de « relation » au lieu de celui d'« opposition ». Il nous paraît plus judicieux d'utiliser tantôt l'un de ces termes, tantôt l'autre, ainsi qu'on l'a remarqué dans le présent paragraphe, où il aurait été fâcheux de dire au lieu de « relation entre oppositions », « relations entre relations » ou « oppositions entre oppositions ».

Les termes d'« opposition privative » et « base d'une opposition » figurent chez Troubetzkoy avec des acceptions similaires aux nôtres.

La réunion des ensembles différentiels d'une opposition correspond à ce que Troubetzkoy appelait « la caractéristique de l'opposition ». Etant donnée une opposition (A/B), la caractéristique est donc $(A - B) \cup (B - A)$. Cette expression formée à partir des ensembles A et B s'appelle, dans la théorie des ensembles, *la différence symétrique* des ensembles A et B et on l'a noté $A \triangle B$. On va adopter aussi, pour l'ensemble $A \triangle B$, la dénomination de *caractéristique* de l'opposition (A/B).

Les notions qui se trouvent au numéro 15 ont leur origine chez Troubetzkoy [29].

Troubetzkoy a considéré, de même, ce qu'il appelle les *oppositions graduelles* mais qui sont, comme l'a observé Cantineau [4], un cas particulier d'oppositions privatives.

Comme le montre le tableau 2, la relation de proportionnalité admet bien plus d'invariants que la relation d'homogénéité. C'est pour cela que la relation de proportionnalité joue un rôle incomparablement plus grand que la relation d'homogénéité. Comme on le voit, le type de l'opposition équipollente et celui de l'opposition disjonctive ne sont pas invariants de la relation de proportionnalité, mais le type qui s'obtient comme somme logique de ces deux types est un tel invariant (ligne 6 du tableau 2). Cela correspond parfaitement à la conception de Troubetzkoy. Troubetzkoy n'a pas considéré les types d'oppositions des lignes 4 et 5 du tableau 2, mais en revanche il a considéré le type d'opposition inscrit à la ligne 6, type qu'il a appelé « opposition équipollente ». Si l'on tient compte encore du fait que cet auteur n'a pas non plus considéré les types d'opposition inscrits dans les lignes 2 et 7, on voit que Troubetzkoy a eu une intuition parfaite du rôle des invariants ; en effet, il n'a considéré que les types d'oppositions invariantes par la relation de proportionnalité, quoiqu'il ne l'ait pas fait de manière consciente et explicite.

21. Traits communs aux relations d'égalité, de proportionnalité et d'homogénéité

Nous allons montrer dans ce qui suit, que certains des types de relations étudiés jusqu'à présent, en dépit de leur variété, se trouvent dans un schéma commun.

Considérons d'abord la relation d'égalité entre ensembles. Tout ensemble A est égal à lui-même : $A = A$. En effet, si $x \in A$, alors $x \in A$, donc $A \subseteq A$, donc $A = A$. On dit que la relation d'égalité est *réflexive*. Si $A = B$, alors $B = A$, car $A = B$ entraîne $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$, donc $B = A$; on dit que la relation d'égalité est *symétrique*. Si $A = B$ et $B = C$, alors $A = C$; en effet, de $A = B$ et $B = C$ résulte $A \subseteq B$ et $B \subseteq C$, d'où il résulte, après, que $A \subseteq C$; d'autre part, de $C = B$ et $B = A$ résulte $C \subseteq B$ et $B \subseteq A$, d'où résulte $C \subseteq A$. De $A \subseteq C$ et $C \subseteq A$ résulte $A = C$. On dit que la relation d'égalité est *transitive*.

Soit maintenant un ensemble $\mathscr{A}$ d'oppositions. Toute opposition (A/B) est proportionnelle à elle-même : $(A/B) \sim (A/B)$. C'est la propriété de réflexivité de la relation de proportionnalité. Si $(A_1/B_1) \sim (A_2/B_2)$, alors

$$(A_2/B_2) \sim (A_1/B_1).$$

En effet, $A_1 - B_1 = A_2 - B_2$ entraîne, à cause de la symétrie de la relation d'égalité, que $A_2 - B_2 = A_1 - B_1$; de $B_1 - A_1 = B_2 - A_2$, il résulte, de nouveau basé sur la symétrie de la relation d'égalité, que $B_2 - A_2 = B_1 - A_1$. On a établi ainsi la propriété de symétrie de la relation de proportionnalité. Enfin, on peut facilement montrer, en utilisant la transitivité de la relation d'égalité, que si $(A_1/B_1) \sim (A_2/B_2)$, et $(A_2/B_2) \sim (A_3/B_3)$, alors

$$(A_1/B_1) \sim (A_3/B_3).$$

En effet, de $A_1 - B_1 = A_2 - B_2$ et $A_2 - B_2 = A_3 - B_3$, il résulte

$$A_1 - B_1 = A_3 - B_3 ;$$

de $B_1 - A_1 = B_2 - A_2$ et $B_2 - A_2 = B_3 - A_3$, il résulte $B_1 - A_1 = B_3 - A_3$. On a établi ainsi la propriété de transitivité de la relation de proportionnalité.

On peut montrer, par une méthode semblable à celle que nous venons d'exposer, que la relation d'homogénéité entre oppositions jouit de propriétés semblables : toute opposition est homogène à elle-même ; si (A_1/B_1) est homogène par rapport à (A_2/B_2), alors (A_2/B_2) est homogène par rapport à (A_1/B_1) ; si (A_1/B_1) est homogène par rapport à (A_2/B_2) et (A_2/B_2) est homogène par rapport à (A_3/B_3), alors (A_1/B_1) est homogène par rapport à (A_3/B_3).

22. Définition de la relation d'équivalence

On peut combiner les trois propriétés que nous venons de mettre en évidence pour la relation d'égalité, la relation de proportionnalité et la relation d'homogénéité, ce qui donne les considérations synthétiques suivantes :

Soit R une relation définie entre éléments d'un ensemble E. On écrira xRy lorsque et seulement lorsque l'élément x se trouve en relation R avec l'élément y.

Supposons réalisées les trois propriétés suivantes :

1) pour tout $x \in E$ on a xRx (propriété de réflexivité) ;
2) si $x \in E$, $y \in E$ et xRy, alors yRx (propriété de symétrie) ;
3) si $x \in E$, $y \in E$, $z \in E$, xRy et yRz, alors xRz (propriété de transitivité).

Chaque fois qu'une relation R, définie entre éléments d'un ensemble E, possède les propriétés 1), 2) et 3), on dira que R est une *relation d'équivalence* en E. Si xRy, alors on dit que x est *équivalent* à y. A partir de ce que nous venons de démontrer, on peut affirmer que :

— la relation d'égalité est une relation d'équivalence dans tout ensemble d'ensembles ;

— la relation de proportionnalité est une relation d'équivalence dans tout ensemble d'oppositions ;

— la relation d'homogénéité est une relation d'équivalence dans tout ensemble d'oppositions.

23. Théorème fondamental concernant les relations d'équivalence

THÉORÈME 1. *Soit R une relation d'équivalence dans E. L'ensemble E se décompose en un ou plusieurs sous-ensembles, possédant les propriétés suivantes* : 1) *tout élément de E appartient à l'un de ces sous-ensembles et à un seul* ; 2) *si x et y appartiennent au même sous-ensemble, alors xRy* ; *si x et y appartiennent à des sous-ensembles différents, alors x ne se trouve pas en relation R avec l'élément y.*

Démonstration. Posons

$$T(a) = \{ y ; y \in E, aRy \} .$$

La relation R étant réflexive, on a $a \in T(a)$ pour $a \in E$, donc $E = \bigcup_{a \in E} T(a)$. Pour $x \in T(a)$, $y \in T(a)$, on a, en vertu de la symétrie et de la transitivité de R, xRy. Or, si $a \in E$ et $b \in E$, on a soit $T(a) = T(b)$, soit $T(a) \cap T(b) = 0$. En effet, si $T(a) \cap T(b) \neq 0$, alors il existe un élément $x \in T(a) \cap T(b)$ et, en vertu de la définition des ensembles $T(a)$ et $T(b)$, on a aRx et bRx.

Soit maintenant un élément quelconque $y \in T(a)$; on a donc aRy. La relation R étant symétrique et transitive, les formules bRx, aRx et aRy donnent tout de suite bRy, ce qui prouve que $y \in T(b)$. On a donc $T(a) \subseteq T(b)$. On démontre pareillement que $T(b) \subseteq T(a)$, donc $T(a) = T(b)$. Il s'ensuit que $T(a) \cap T(b) \neq 0$ si et seulement si $T(a) = T(b)$. Le théorème 1 est ainsi démontré.

24. Classes d'équivalence. Classes d'oppositions proportionnelles et classes d'oppositions homogènes

Les sous-ensembles de E qui figurent dans le théorème ci-dessus s'appellent *classes d'équivalence*. Une classe d'équivalence par rapport à la relation R est, par définition, formée de la totalité des éléments de E, équivalents à un élément donné. Afin de mettre en évidence le fait que ces classes dépendent du choix de la relation R, on peut les appeler classes de *R-équivalence*. Dans le cas particulier où E est un ensemble d'oppositions et R est la relation de proportionnalité, les classes d'équivalence seront appelées *classes d'oppositions proportionnelles* ou, pour abréger, *classes de proportionnalité*. Si R est la relation d'homogénéité, on obtient des *classes d'oppositions homogènes*, ou, pour abréger, *classes d'homogénéité*. Du théorème ci-dessus, il résulte qu'une opposition appartient à une seule classe de proportionnalité et à une seule classe d'homogénéité. En tenant compte du fait que deux oppositions distinctes ne peuvent être en même temps proportionnelles et homogènes, on voit qu'une opposition est complètement déterminée par l'indication de la classe de proportionnalité et de la classe d'homogénéité à laquelle appartient cette opposition (proposition 12 ci-dessus).

Il est intéressant de déterminer en quoi consiste non seulement la ressemblance des oppositions qui entrent dans la même classe de proportionnalité, mais aussi leur différence. C'est l'objet des propositions 16 et 17.

25. Structure des classes de proportionnalité

PROPOSITION 16. *Si l'opposition* (A_1/B_1) *est proportionnelle à l'opposition* (A_2/B_2), *on se trouve alors dans l'une des deux situations suivantes* :

1) $A_1 = A_2, B_1 = B_2$; 2) $A_1 \neq A_2, B_1 \neq B_2$.

Démonstration. La situation 1) se présente lorsque les deux oppositions coïncident. On démontrera que, chaque fois que les oppositions ne coïncident pas, se présente la situation 2). En effet, considérons deux oppositions proportionnelles, ayant le même ensemble A comme premier terme ;

$$(A/B_1) \sim (A/B_2)\,.$$

On a donc

$$A - B_1 = A - B_2 \tag{1}$$

$$B_1 - A = B_2 - A\,. \tag{2}$$

De (1) il résulte que $A - (A - B_1) = A - (A - B_2)$. Mais

$$A - (A - B_1) = B_1 \cap A\,,$$

$A - (A - B_2) = B_2 \cap A$, donc

$$B_1 \cap A = B_2 \cap A\,. \tag{3}$$

Puisque on a

$$B_1 = (B_1 - A) \cup (B_1 \cap A), \quad B_2 = (B_2 - A) \cup (B_2 \cap A),$$

il résulte, de (2) et (3), que $B_1 = B_2$.

Donc, il n'est pas possible que deux oppositions proportionnelles diffèrent par un terme sans différer aussi par l'autre terme.

PROPOSITION 17. *Un ensemble ne peut participer à deux oppositions distinctes, proportionnelles entre elles.*

Démonstration. Ce qui est neuf dans cette proposition par rapport à la précédente, consiste dans le fait que $(A/B_1) \sim (B_2/A)$ entraîne $B_1 = B_2$. Pour démontrer cette implication, écrivons explicitement la relation de proportionnalité. On a :

$$A - B_1 = B_2 - A,$$
$$B_1 - A = A - B_2.$$

Ces relations sont possibles seulement si

$$A - B_1 = B_2 - A = B_1 - A = A - B_2 = 0;$$

en effet, si l'une de ces différences, par exemple $A - B_1$, était non vide, de $x \in A - B_1$ résulterait $x \in A$, donc $x \notin B_2 - A$, en contradiction avec la première relation. On a donc $A = B_1 = B_2$ et la proposition est démontrée.

26. Corrélations. Chaînes d'oppositions homogènes

Les notions de « classe d'oppositions proportionnelles » et « classe d'oppositions homogènes » précisent et synthétisent certaines notions considérées par Troubetzkoy, par exemple la notion de *corrélation* (= classe d'oppositions proportionnelles et privatives) ou bien celle de *série d'oppositions proportionnelles*, ainsi que certaines notions considérées par Cantineau, comme celle de *chaîne d'oppositions homogènes.*

Les théorèmes concernant l'invariance de certains types d'oppositions par la relation de proportionnalité ou celle d'homogénéité peuvent être exprimés maintenant de la manière suivante (voir tableau 2) :

Si une classe de proportionnalité contient une opposition privative, alors toute opposition de cette classe est privative ; si une classe de proportionnalité contient une opposition zéro, alors toute opposition de cette classe est une opposition zéro ; si une classe de proportionnalité contient une opposition équipollente ou disjonctive, alors toute opposition de cette classe est équipollente ou disjonctive et ainsi de suite.

Il résulte donc que, parmi les différentes classes de proportionnalité, les plus intéressantes sont justement celles formées par les oppositions ayant une structure invariante par rapport à la relation de proportionnalité. Conformément au tableau 2, celles-ci sont : *a*) la classe d'oppositions zéro ; *b*) les classes d'oppositions privatives ; *c*) les classes d'oppositions équipollentes ou disjonctives ; *d*) les classes d'oppositions privatives à gauche ; *e*) les classes d'oppositions privatives à droite.

27. Généralisation de la notion de corrélation

Il semble ainsi qu'il y a autant de raisons d'attribuer une existence indépendante aux classes des types *a*), *c*), *d*), *e*) qu'à celles du type *b*) auxquelles Troubetzkoy, qui les a appelées *corrélations*, a accordé une attention particulière. Ce fait n'a pu passer inaperçu ; André Martinet a, par la suite, étendu le terme de corrélation à des classes de proportionnalité du type *c*) [21]. (Tout comme Troubetzkoy, Martinet utilise le terme « équipollent » pour désigner ce que nous appelons « équipollent ou disjonctif »). En ce qui concerne les classes de proportionnalité du type *a*), elles ont un caractère banal, non seulement parce qu'elles sont formées par des oppositions zéro, mais aussi du fait que deux oppositions zéro sont toujours proportionnelles entre elles, donc toutes les oppositions zéro forment une seule classe de proportionnalité.

En ce qui concerne les classes du type *d*) ou *e*), elles n'ont pas été considérées explicitement par les linguistes.

En étendant la définition de Martinet, mais en conservant intacte l'idée de cette définition, on appellera *corrélation* toute classe de proportionnalité du type *a*), *b*), *c*), *d*) ou *e*). Plus généralement, une corrélation est une classe de proportionnalité formée d'oppositions ayant une structure invariante par rapport à la relation de proportionnalité. Dans cette acception, tout type d'opposition invariant par la relation de proportionnalité engendre un type de corrélation. Les corrélations sont donc un cas particulier de classes de proportionnalité, mais c'est justement ce cas particulier qui est le plus intéressant. En effet, des classes de proportionnalité telles que : *f*) les classes d'oppositions propres, *g*) les classes d'oppositions équipollentes, *h*) les classes d'oppositions disjonctives, 1) les classes d'oppositions impropres ou disjonctives, sont formées, comme le montre le tableau 2, d'oppositions de nature non invariante par la relation de proportionnalité. Une classe du type *f*), *g*), *h*) ou *i*) a une composition hétérogène ; la structure interne des oppositions qui la composent ne se conserve pas par la relation de proportionnalité. Par conséquent, leur intérêt scientifique est aussi diminué.

28. Langages et contextes

Soit A un ensemble fini d'éléments nommés *mots*. A est un *vocabulaire*. Considérons l'ensemble $\mathscr{F}(A)$ des suites finies d'éléments de A (un même élément de A pouvant avoir plusieurs occurrences dans une telle suite) ; $\mathscr{F}(A)$, muni de l'opération associative de composition est ce qu'on appelle le *monoïde libre engendré par A* ou, encore, le *demi-groupe libre à générateurs dans A*. Toute partie $L \subseteq \mathscr{F}(A)$ est, par définition, un *langage* sur le vocabulaire A. En particulier, $\mathscr{F}(A)$ est le *langage universel* sur A, tandis que 0 est le *langage vide*. Les éléments de $\mathscr{F}(A)$ sont des *phrases*. Parmi les phrases de $\mathscr{F}(A)$ il y a aussi la *phrase vide*, notée 0, θ ou ω et jouissant de la propriété $0x = x0 = x$ pour toute $x \in \mathscr{F}(A)$.

Toute paire ordonnée $\{x, y\}$, où $x \in \mathscr{F}(A)$ et $y \in \mathscr{F}(A)$, est par définition un *contexte* sur A. Si $z \in \mathscr{F}(A)$ et $xzy \in L$, alors on dit que z est *admis dans L, par le contexte* $\{x, y\}$ ou que $\{x, y\}$ est un contexte de z par rapport à L.

Exemple 1. Si A est le vocabulaire de la langue française, alors l'ensemble de toutes les phrases qui apparaissent dans l'œuvre d'Anatole France est un langage sur A. $\mathscr{F}(A)$ est ici formé par toutes les séquences finies de mots français ; par exemple, la séquence « vous je donnons écartaient » est un élément de $\mathscr{F}(A)$.

Exemple 2. Si A est l'ensemble des lettres de l'alphabet latin, alors les mots latins forment un langage L sur A. Un contexte par rapport à L est, par exemple, $\{op, ido\}$. La lettre p est admise par ce contexte, tandis que la lettre s ne l'est pas. En effet, le mot *oppido* existe en latin mais le mot *opsido* n'existe pas. Toutefois, *opsido* est un élément de $\mathscr{F}(A)$.

Exemple 3. Soit

$$A = \{a, b, c\}, \quad L = \{aca, abcab, abbcabb, \ldots, a\underbrace{bb \ldots b}_{n \text{ fois}}ca\underbrace{bb \ldots b}_{n \text{ fois}}, \ldots\}.$$

Ce langage a été étudié par Haskell B. Curry [7] ; si l'on interprète a comme zéro, b comme l'opérateur de succession et c comme la relation d'égalité, alors la suite de terme général $abb \ldots b$ est justement la suite des nombres naturels, tandis que les éléments de L sont les égalités vraies entre nombres naturels. Si l'on suppose maintenant que les propositions mathématiques (vraies ou fausses) ont été exprimées sous formes d'égalités (vraies ou fausses) entre nombres entiers positifs, alors L peut être interprété comme l'ensemble des théorèmes. L'élément c est admis, dans L, par le contexte $\{a\underbrace{b \ldots b}_{m \text{ fois}}, a\underbrace{b \ldots b}_{n \text{ fois}}\}$ si et seulement si $m = n$.

29. Classes de distribution au sens large et classes de distribution au sens restreint

Soit X l'ensemble des contextes sur un vocabulaire donné A et soit L un langage sur A. Associons à chaque phrase $x \in \mathscr{F}(A)$ une certaine partie de X, à savoir l'ensemble $\mathscr{C}(x)$ des contextes de x relatifs à L. Introduisons maintenant une relation binaire ρ_L dans $\mathscr{F}(A)$, définie de la façon suivante : pour $x \in \mathscr{F}(A)$,

$y \in \mathscr{F}(A)$ on a $x \rho_L y$ si $\mathscr{C}(x) = \mathscr{C}(y)$. Il est évident que ρ_L est une relation d'équivalence dans $\mathscr{F}(A)$. Les classes de ρ_L-équivalence dans $\mathscr{F}(A)$ sont, par définition, les *classes de distribution au sens large* relatives à L.

Considérons la restriction de la relation ρ_L à l'ensemble A ; cette restriction est une relation binaire λ_L définie dans A et il est aisé de voir que λ_L est une relation d'équivalence dans A. Les classes de λ_L-équivalence seront, par définition, les *classes de distribution au sens restreint* relatives à L ou, plus simplement, les *classes de distribution* relatives à L. S'il n'y a aucune ambiguïté concernant le langage envisagé, alors on peut renoncer aux mots « relatives à L ».

En désignant, pour chaque $a \in A$, par $F(a)$ la classe de distribution au sens large, contenant le mot a, et par $S(a)$ la classe de distribution contenant le mot a, on a $S(a) \subseteq F(a)$. Donc si $a \lambda_L b$, on a aussi $a \rho_L b$.

L'origine de la notion de classe de distribution se trouve dans la linguistique descriptive [10], [8] et, dans sa forme plus précise, elle a été considérée par O. S. Kulagina ; c'est la notion de famille de [15]. Intuitivement, la classe de distribution au sens large d'une phrase x est formée de toutes les phrases apparaissant, dans le langage considéré L, dans les mêmes contextes (entourages) que x. La classe de distribution d'un mot a est formée de tous les mots ayant, dans L, exactement les contextes du mot a.

Exemple 1. Si A est le vocabulaire du français écrit et si L est l'ensemble des phrases françaises écrites, correctement construites, alors les mots « différent », « nul », « légal », « beau », « bref », « muet », « bon », « mou », « caduc », « blanc », « long », « malin » appartiennent, tous, à la même classe de distribution. Mais « heureux » n'est pas dans la même classe de distribution que « différent », car la phrase « Voici deux hommes heureux » appartient au français, tandis que la phrase « Voici deux hommes différent » n'appartient pas au français.

Exemple 2. A et L ayant les mêmes significations que ci-dessus, on constate que les mots « analytique » et « maigre » appartiennent à la même classe de distribution, tandis que « maigre » et « doux » n'appartiennent pas à la même classe de distribution. En effet, la phrase « une femme maigre » appartient au français, tandis que la phrase « une femme doux » n'appartient pas au français.

Exemple 3. Si A est le vocabulaire de l'anglais et si L est l'ensemble des phrases anglaises correctement construites, alors les phrases « very well » et « very very well » appartiennent à la même classe de distribution au sens large.

30. Les classes de distribution au sens large comme classes de congruence

PROPOSITION 18. *Si $x_1 \rho_L x_2$ et $y_1 \rho_L y_2$, alors on a $x_1 y_1 \rho_L x_2 y_2$.*

Démonstration. On doit montrer que pour toute paire de phrases $u \in \mathscr{F}(A)$,

$v \in \mathscr{F}(A)$ telles que $ux_1 y_1 v \in L$ on a aussi $ux_2 y_2 v \in L$. Mais du fait que $x_1 \rho_L x_2$ on déduit $ux_2 y_1 v \in L$ et, en tenant compte que $y_1 \rho_L y_2$, on déduit $ux_2 y_2 v \in L$. Pour des raisons de symétrie, on a aussi l'implication

$$ux_2 y_2 v \in L \Rightarrow ux_1 y_1 v \in L\,,$$

donc $x_1 y_1 \rho_L x_2 y_2$.

Nous allons établir maintenant une relation entre les classes de ρ_L-équivalence, d'une part, et certaines notions utilisées dans la théorie des automates finis, d'autre part [23].

Soit R une relation d'équivalence dans $\mathscr{F}(A)$. Par définition, R est *invariante à droite* si pour $x \in \mathscr{F}(A)$, $y \in \mathscr{F}(A)$, $z \in \mathscr{F}(A)$ et xRy on a $xzRyz$. Par définition, R est *invariante à gauche* si pour $x \in \mathscr{F}(A)$, $y \in \mathscr{F}(A)$, $z \in \mathscr{F}(A)$ *et* xRy on a $zxRzy$. Par définition, R est une *relation de congruence* dans $\mathscr{F}(A)$ si R est invariante à droite et à gauche.

PROPOSITION 19. *Soit R une relation d'équivalence dans $\mathscr{F}(A)$. R est une relation de congruence dans $\mathscr{F}(A)$ si et seulement si, pour $x \in \mathscr{F}(A)$, $y \in \mathscr{F}(A)$, $z \in \mathscr{F}(A)$, $w \in \mathscr{F}(A)$, xRz et yRw on a $xyRzw$.*

Démonstration. Soit R une relation de congruence dans $\mathscr{F}(A)$ et soient $x \in \mathscr{F}(A)$, $y \in \mathscr{F}(A)$, $z \in \mathscr{F}(A)$, $w \in \mathscr{F}(A)$, xRz et yRw. En vertu de l'invariance à droite de R on a $xyRzy$. En vertu de l'invariance à gauche de R et du fait que yRw, on déduit $zyRzw$. En vertu de la transitivité de R on a $xyRzw$.

Supposons maintenant que pour $x \in \mathscr{F}(A)$, $y \in \mathscr{F}(A)$, $z \in \mathscr{F}(A)$, $w \in \mathscr{F}(A)$, xRz et yRw on ait $xyRzw$ et montrons que R est invariante à droite et à gauche. En effet, pour $w = y$ on obtient l'invariance à droite, tandis que pour $z = x$ on obtient l'invariance à gauche. La proposition 19 est ainsi démontrée.

COROLLAIRE. *La relation ρ_L est une relation de congruence dans $\mathscr{F}(A)$.*

Démonstration. Il suffit de tenir compte des propositions 18 et 19 ci-dessus.

Remarque. L'importance linguistique de la proposition 18 tient au fait qu'elle permet d'obtenir des phrases ρ_L-équivalentes dès qu'on connaît des mots λ_L-équivalents. Pour donner un seul exemple, du fait qu'en français écrit on a « capitaine » λ_L « garçon » et « gras » λ_L « vieux » on déduit, en vertu de la proposition 18, qu'on a « gras capitaine » ρ_L « vieux garçon ».

31. Classes de distribution des adjectifs qualificatifs français

Pour illustrer la notion de classe de distribution, nous donnons la répartition de certains adjectifs qualificatifs français en classes de distribution. On prend donc A = le vocabulaire de la langue française, L = l'ensemble des phrases françaises écrites correctement construites.

1. S (différent) = { différent, nul, légal, beau, bon, ... }
2. S (heureux) = { heureux, épais, faux, vieux, frais, ... }
3. S (analytique) = { analytique, maigre, ... }
4. S (différents) = { différents, cruels, nouveaux, ... }
5. S (différente) = { différente, heureuse, diverse, grasse, ... }
6. S (différentes) = { différentes, heureuses, françaises, ... }
7. S (analytiques) = { analytiques, maigres, larges, ... }
8. S (kaki) = { kaki, ... }

Ces classes peuvent être caractérisées de la manière suivante. Désignons par M_s la forme du masculin singulier, par M_p la forme du masculin pluriel, par F_s la forme du féminin singulier, par F_p la forme du féminin pluriel. La première classe contient les adjectifs qui se trouvent à la forme M_s et tels que M_s, M_p, F_s, F_p soient différentes deux à deux. La deuxième classe contient les adjectifs qui se trouvent à la forme M_s et tels que $M_s = M_p \neq F_s \neq F_p$. La troisième classe contient les adjectifs qui se trouvent à la forme M_s et tels que

$$M_s = F_s \neq M_p = F_p .$$

La quatrième classe contient les adjectifs qui se trouvent à la forme M_p et tels que M_s, M_p, F_s et F_p soient différentes deux à deux. La cinquième classe contient :

les adjectifs qui se trouvent à la forme F_s et tels que M_s, F_s, M_p, F_p soient différentes deux à deux ;

les adjectifs qui se trouvent à la forme F_s et tels que $M_s = M_p \neq F_s \neq F_p$. La sixième classe contient : les adjectifs qui se trouvent à la forme F_p et tels que

$$M_s = M_p \neq F_s \neq F_p ;$$

les adjectifs qui se trouvent à la forme F_p et tels que M_s, F_s, M_p, F_p soient différentes deux à deux. La septième classe contient les adjectifs qui se trouvent à la forme F_p et tels que $M_s = F_s \neq F_p = M_p$. La huitième classe contient les adjectifs invariables ($M_s = F_s = M_p = F_p$).

32. Classes de distribution des adjectifs qualificatifs roumains sans article

Nous allons maintenant déterminer douze classes de distribution qui épuisent ce que l'on comprend d'habitude par « les adjectifs qualificatifs roumains sans article ».

1. S (înalt) = { înalt, frumos, corect, mic, nou, folositor, ... }
2. S (frumoasă) = { frumoasă, înaltă, mică, nouă, jună, veche, ... }
3. S (frumoşi) = { frumoşi, corecţi, precoci, folositori, juni, ... }

4. S (înalte) = { înalte, frumoase, groase, ... }
5. S (vechi) = { vechi, căprui,... }
6. S (precoce) = { precoce, feroce, ... }
7. S (greoi) = { greoi, dibaci, ... }
8. S (subţire) = { subţire, mare, moale, verde, ... }
9. S (greoaie) = { greoaie, folositoare, marmoree, ... }
10. S (subţiri) = { subţiri, mari, mici, obligatorii, muncitoreşti, ... }
11. S (june) = { june, ... }
12. S (maro) = { maro, cumsecade, ... }.

Parmi les 15 types d'adjectifs théoriquement possibles, 9 seulement sont réalisés, et si l'on considère aussi les formes archaïques ou régionales, probablement d'autres types apparaissent encore, par exemple celui défini par $M_p = F_s = F_p \neq M_s$. A l'exception de ces derniers et du type

$$M_s = F_p \neq M_p \neq F_s$$

(june = june ≠ juni ≠ jună), les types d'adjectifs de la langue roumaine ont été établis dans [16]. Dans ce paragraphe on fera abstraction des formes archaïques ou régionales (voir aussi [17]).

La première classe de distribution est composée de trois types d'adjectifs, à savoir :

α) les adjectifs qui se trouvent à la forme M_s et pour lesquels M_s, M_p, F_s et F_p ont distinctes deux à deux (înalt, frumos, corect, ...) ;

β) les adjectifs qui se trouvent à la forme M_s et pour lesquels

$$M_s \neq F_s \neq M_p = F_p \qquad \text{(mic, nou, ...)}$$

γ) adjectifs qui se trouvent à la forme M_s et pour lesquels

$$M_s \neq M_p \neq F_p = F_s \qquad \text{(folositor, sclipitor, ...)} .$$

La seconde classe de distribution est formée de quatre types d'adjectifs, à savoir :

α) les adjectifs qui se trouvent à la forme F_s et pour lesquels M_s, M_p, F_s et F_p sont distinctes deux à deux (frumoasă, înaltă, corectă, ...) ;

β) les adjectifs qui se trouvent à la forme F_s et pour lesquels

$$M_s \neq F_s \neq M_p = F_p \qquad \text{(mică, nouă, cenuşie, ...)} ;$$

γ) les adjectifs qui se trouvent à la forme F_s et pour lesquels

$$M_s = F_p \neq M_p \neq F_s \qquad \text{(jună, ...)} ;$$

δ) les adjectifs qui se trouvent à la forme F_s et pour lesquels

$$M_s = M_p = F_p \neq F_s \qquad \text{(veche, căpruie, ...)} .$$

La troisième classe de distribution est formée de quatre types d'adjectifs à savoir :

α) les adjectifs qui se trouvent à la forme M_p et pour lesquels M_s, M_p, F_s et F_p sont distinctes deux à deux (frumoşi, corecţi, buni, ...) ;

β) les adjectifs qui se trouvent à la forme M_p et pour lesquels

$$M_s = F_s = F_p \neq M_p \qquad \text{(precoci, feroci, ...) ;}$$

γ) les adjectifs qui se trouvent à la forme M_p et pour lesquels

$$M_s \neq M_p \neq F_s = F_p \qquad \text{(folositori, sclipitori, ...) ;}$$

δ) les adjectifs qui se trouvent à la forme M_p et pour lesquels

$$M_s = F_p \neq M_p \neq F_s \qquad \text{(juni, ...) .}$$

La quatrième classe de distribution est formée d'un seul type d'adjectifs, à savoir d'adjectifs qui se trouvent à la forme F_p et pour lesquels M_s, M_p, F_s et F_p sont distinctes deux à deux (frumoase, bune, albe, ...).

La cinquième classe de distribution est formée d'un seul type d'adjectifs, à savoir ceux qui se trouvent à la forme M_s et pour lesquels

$$M_s = M_p = F_p \neq F_s \qquad \text{(vechi, căprui, ...) .}$$

La sixième classe de distribution est formée d'un seul type d'adjectifs, à savoir ceux qui se trouvent à la forme M_s et pour lesquels $M_s = F_s = F_p \neq M_p$ (precoce, feroce, ...).

La septième classe de distribution est formée d'un seul type, à savoir ceux qui se trouvent à la forme M_s et pour lesquels $M_s = M_p \neq F_s = F_p$ (greoi, dibaci, ...).

La huitième classe de distribution est formée d'un seul type d'adjectifs, à savoir ceux qui se trouvent à la forme M_s et pour lesquels $M_s = F_s \neq M_p = F_p$ (subţire, mare, rece, ...).

La neuvième classe de distribution est formée de deux types d'adjectifs, à savoir :

α) Les adjectifs qui se trouvent à la forme F_s et pour lesquels

$$M_s = M_p \neq F_s = F_p \qquad \text{(dibace, greoaie, ...) ;}$$

β) les adjectifs qui se trouvent à la forme F_s et pour lesquels

$$M_s \neq M_p \neq F_s = F_p \qquad \text{(folositoare, marmoree, ...).}$$

La dixième classe de distribution est formée de deux types d'adjectifs, à savoir :

α) les adjectifs qui se trouvent à la forme M_p et pour lesquels

$$M_s = F_s \neq M_p = F_p \qquad \text{(subţiri, mari, verzi, ...) ;}$$

β) les adjectifs qui se trouvent à la forme M_p et pour lesquels

$$M_s \neq F_s \neq M_p = F_p \qquad \text{(mici, dragi, noi, ...).}$$

La onzième classe de distribution est formée d'un seul type d'adjectifs, à savoir ceux qui se trouvent à la forme M_s et pour lesquels $M_s = F_p \neq M_p \neq F_s$, (june, ...).

La douzième classe de distribution est formée d'un seul type d'adjectifs, à savoir ceux pour lesquels

$$M_s = F_s = M_p = F_p \qquad \text{(maro, cumsecade, ...).}$$

33. Un schéma commun à trois notions différentes

Voici donc que trois notions linguistiques des plus importantes : les séries d'oppositions proportionnelles, les chaînes d'oppositions homogènes et les classes de distribution, correspondent toutes, à une organisation identique : la décomposition d'un ensemble en classes d'équivalence par rapport à une relation d'équivalence R. Chacune de ces trois notions a une signification linguistique différente, ce qui se manifeste par la manière différente dont on choisit l'ensemble et la relation R. Mais dès qu'on fait abstraction de la nature de l'ensemble et de la relation R, les trois notions deviennent indiscernables. Cette identité d'organisation reflète une partie de ce que certains linguistes appellent la structure invariante de la langue (Voir, par exemple, [28]).

34. Les types de distribution

La notion de distribution est la notion centrale de la linguistique descriptive [2], [14], [10]. Soit A un vocabulaire, L un langage sur A et $x \in \mathscr{F}(A)$. La *classe contextuelle de la phrase* x par rapport à L est, par définition, l'ensemble $\mathscr{C}(x)$ des contextes de x par rapport à L, c'est-à-dire l'ensemble des contextes $\{ u, v \}$ tels que $uxv \in L$. A l'aide des classes contextuelles, on définit (voir le paragraphe 29) la classe de distribution au sens large (ou, simplement : la distribution au sens large) d'une phrase et la classe de distribution (ou, simplement : la distribution) d'un mot. Deux phrases ont la même distribution au sens large si elles ont la même classe contextuelle.

La situation réciproque de deux phrases x et y, du point de vue distributionnel, est décrite par l'opposition entre $\mathscr{C}(x)$ et $\mathscr{C}(y)$. Si cette opposition est disjonctive, c'est-à-dire $\mathscr{C}(x) \cap \mathscr{C}(y) = 0$, alors on dit que x et y se trouvent en *distribution complémentaire*. Dans le cas contraire, on dit que x et y se trouvent en *distribution contrastive*. Il existe trois sortes de distribution contrastive : *distribution identique* (si $\mathscr{C}(x) = \mathscr{C}(y)$) ; *distribution défective* (si $\mathscr{C}(x)$ et $\mathscr{C}(y)$ se trouvent en opposition privative, c'est-à-dire $\mathscr{C}(x) \subset \mathscr{C}(y)$ ou bien $\mathscr{C}(y) \subset \mathscr{C}(x)$) et *distribution équipollente* (si $\mathscr{C}(x)$ et $\mathscr{C}(y)$ se trouvent en opposition équipollente, c'est-à-dire $\mathscr{C}(x) \cap \mathscr{C}(y) \neq 0$, $\mathscr{C}(x) - \mathscr{C}(y) \neq 0$ et $\mathscr{C}(y) - \mathscr{C}(x) \neq 0$). La distribution défective est en faveur de x si l'opposition entre $\mathscr{C}(x)$ et $\mathscr{C}(y)$ est privative en faveur de $\mathscr{C}(x)$, c'est-à-dire

$$\mathscr{C}(y) \subset \mathscr{C}(x).$$

Si x et y sont en distribution complémentaire ou si le seul contexte commun à x et y est le contexte vide, alors on dit que x et y se trouvent en *distribution complémentaire au sens faible*. Dans le cas contraire, x et y se trouvent en *distribution contrastive au sens fort*, qui est à son tour de trois sortes : *identique au sens fort*, *défective au sens fort* et *équipollente au sens fort*.

35. Illustration des types de distribution

Soient A = le vocabulaire de la langue française écrite, L = l'ensemble des phrases françaises écrites, correctement construites. Les mots *bleu* et *cruel* sont en distribution identique au sens fort. Les mots *méchant* et *jaloux* se trouvent en distribution défective au sens fort en faveur de *jaloux*, car on a $\mathscr{C}$ (*méchant*) $\subset$ $\mathscr{C}$ (*jaloux*) (on peut écrire *enfants jaloux*, mais pas *enfants méchant*). Les mots *jaloux* et *maigres* se trouvent en distribution équipollente au sens fort ; en effet, on a $\{$ *hommes*, $0 \} \in \mathscr{C}$ (*jaloux*) $\cap$ $\mathscr{C}$ (*maigres*), $\{$ *enfant*, $0\}$ $\in \mathscr{C}$ (*jaloux*) $-$ $\mathscr{C}$ (*maigres*), $\{$*femmes*, $0 \} \in \mathscr{C}$ (*maigres*) $-$ $\mathscr{C}$ (*jaloux*).

36. Notion d'espace métrique

La distance habituelle entre deux points de l'espace possède les quatre propriétés suivantes : elle est toujours non négative ; elle est nulle si et seulement si les deux points coïncident ; elle est symétrique, c'est-à-dire que sa valeur ne dépend pas de l'ordre des points ; elle satisfait à la règle du triangle, c'est-à-dire que étant donnés trois points P, Q et R, la distance entre P et R ne peut pas dépasser la somme des distances PQ et QR (c'est le théorème élémentaire bien connu, qui affirme que tout côté d'un triangle a une longueur non supérieure à la somme des longueurs des deux autres côtés). Ce sont justement ces quatre propriétés ci-dessus qui sont prises comme définition d'une distance dans un ensemble dont les éléments ont une nature non spécifiée. Soit E un tel ensemble.

Supposons qu'on a associé à chaque couple (x, y) d'éléments de E un nombre réel $d(x, y)$ — fini ou infini — jouissant des propriétés suivantes :

1) $d(x, y) \geqslant 0$;
2) $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$;
3) $d(x, y) = d(y, x)$;
4) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ pour chaque $z \in E$.

Dans ces conditions, d est une *distance* dans E ; le couple $\{ E, d \}$ est un *espace métrique*.

Quel que soit l'ensemble E, il existe toujours une distance dans E. Il suffit de poser $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ et $d(x, y) = 0$ si $x = y$. Parmi les distances — en nombre infini — qu'on peut introduire dans E, on choisit celle qui correspond le mieux à la nature des éléments de E et au problème envisagé.

Soient $x \in E$ et r un nombre réel. La *sphère* $\mathscr{S}(x ; r)$ de *centre* x et de *rayon* r dans l'espace $\{ E, d \}$ est, par définition, l'ensemble des éléments $y \in E$, tels que $d(y, x) < r$.

37. Distance contextuelle

Considérons un vocabulaire A et un langage L sur A. Soient x et y deux phrases quelconques, c'est-à-dire deux éléments de $\mathscr{F}(A)$. Si x et y n'ont pas la même distribution par rapport à L, alors il est intéressant de trouver une mesure de la différence de distribution entre x et y. Afin de trouver une telle mesure, introduisons d'abord la notion suivante. La suite de phrases $z_1, ..., z_i, z_{i+1}, ..., z_n$ est une *chaîne contextuelle* de x à y si les trois conditions suivantes sont remplies : 1) $z_1 = x$; 2) $z_n = y$; 3) pour $i = 1, 2, ..., n - 1$, les phrases z_i et z_{i+1} se trouvent en distribution contrastive au sens fort. Le nombre n est la *longueur* de la chaîne. Admettons l'existence d'une chaîne contextuelle de longueur n, de x à y. Si, en outre, il n'existe aucune chaîne contextuelle de x à y, dont la longueur soit inférieure à n, on dira, par définition, que la *distance contextuelle* entre x et y est égale à $n - 1$. Si pour deux phrases x et y il n'existe aucune chaîne contextuelle de x à y, alors on conviendra de considérer que la distance contextuelle entre x et y est égale à $+ \infty$. Evidemment, toutes ces notions sont relatives à L.

Si l'on remarque maintenant que la distance contextuelle entre x et y est égale à zéro si et seulement si $x = y$, alors on constate que la distance contextuelle est une véritable distance. Sa symétrie est une conséquence immédiate de la définition. Toutefois, en désignant par d la distance envisagée, on a $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$, car une chaîne contextuelle de longueur m, de x à z, et une chaîne contextuelle de longueur n, de z à y, donnent une chaîne contextuelle de longueur $m + n - 1$, de x à y, donc la distance contextuelle entre x et y ne peut pas dépasser la valeur $m + n - 2$. L'ensemble $\mathscr{F}(A)$ devient ainsi un espace métrique, qui sera nommé l'*espace contextuel* associé à L.

38. Structure des sphères dans l'espace contextuel

Etant donnée une phrase x, désignons par $\mathscr{C}^1(x)$ l'ensemble des contextes non vides par lesquels x est admise.

Etant donné un contexte c, désignons par $\mathscr{F}(c)$ l'ensemble des phrases admises par c. Posons $H^0(x) = \{ x \}$. Posons encore

$$H^1(x) = \bigcup_{c \in \mathscr{C}^1(x)} \mathscr{F}(c), \quad \mathscr{C}^2(x) = \bigcup_{u \in H(x)} \mathscr{C}^1(u), \quad H^2(x) = \bigcup_{v \in \mathscr{C}^2(x)} \mathscr{F}(v)$$

et supposons qu'on a défini les ensembles $\mathscr{C}^{n-1}(x)$ et $H^{n-1}(x)$. Dans ces conditions, posons :

$$\mathscr{C}^n(x) = \bigcup_{u \in H^{n-1}(x)} \mathscr{C}^1(u), \quad H^n(x) = \bigcup_{v \in \mathscr{C}^1(x)} \mathscr{F}(v).$$

THÉORÈME 2. *La distance contextuelle entre les phrases x et y est égale à n si et seulement si*

$$y \in H^n(x) - H^{n-1}(x).$$

Démonstration. Il suffit de prouver que $H^n(x)$ contient exactement les phrases y dont la distance contextuelle à la phrase x est inférieure ou égale à n. Procédons par induction. Il est d'abord immédiat que $H^1(x)$ contient exactement les phrases qui se trouvent avec x en distribution contrastive au sens fort. Ce sont justement les phrases y dont la distance contextuelle à x est $\leqslant 1$ ($= 1$ si $y \neq x$, $= 0$ si $y = x$). Admettons maintenant que

$$H^{n-1}(x) = \{ y \,;\, d(y, x) \leqslant n - 1 \} = \mathscr{S}(x \,;\, n).$$

En vertu de la définition de l'ensemble $H^n(x)$, on constate que $y \in H^n(x)$ si et seulement si, il existe une phrase $z \in H^{n-1}(x)$ telle que y et z soient en distribution contrastive au sens fort. En d'autres mots, $y \in H^n(x)$ si et seulement s'il existe $z \in H^{n-1}(x)$ telle que la distance contextuelle entre y et z soit $\leqslant 1$ ($= 0$ seulement si $y \in H^{n-1}(x)$). En vertu de la structure de $H^{n-1}(x)$, on déduit que $H^n(x)$ contient exactement les phrases dont la distance contextuelle à x est $\leqslant n$.

Remarque 1. Du raisonnement ci-dessus on déduit que

$$H^1(x) \subseteq H^2(x) \subseteq \cdots \subseteq H^n(x) \subseteq H^{n+1}(x) \subseteq \cdots$$

Remarque 2. Du théorème 2 on déduit immédiatement que, dans l'espace contextuel, on a

$$\mathscr{S}(x \,;\, r) = H^n(x),$$

où $n < r \leqslant n + 1$. Donc toute sphère revient à un ensemble $H^n(x)$.

39. Quelques exemples d'espaces contextuels

Considérons le vocabulaire $A = \{ \textit{the}, a, \textit{book}, \textit{books}, \textit{three} \}$ et posons $L = \{ \textit{the book}, \textit{the books}, \textit{a book}, \textit{three books} \}$. C'est un fragment très petit de l'anglais, mais qui reflète quelques aspects de sa grammaire. La plus petite chaîne contextuelle de *a* à *three* est la suivante : *a*, *the*, *three*. En effet, *a* et *the* ont le contexte commun (0, *book*), tandis que *the* et *three* ont le contexte commun (0, *books*), mais il n'y a aucun contexte commun pour *a* et *three*. Donc $d\,(a, \textit{three}) = 2$. D'une manière analogue on constate que $d\,(\textit{book}, \textit{books}) = 1$ et $d\,(\textit{book}, \textit{three books}) = +\infty$. On a aussi $d\,(\textit{a book}, \textit{the book}) = +\infty$, car il n'y a aucun contexte non vide commun pour *a book* et *the book*. Il s'ensuit que $\mathscr{S}\,(a\,; 3) = \{ a, \textit{the}, \textit{three} \} = \mathscr{S}\,(a\,; n)$ pour tout $n \geqslant 3$; $\mathscr{S}\,(\textit{book}\,; 2) = \{ \textit{book}, \textit{books} \}$. En vertu du théorème 2 et des remarques correspondantes, on a $H^2\,(a) = \mathscr{S}\,(a\,; 3)$, $H^1\,(\textit{book}) = \mathscr{S}\,(\textit{book}\,; 2)$.

Pour donner un autre exemple, considérons le vocabulaire $A = \{ a, b, n, p, r, t, u \}$ et posons $L = \{ \textit{rar}, \textit{par}, \textit{pat}, \textit{tun}, \textit{bun} \}$. On y reconnaît un ensemble de mots de la langue roumaine, les éléments de A étant des phonèmes de la langue roumaine. Il est aisé de voir que $d(p, r) = d(t, r) = d(b, t) = 1$, $d(p, t) = d(r, b) = 2$, $d(p, b) = 3$.

40. Phrases parasites et phrases semi-marquées par rapport à un langage

Considérons un vocabulaire A. Nous allons distinguer les quatre possibilités suivantes, concernant un langage L sur A :

α) Il existe un entier N tel que, pour $x \in \mathscr{F}(A)$, $y \in \mathscr{F}(A)$, on ait $d(x, y) \leqslant N$; β) Quelles que soient $x \in \mathscr{F}(A)$, $y \in \mathscr{F}(A)$, la distance $d(x, y)$ est finie ; γ) Il existe un entier N tel que, pour $x \in \mathscr{F}(A)$, $y \in \mathscr{F}(A)$, on a $d(x, y) \leqslant N$ ou bien $d(x, y) = +\infty$; δ). On n'a aucune des trois situations précédentes.

Pour comprendre la signification des considérations ci-dessus, il faut remarquer la différence de nature entre certains éléments de $\mathscr{F}(A)$. Les phrases n'appartenant pas à L sont de deux sortes : si une telle phrase z n'est contenue en aucune phrase de L, c'est-à-dire si z n'est admise par aucun contexte relatif à L, alors z sera considérée comme une *phrase parasite par rapport à L*. Dans le cas contraire, z sera considérée comme une *phrase semi-marquée par rapport à L*. Pour donner un exemple, soit $A = \{ a, b \}$ et $L = \{ a, ab, abb, \ldots, ab \ldots b, \ldots \}$.

Toute phrase commençant par b et contenant au moins une fois le mot a, de même que toute phrase finissant par a, de longueur > 1, sont des phrases parasites par rapport à L. Toute phrase ne contenant pas le mot a est une phrase semi-marquée par rapport à L.

Les deux propositions suivantes caractérisent la situation des phrases parasites :

PROPOSITION 20. *Toutes les phrases parasites par rapport à L* (donné, mais arbitraire) *forment une seule classe de distribution au sens large.*

PROPOSITION 21. *Si x est une phrase parasite par rapport à L, alors*

$$d(x, y) = +\infty,$$

pour toute $y \in \mathscr{F}(A)$, $y \neq x$.

Démonstration. Soient x et y deux phrases parasites par rapport à L. L'implication $uxv \in L \Rightarrow uyv \in L$ est vraie d'une façon triviale, car l'appartenance $uxv \in L$ ne se réalise jamais. La proposition 20 est ainsi démontrée.

Soient x parasite et $y \in \mathscr{F}(A)$, $y \neq x$. L'existence d'une chaîne contextuelle $z_1, \ldots, z_n$ de x à y implique une distribution contrastive au sens fort entre x et z_2, donc l'existence d'un contexte non vide où x est admise, ce qui est impossible, car x est parasite.

Les propositions 20 et 21 présentent un caractère assez paradoxal : l'existence d'une phrase parasite introduit toujours des distances contextuelles infinies, même à l'intérieur d'une classe de distribution au sens large.

On constate ainsi que l'existence d'une phrase parasite exclut les situations α et β ci-dessus. Mais il y a des cas où la situation γ a lieu en l'absence des phrases parasites. Ce fait suggère qu'il faut écarter, dans toutes les considérations relatives à L, les phrases parasites par rapport à L.

41. Diamètre contextuel d'un langage

Considérons un langage L sur le vocabulaire A. Posons $\mathscr{H}(L) = L \cup S$, où par S on a désigné l'ensemble des phrases semi-marquées par rapport à L. L'ensemble $\mathscr{H}(L)$ sera, par définition, le *prolongement héréditaire* du langage L. S'il existe un entier N tel que $d(x, y) \leqslant N$ pour $x \in \mathscr{H}(L)$, $y \in \mathscr{H}(L)$ et, pour certaines phrases u, v, $d(u, v) = N$, alors N est, par définition, le *diamètre contextuel au sens large* du langage L et sera noté par $\delta(L)$. Si un tel N n'existe pas, alors on pose $\delta(L) = +\infty$.

En remplaçant — ci-dessus — $\mathscr{H}(L)$ par L, on obtient la définition du *diamètre contextuel* (au sens restreint) du langage L, diamètre noté par $d(L)$. On a, évidemment, $d(L) \leqslant \delta(L)$.

THÉORÈME 3. *Si L est un langage fini contenant au moins deux phrases, alors $d(L) = +\infty$ (donc, à plus forte raison, $\delta(L) = +\infty$).*

Démonstration. Nous allons montrer l'existence de deux phrases de L, dont la distance contextuelle est infinie. Procédons par réduction à l'absurde. Admettons qu'on ait, pour $x \in L$, $y \in L$, $d(x, y) < \infty$. Il s'ensuit que pour toute $x \in L$ il existe une phrase $y_x \in L$, telle que x et y_x soient en distribution contrastive au sens fort par rapport à L. En d'autres mots, il existe un contexte non vide admis par x et par y_x. Soit n le nombre des phrases de L et soit $x_1 \in L$. Soit $\{ u_1, v_1 \}$ un contexte non vide qui admet x_1. Posons $x_2 = u_1\, x_1\, v_1$ (une au moins des phrases u_1, v_1 est non vide). Soit $x_3 = u_2\, x_2\, v_2, x_3 \in L$, où une au moins des phrases u_2, v_2 est non vide. En continuant ce raisonnement, on obtient une suite $x_1, x_2, ..., x_n$ formée de toutes les phrases de L et telle que $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$. Mais il n'existe aucune phrase $y \in L$, qui soit en distribution contrastive au sens fort avec x_n, par rapport à L ; en effet, $\mathscr{C}(x_n)$ est formé d'un seul élément : le contexte vide. On déduit que $d(x_i, x_n) = +\infty$ pour $i \neq n$ et le théorème 3 est démontré.

Remarque. Le théorème 3 montre un aspect incommode des langages finis. Les langages qui présentent une certaine utilité, soit dans la vie sociale, soit en mathématiques, logique ou programmation, sont d'habitude infinis.

L'évaluation du diamètre contextuel au sens large est parfois facilitée par la proposition suivante, dont la démonstration est laissée au soin du lecteur :

PROPOSITION 22. *Si x est une phrase semi-marquée par rapport à L et si y est en distribution identique avec x, par rapport à L, alors y est aussi une phrase semi-marquée par rapport à L.*

Est-il possible qu'on ait $d(L) < \delta(L)$? Une réponse est donnée par le

THÉORÈME 4. *Il existe un langage L tel que* $d(L) = 1$ *et* $\delta(L) = +\infty$.

Démonstration. Soient $A = \{ a \}$ et $L = \{ a^{2n} \}_{1 \leqslant n < \infty}$. Si $x \in L$ et $y \in L$, alors x et y sont en distribution contrastive au sens fort, étant admises par les contextes de la forme $\{ a^{2n}, a^{2n} \}$ $(1 \leqslant n < \infty)$. Donc $d(L) = 1$. D'autre part, si z est une phrase semi-marquée par rapport à L, alors tout contexte $\{ x, y \}$ pour lequel $xzy \in L$ est tel que $x = a^p$, $y = a^q$, $p \neq q$, p et q étant de parité différente. Mais une phrase de L n'est jamais admise par un tel contexte ; il s'ensuit que pour toute $x \in L$ on a $d(z, x) = +\infty$, donc $\delta(L) = \infty$.

Remarque. N. Chomsky a considéré le langage suivant sur le vocabulaire $A = \{ a, b \}$:

$$L_1 = \{ a^n b^n \}_{1 \leqslant n < \infty} \text{ [6]}.$$

En utilisant une variante de la démonstration du théorème 4, on obtient la

PROPOSITION 23. $d(L_1) = 1$ *et* $\delta(L_1) = +\infty$.

Remarque. Il est aisé de voir que, par rapport à L_1, deux phrases sont en distribution contrastive au sens fort si et seulement si ces phrases se trouvent dans la même classe de distribution au sens large.

42. L'espace des contextes

Etant donnés un vocabulaire A et un langage L sur A, nous allons étudier les rapports possibles entre deux contextes, de la façon suivante. Soient c' et c'' deux contextes quelconques. Désignons par $\mathscr{F}(c')$ (resp. $\mathscr{F}(c'')$) l'ensemble des phrases admises par le contexte c' (resp. c''). Si $\mathscr{F}(c') \cap \mathscr{F}(c'') = 0$, alors on dit que les contextes c' et c'' sont *incompatibles*; dans le cas contraire, c' et c'' sont *compatibles*. Il y a trois sortes de compatibilité. Si $\mathscr{F}(c') = \mathscr{F}(c'')$, alors c' et c'' sont *équivalents*. Si $\mathscr{F}(c') \subset \mathscr{F}(c'')$, alors c' est *plus restrictive* que c''. Si les ensembles $\mathscr{F}(c')$ et $\mathscr{F}(c'')$ sont en opposition équipollente, alors c' et c'' sont *non comparables*. On constate ainsi que les rapports mutuels entre deux contextes se ramènent aux divers types d'oppositions.

Il y a aussi des *contextes parasites* par rapport à L ; un contexte c est parasite s'il n'existe aucune phrase admise par c. Par exemple, si L est la langue française, alors le contexte $c = \{$ je mangerons, grandes oiseau $\}$ est parasite, car quelle que soit la phrase x (correcte ou non) formée avec des mots français, la phrase « je mangerons x grandes oiseau » n'appartient pas au français.

Si c' est un contexte parasite, alors c' et c'' sont incompatibles, quel que soit le contexte c''. Les contextes $\{$ une, fenêtre $\}$ et $\{$ une, chaise $\}$ sont équivalents. Le contexte $\{$ 0, tableau $\}$ est plus restrictif que le contexte $\{$ 0, cas $\}$. En effet, toute phrase admise par le premier est admise aussi par le deuxième, mais la réciproque n'est pas vraie, car la phrase « plusieurs cas » est correcte, tandis que la phrase « plusieurs tableau » n'est pas correcte. Les contextes $\{$ heureux, 0 $\}$ et $\{$ maigre, 0 $\}$ sont compatibles, mais non comparables. En effet, le mot « navire » est admis par chacun de ces contextes, mais le mot « garçons » est admis seulement par le premier contexte, tandis que le mot « fortune » est admis seulement par le deuxième contexte.

Etant donnés un vocabulaire A et un langage L sur A, on peut maintenant définir la distance (par rapport à L) entre deux contextes, de la façon suivante. Soient c' et c'' deux contextes quelconques. Une *chaîne* de c' à c'' est une suite finie $c_1, c_2, \ldots, c_n$ de contextes, tels que $c' = c_1$, $c'' = c_n$ et c_i et c_{i+1} (pour $i = 1, \ldots, n - 1$) sont compatibles. Le nombre n est la *longueur* de la chaîne. Le plus petit nombre $n - 1$ tel qu'il existe une chaîne de longueur n, de c' à c'', est, par définition, la *distance entre c' et c''*. Si un tel nombre n'existe pas, alors la distance entre c' et c'' est égale à $+ \infty$.

On vérifie aisément que toutes les propriétés d'une distance sont remplies. L'ensemble des contextes sur L, muni de cette distance, est l'*espace des contextes* associé à L. On peut faire, pour cet espace, une étude analogue à celle de l'espace contextuel (paragraphes 37-41).

43. Fermeture contextuelle

Certains aspects de la dualité des phrases et des contextes ont déjà été mis en évidence par A. Sestier [26]. C'est de son travail [26] que les considérations suivantes tirent leur origine.

Soient un vocabulaire A et un langage L sur A. Pour chaque ensemble E de phrases, désignons par $\mathscr{C}(E)$ l'ensemble des contextes $\{ x, y \}$ tels que $xzy \in L$ pour toute phrase $z \in E$. Désignons maintenant par E_φ l'ensemble des phrases u telles que $xuy \in L$ quel que soit le contexte $\{ x, y \} \in \mathscr{C}(E)$. L'ensemble E_φ sera, par définition, la *fermeture contextuelle* de E. Cette notion, due à Sestier dans le cas particulier où les phrases sont remplacées par des mots, est étroitement liée aux notions distributionnelles étudiées ci-dessus. En effet, si $x \in \mathscr{F}(A)$, alors, en désignant par $E_\varphi(x)$ la fermeture contextuelle de l'ensemble $\{ x \}$, on a le

THÉORÈME 5. *Si x est une phrase non parasite, alors $F(x) \subseteq E_\varphi(x) \subseteq H^1(x)$ et chacune des situations suivantes est possible* :

1° $F(x) = E_\varphi(x) = H^1(x)$; 2° $F(x) = E_\varphi(x) \subset H^1(x)$;
3° $F(x) \subset E_\varphi(x) = H^1(x)$; 4° $F(x) \subset E_\varphi(x) \subset H^1(x)$.

Démonstration. Si $y \in F(x)$, alors on a $\mathscr{C}(x) = \mathscr{C}(y)$, donc y est admise par tout contexte appartenant à $\mathscr{C}(x)$. Il s'ensuit que $y \in E_\varphi(x)$, donc $F(x) \subseteq E_\varphi(x)$. Soit maintenant $z \in E_\varphi(x)$. Il s'ensuit que pour tout contexte $\{ u, v \} \in \mathscr{C}(x)$ on a $uzv \in L$. Du fait que x est non parasite, on peut supposer que l'une au moins des phrases u et v est non vide ; il s'ensuit que x et z se trouvent en distribution contrastive au sens fort, donc $d(x, z) \leqslant 1$, donc $z \in H^1(x)$.

Pour illustrer la situation 1°, soit L de langage universel sur A. On a alors, pour chaque $x \in \mathscr{F}(A)$, $F(x) = \mathscr{F}(A)$ $(= L)$, donc, en vertu des inclusions établies, on a, à plus forte raison,

$$F(x) = E_\varphi(x) = H^1(x) = L .$$

Pour illustrer la situation 2°, nous allons donner un exemple d'une langue naturelle, laissant au soin du lecteur de trouver l'analogue formel de cet exemple.

Soient A = le vocabulaire du français écrit et L = l'ensemble des phrases françaises correctement construites. Si x = *cas*, alors on a

$$F(cas) = E_\varphi\,(cas) \subset H^1\,(cas) .$$

En effet, à cause de sa forme invariable, le substantif *cas* a — dans sa classe de distribution — seulement des substantifs invariables. E_φ (*cas*) contient justement les phrases admises par tous les contextes appartenant à $\mathscr{C}$ (*cas*). Mais les seules phrases de cette nature sont les éléments de F (*cas*). L'ensemble $H^1(x)$ contient toutes les phrases qui se trouvent en distribution contrastive au sens fort avec *cas*. Il s'ensuit que *cahiers* $\in H^1$ (*cas*). Mais *cahiers* $\notin F$ (*cas*), donc E_φ (*cas*) $\subset H^1$ (*cas*).

Pour illustrer la situation 3°, posons

$$A = \{ a, b, c, d \} \qquad \text{et} \qquad L = \{ dcb, acc, bcc, dad, dbd \} .$$

On a $F(a) = \{ a \}$, $E_\varphi(a) = \{ a, b \}$ et $H^1(a) = \{ a, b)$, donc

$$F(a) \subset E_\varphi(a) = H^1(a) .$$

Pour illustrer la situation 4°, soit de nouveau un exemple de la langue française. On a F (*beau*) $\subset E_\varphi$ (*beau*), car *maigre* $\in E_\varphi$ (*beau*) $-$ F (*beau*). On a aussi E_φ (*beau*) $\subset H^1$ (*beau*), car *vieux* $\in H^1$ (*beau*) $-$ E_φ (*beau*).

Passons maintenant à une autre notion tirée de [26]. Etant donné un ensemble $\mathscr{C}$ de contextes sur le vocabulaire A et un langage L sur A, désignons par $H(\mathscr{C})$ l'ensemble des phrases admises par tous les contextes $c \in \mathscr{C}$. Désignons maintenant par $\mathscr{C}_\varphi$ l'ensemble des contextes $\{ u, v \}$ tels que $uxv \in L$ pour toute phrase $x \in H(\mathscr{C})$. L'ensemble $\mathscr{C}_\varphi$ est, par définition, la *fermeture* de $\mathscr{C}$. C'est la notion duale de celle de fermeture contextuelle.

Il faut remarquer, en conclusion, qu'une notion de distance — de caractère contextuel — a été déjà introduite par N. Chomsky, dans sa thèse [5]. Etant données deux phrases x et y, la distance entre x et y est, d'après Chomsky, égale au nombre des contextes communs à x et y, divisé par la somme du nombre des contextes des deux phrases x et y. Mais une telle définition exige une statistique assez difficile à accomplir.

Pour certaines notions traitées dans le présent chapitre voir aussi [20].

OUVRAGES CITÉS

[1] Apostel, J., Mandelbrot, B., et Morf, A., *Logiques, langue, théorie de l'information*. Presses Universitaires de France, Paris, 1957.

[2] Bloch, B., « Phonemic overlapping ». *American Speach* vol. 16, 1941, p. 267-284.

[3] Cantineau, J., « Les oppositions significatives ». *Cahiers Ferdinand de Saussure*, vol. 10, 1952, p. 11-40.

[4] Cantineau, J., « Le classement logique des oppositions ». *Word*, vol. 11, 1955, N° 1, p. 1-9.

[5] Chomsky, N., *Theory of language systems*. Thèse, 1955, p. 129-133.

[6] Chomsky, N., *Syntactic structures*. Mouton & Co., 's-Gravenhage, 1957.

[7] Curry, H. B., « Some logical aspects of grammatical structure ». *Proceed. Symp. Appl. Math.* vol. 12, Structure of language and its mathematical aspects. American Math. Soc. 1961, p. 56-68.

[8] Gleason, H. A. Jr., *An introduction to descriptive linguistics*. New York, 1956.

[9] Garvin, P. L., « Syntactic units and operations ». *Proceedings of the Eighth Intern. Congress of Linguists*. Oslo, 1958, p. 628-632.

[10] Harris, Z. S., *Structural linguistics*. University of Chicago Press, Fifth impression, 1961.

[11] Hjelmslev, L., *Prolegomena to a theory of language*. Baltimore, 1953.

[12] Hjelmslev, L., *Principes de grammaire générale*. Kobenhavn, 1928.

[13] Hjelmslev, L., « Essai d'une théorie des morphèmes ». *Actes du IVe Congrès international des linguistes*. Copenhague, 1938, p. 140-151.

[14] Hockett, C. F., « Problems of morphemic analysis ». *Language*, vol. 23, 1947, p. 321-343.

[15] Kulagina, O. S., « Ob odnom sposobe opredelenija grammatičeskich ponjatii na baze teorri množestv ». *Problemy kibernetiki*, vol. 1, 1958, p. 203-214.

[16] Manoliu, M., « Propuneri pentru o nouă clasificare a flexiunii adjectivelor din limba română ». *Limba română*, 1961, N° 2, p. 117-123.

[17] Marcus, S., « Un criteriu contextual de clasificare a cuvintelor (cu aplicaţie la adjectivele din limba română) ». *Studii şi cercetări lingvistice*, vol. 13, 1962, N° 2, p. 177-189.

[18] Marcus, S., « Teorija grafov, lingvističeskie oppozicii i invariantnaja struktura ». *Problemy strukturnoi lingvistiki*, vol. 1, Moskva, 1962, p. 22-30.

[19] Marcus, S., « Teoretiko-množestvennoe opisanie nekotorych morfologičeskich javlenii ». *Problemy kibernetiki*, vol. 10, 1963, p. 241-250.

[20] Marcus, S., « Logičeskii aspekt lingvističeskich oppozicii ». *Problemy strukturnoi lingvistiki* (sbornik statei), vol. 2, Moskva, 1963, p. 47-74.

[21] Martinet, A., « Rôle de la corrélation dans la Phonologie diachronique ». *Travaux du Cercle linguistique de Prague*, vol. 8, p. 273-288.

[22] Martinet, A., *Eléments de linguistique générale*. Paris, 1960.

[23] Rabin, M. O., D. Scott, « Finite automata and their decision problems ». *I.B.M Journ. Res. Devel.*, vol. 3, 1959, N° 2, p. 114-125.

[24] Reformatskii, A. A., « Dichotomičeskaja klassifikacija differencial'nych priznakov i fonematičeskaja model jazyka ». *Voprosy teorii jazyka v sovremennoi zarubežnoi lingvistike*. Izd. Akad Nauk SSSR, Moskva, 1961, p. 106-122.

[25] SAUSSURE, Ferdinand de *Cours de linguistique générale*, III-ième édition, Paris, 1931.

[26] SESTIER, A., « Contribution à une théorie ensembliste des classifications linguistiques ». *Premier Congrès de l'Association française de calcul*. Grenoble 1960. Paris, 1961, p. 293-305.

[27] SKALIČKA, V., *Zur ungarischen Grammatik*, 1935, p. 13.

[28] ŠAUMJAN, S. K., « Lingvističeskie voprosy kibernetiki i strukturnaja lingvistika ». *Voprosy filosofii*, 1960, N° 9.

[29] TROUBETZKOY, N. S., *Principes de Phonologie* (traduit de l'allemand par J. CANTINEAU). Paris, 1957.

Ajouté sur les épreuves

Pour le développement ultérieur des aspects logiques des oppositions linguistiques, voir Andrei AVRAM (« Phonème, archiphonème et oppositions phonologiques supplémentaires ». *Cahiers de linguistique théorique et appliquée*, vol. 2, 1965, p. 19-24), Gabriel ORMAN (« Remarques sur la théorie logique des oppositions linguistiques », *Cahiers de linguistique théorique et appliquée*, vol. III, 1966, p. 199-200 ; « In legătură cu aspectul logic al opozițiilor lingvistice. Opoziții mediane ». *Analele Universității București*, seria matematică, vol. 16, 1967, N° 1), V. A. VINOGRADOV (« Nekotorye voprosy teorii fonologičeskih oppozicii i neitralizacii ». *Problemy lingvističeskogo analiza*, Akad. Nauk SSSR, Izd. Nauka, Moscou, 1965, p. 3-25) et I. V. ARNOLD (« Oppozicii v semasiologii ». *Voprosy jazykoznanija*, vol. 15, 1966, N° 2, p. 106-110). La théorie logique des oppositions linguistiques a été utilisée en Sémiologie par Roland BARTHES (*Eléments de Sémiologie*, Editions du Seuil, Paris, 1964). Pour le développement ultérieur de l'analyse contextuelle voir S. MARCUS (le paragraphe 15 de « Analyse contextuelle ». *Zeitschrift für Phonetik, Sprachwissenschaft und Kommunikationsforschung*, Band 18, Heft 3, 1965, p. 301-313), Alexandru DINCĂ (« Sur quelques problèmes d'analyse contextuelle métrique », *Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées*, vol. 12, 1967), Ladislav NEBESKÝ (« K ponjatiju konteksta ». *Pragues Studies in Mathematical Linguistics*, vol. 2, 1967) et Bohdan ZELINKA (« Sur la distance contextuelle ». *Sbornik vědeckých praci vysoké školy strojní a textilní v Liberci*, 1967 ; « Un langage héréditaire qui n'est pas à un nombre d'états fini ». *Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées* (sous presse)). Une analyse contextuelle des langages à un nombre d'états finis a été donnée par S. MARCUS (*Algebraic Linguistics* ; *Analytical Models*. Academic Press, New York and London, 1967, chapitre II) et par Ion FILOTTI (« Direct proofs for some theorems concerning finite state Languages » *I. C. C. Bulletin*, vol. 6, 1967, N° 4).

CHAPITRE II

ANALYSE PHONÉMATIQUE

1. Introduction

La phonologie étudie les sons de la langue du point de vue de leurs fonctions linguistiques. Si les antécédents de cette discipline remontent à l'antiquité, puis, d'une façon plus nette, au XIXe siècle (voir par exemple, les recherches de Baudouin de Courtenay [4]) et au début du XXe siècle, son acte de naissance à proprement parler se situe entre 1928 et 1940 et peut être reconnu dans les travaux de Troubetzkoy, en particulier dans son livre aujourd'hui classique [47].

Le premier essai de description axiomatique des langues naturelles, dû à L. Bloomfield [8], envisage aussi l'aspect fonctionnel des sons de la langue. Cet aspect de la description de Bloomfield a été amélioré par Bernard Bloch dans une étude [7], dans laquelle il remarque que la méthode axiomatique nous oblige à expliciter ce qui parfois est sous-entendu ; elle nous oblige à définir les termes utilisés, à distinguer ce qu'on suppose de ce qu'il en résulte. On arrive ainsi à déterminer quels sont les faits qui ont une existence indépendante et quelles sont les interdépendances logiques auxquelles ces faits sont soumis dans leurs aspects linguistiques.

Les notions fondamentales de la phonologie, notamment celles de « trait distinctif » et de « phonème » sont l'objet de nombreux travaux. En ce qui concerne le phonème, on trouve un historique de la question dans [31] ; voir aussi [15], [23], [30] et [48]. Ces dix dernières années ont vu une intensification des études phonologiques du point de vue de la formation de modèles mathématiques. Ce problème est justement l'objet du présent chapitre, qui est formé de trois parties.

Dans la première partie (§§ 2-16), le principal problème qui nous préoccupe pourrait être formulé de la façon suivante : Quelles sont, au point de vue formel, les étapes par lesquelles, en partant des valeurs acoustiques ou articulatoires des sons de la langue, on arrive à leurs valeurs distinctives, pertinentes au point de vue de la fonction linguistique. Plus exactement, quels sont les critères à l'aide desquels on sélectionne, à partir de l'ensemble $\mathscr{V}(x)$ de toutes les valeurs acoustiques (ou articulatoires) du son x la partie $\mathscr{F}(x)$ des valeurs pertinentes de x ? Bien entendu, pour répondre à ce problème il est nécessaire, au préalable, de donner à l'énoncé du problème une forme exacte, susceptible d'un traitement mathématique. On devra donc construire un analogue formel des sons, des valeurs, de la pertinence, etc.

Cette manière de poser le problème s'inspire des travaux classiques de R. Jakobson, C. G. M. Fant et M. Halle [28], A. Martinet [37], ainsi que des travaux plus récents de G. E. Peterson et Frank Harary [38], S. K. Šaumjan [45], [46] et I. I. Revzin [42]. Beaucoup des notions et des faits que nous mettrons en évidence constituent un analogue formel de certaines notions ou faits des travaux cités.

Dans la deuxième partie (§§ 17-23) nous présentons un autre point de vue, ayant son origine dans les travaux de Harris, Hockett ([22], [23], [24]) et autres et dont une première formalisation a été donnée par S. Kanger [32]. D'après ce point de vue, le phonème est défini comme une classe de séquences sonores jouissant de certaines propriétés.

Dans la troisième partie nous discutons la notion de simplicité d'une description phonologique d'après Halle [20] et la hiérarchie des phonèmes, d'après Bröndal [10], [11] et Ungeheuer [49].

Il faut remarquer que la reconstruction logique de la notion de phonème a fait, récemment, l'objet d'une ample analyse entreprise par Tadeusz Batog, basée sur la méréologie de Lesniewski [2], [3]; un problème similaire, mais traité par d'autres méthodes, a été abordé par J. Greenberg [17].

Le modèle que nous allons construire aux §§ 2-16 est composé de trois parties. Dans la première nous définissons la notion de système phonétique en l'absence de toutes considérations syntagmatiques et nous étudions ce système au point de vue de la théorie des codes.

Dans la seconde partie, nous définissons, par l'introduction des *suites repérées*, la notion de système phonématique et nous donnons des théorèmes relatifs au comportement des valeurs des sons par rapport à différents types de contextes.

Dans la troisième étape de la construction nous considérons en outre une relation R d'équivalence dans l'ensemble des suites repérées et nous définissons les notions de valeur pertinente, phonème, neutralisation et archiphonème.

2. Valeurs et sons

Soit $\mathscr{V}$ un ensemble d'éléments nommés *valeurs*. Considérons une partition P de l'ensemble $\mathscr{V}$ (c'est-à-dire une décomposition de $\mathscr{V}$ en ensembles disjoints) :

$$\mathscr{V} = \bigcup_i \mathscr{V}_i .$$

Deux valeurs du même ensemble $\mathscr{V}_i$ sont dites *homogènes* ; deux valeurs d'ensembles différents sont dites *hétérogènes*.

Exemples de valeurs : sonore, sourd, mou, dur, ouvert, fricatif, occlusif, continu. Les valeurs « sonore » et « sourd » entrent dans le même ensemble $\mathscr{V}_i$; de même « mou » et « dur », « ouvert » et « fermé ». Les valeurs « sonore » et « mou » sont hétérogènes.

Soit E un ensemble d'éléments nommés *sons du langage* ou simplement « *sons* ».

A chaque son x on associe une partie $\mathscr{V}(x)$ de $\mathscr{V}$, telle que pour tout nombre naturel i tel que $\mathscr{V}_i \neq 0$ l'intersection

$$\mathscr{V}_i \cap \mathscr{V}(x)$$

est formée exactement par un élément.

Deux valeurs v_1 et v_2 sont dites *compatibles* s'il existe un son x tel que

$$v_1 \in \mathscr{V}(x) \qquad \text{et} \qquad v_2 \in \mathscr{V}(x)\,.$$

Deux valeurs qui ne sont pas compatibles sont dites *incompatibles*.

Par exemple, dans la langue russe, les valeurs « sourd » et « fricatif » sont compatibles ; les valeurs « sonore » et « mou » sont, de même, compatibles. Par contre, « dur » et « ouvert » sont incompatibles.

3. Rapport entre compatibilité et homogénéité

PROPOSITION 1. *Si v_1 et v_2 sont des valeurs compatibles, alors v_1 et v_2 sont hétérogènes.*

Démonstration. Supposons, par réduction à l'absurde, que v_1 et v_2 sont homogènes. Il existe donc une valeur j de i, telle que

$$v_1 \in \mathscr{V}_j\,, \quad v_2 \in \mathscr{V}_j\,.$$

D'autre part, le fait que v_1 et v_2 sont compatibles, entraîne l'existence d'un son z tel que

$$v_1 \in \mathscr{V}(z)\,, \quad v_2 \in \mathscr{V}(z)\,.$$

On en déduit que l'intersection

$$\mathscr{V}_j \cap \mathscr{V}(z)$$

contient au moins deux valeurs : v_1 et v_2. Cela est en contradiction avec la définition des ensembles $\mathscr{V}(x)$. Donc l'hypothèse que v_1 est homogène à v_2 est fausse ; v_1 et v_2 sont hétérogènes.

COROLLAIRE. *Si v_1 et v_2 sont homogènes, v_1 et v_2 sont incompatibles.*

Observation. La réciproque de ce corollaire n'est pas vraie. En effet, soit $\mathscr{V} = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$, $\mathscr{V}_1 = \{ v_1 \}$, $\mathscr{V}_2 = \{ v_2, v_3 \}$, $\mathscr{V}_3 = \{ v_4, v_5 \}$, $E = \{x, y, z, w\}$, $\mathscr{V}(x) = \{ v_1, v_2, v_4 \}$, $\mathscr{V}(y) = \mathscr{V}(z) = \{ v_1, v_3, v_4 \}$,

$$\mathscr{V}(w) = \{ v_1, v_3, v_5 \}.$$

Ainsi que l'on voit, v_5 et v_2 sont incompatibles, mais hétérogènes.

4. Paires contrastives

On dira que deux valeurs v_1 et v_2 forment une *paire contrastive* de valeurs ou, simplement une *paire contrastive*, s'il existe deux sons x et y tels que

$$\mathscr{V}(x) - \mathscr{V}(y) = \{ v_1 \}, \mathscr{V}(y) - \mathscr{V}(x) = \{ v_2 \}.$$

De cette définition, il résulte, immédiatement, que :

Si v_1 et v_2 forment une paire contrastive, alors $v_1 \neq v_2$, tandis que v_2 et v_1 forment aussi une paire contrastive.

PROPOSITION 2. *Si v_1 et v_2 forment une paire contrastive, alors v_1 et v_2 sont homogènes.*

Démonstration. Par définition, il existe deux sons x et y, tels que

$$\mathscr{V}(x) - \mathscr{V}(y) = \{ v_1 \}, \mathscr{V}(y) - \mathscr{V}(x) = \{ v_2 \}.$$

Posons

$$A_{xy} = \mathscr{V}(x) \cap \mathscr{V}(y).$$

De la définition de la paire contrastive même, il résulte que :

$$\mathscr{V}(x) = A_{xy} \cup \{ v_1 \}, \mathscr{V}(y) = A_{xy} \cup \{ v_2 \}.$$

Soit k le nombre naturel pour lequel

$$v_1 \in \mathscr{V}_k.$$

Du fait que, en vertu de la définition de l'ensemble $\mathscr{V}(x)$, l'intersection

$$\mathscr{V}_k \cap \mathscr{V}(x)$$

contient exactement un élément et en tenant compte de ce que

$$\mathscr{V}_k \cap \mathscr{V}(x) = \mathscr{V}_k \cap (A_{xy} \cup \{ v_1 \}) = (\mathscr{V}_k \cap A_{xy}) \cup (\mathscr{V}_k \cap \{ v_1 \}),$$

il résulte, en vertu de l'appartenance

$$v_1 \in \mathscr{V}_k \cap \mathscr{V}(x)$$

que

$$\mathscr{V}_k \cap A_{xy} = 0.$$

Mais

$$\mathscr{V}_k \cap \mathscr{V}(y) = \mathscr{V}_k \cap (A_{xy} \cup \{ v_2 \}) = (\mathscr{V}_k \cap A_{xy}) \cup (\mathscr{V}_k \cap \{ v_2 \}),$$

donc

$$\mathscr{V}_k \cap \mathscr{V}(y) = \mathscr{V}_k \cap \{ v_2 \}.$$

L'ensemble du premier membre de cette égalité contenant, par définition, exactement un élément, il résulte que

$$\mathscr{V}_k \cap \mathscr{V}(y) = \{ v_2 \}.$$

Donc

$$v_2 \in \mathscr{V}_k;$$

par conséquent, v_1 et v_2 sont homogènes.

Observation. La réciproque de la proposition 2 n'est pas vraie. En effet, soit

$$\mathscr{V} = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \},\ \mathscr{V}_1 = \{ v_1, v_2 \},\ \mathscr{V}_2 = \{ v_3, v_4 \},$$
$$E = \{ x,\ y,\ z,\ w, \},\ \mathscr{V}(x) = \mathscr{V}(y) = \{ v_1, v_4 \},\ \mathscr{V}(z) = \mathscr{V}(w) = \{ v_2, v_3 \}.$$

On observe que $\mathscr{V}$ ne contient aucune paire contrastive de valeurs, donc, en particulier, les paires homogènes $\{ v_1, v_2 \}$ et $\{ v_3, v_4 \}$ ne sont pas contrastives.

COROLLAIRE. *Si les valeurs v_1 et v_2 forment une paire contrastive, alors v_1 et v_2 sont incompatibles.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 2 et ensuite le corollaire à la proposition 1.

Observation. Ainsi que le montre l'exemple de l'observation à la proposition 2, la réciproque de ce corollaire n'est pas vraie ; il existe quelquefois des valeurs incompatibles qui ne forment pas une paire contrastive. Dans l'exemple cité, aucune paire de valeurs incompatibles n'est contrastive.

5. Systèmes phonétiques potentiels

Soit un système

$$\{ \mathscr{V}, P, E, \varphi \},$$

où $\mathscr{V}$ est un ensemble de valeurs, P est une partition de $\mathscr{V}$, E est un ensemble de sons et φ est une application de l'ensemble E dans l'ensemble des parties de $\mathscr{V}$, telle que, pour tout $x \in E$ et pour tout terme $\mathscr{V}_i$ de la partition P, l'ensemble

$$\mathscr{V}_i \cap \varphi(x)$$

est formé exactement par un élément. Un tel système s'appelle un *système phonétique potentiel*, ou, simplement, un *système phonétique*.

Il existe certains systèmes phonétiques concrets où toute paire de valeurs incompatibles est contrastive ; en vertu du corollaire à la proposition 2, il résultera que dans un tel système la notion de paire contrastive se confond avec la notion de valeurs incompatibles. C'est le cas, par exemple, du système de valeurs acoustiques décrit dans [28].

Cette situation suggère la définition suivante :

Nous dirons qu'un système phonétique potentiel est *complet* si toute paire de valeurs incompatibles est une paire contrastive.

Comme le montre l'observation de la proposition 2, il existe des valeurs homogènes qui ne forment pas une paire contrastive. On peut construire des systèmes phonétiques potentiels où chaque paire homogène est contrastive. Un tel système est fourni par l'observation qui suit le corollaire à la proposition 1. En effet, la paire homogène $\{ v_2, v_3 \}$ est contrastive, car

$$\mathscr{V}(x) - \mathscr{V}(y) = \{ v_2 \} \text{ et } \mathscr{V}(y) - \mathscr{V}(x) = \{ v_3 \} ;$$

paire homogène $\{ v_4, v_5 \}$ est, de même, contrastive, car

$$\mathscr{V}(z) - \mathscr{V}(w) = \{ v_4 \} \text{ et } \mathscr{V}(w) - \mathscr{V}(z) = \{ v_5 \} .$$

Cette situation suggère la définition suivante.

Un système phonétique potentiel s'appelle *semi-complet*, si toute paire de valeurs homogènes est contrastive.

En vertu du corollaire à la proposition 1 et de l'exemple qui suit ce corollaire, nous avons

PROPOSITION 3. *Tout système phonétique potentiel complet est semi-complet, mais la réciproque n'est pas vraie.*

Observations. La notion de paire contrastive précise une notion connue. Voir, par exemple, I. I. Revzin ([42], p. 23), qui utilise pour cette notion le terme de « traits homogènes ». Mais le terme d'« homogène » a reçu ci-dessus une autre acception.

Exemples de paires contrastives dans les langues roumaine et russe : *sourd* et *sonore*, *long* et *court*, *mou* et *dur*, *ouvert* et *fermé*.

Le caractère contrastif de la paire $\{$ *sourd*, *sonore* $\}$ se vérifie dans la langue roumaine par la considération des sons D et T ; en effet, on a

$$\mathscr{V}(T) - \mathscr{V}(D) = \{ \textit{sourd} \} , \mathscr{V}(D) - \mathscr{V}(T) = \{ \textit{sonore} \} .$$

On peut vérifier le caractère contrastif des paires $\{$ *court*, *long* $\}$ et $\{$ *fermé*, *ouvert* $\}$ dans la langue roumaine, en considérant quatre variantes adéquates du son E : E_1, E_2, E_3 et E_4, tel que

$$\mathscr{V}(E_1) - \mathscr{V}(E_2) = \{ \text{court} \} , \mathscr{V}(E_2) - \mathscr{V}(E_1) = \{ \text{long} \} ,$$
$$\mathscr{V}(E_3) - \mathscr{V}(E_4) = \{ \text{fermé} \} , \mathscr{V}(E_4) - \mathscr{V}(E_3) = \{ \text{ouvert} \} .$$

6. Traits

Dans les langues naturelles, les seules valeurs intéressantes sont celles qui participent au moins une fois à une paire homogène ; en d'autres termes, les valeurs v pour lesquelles l'ensemble $\mathscr{V}_i$ possédant la propriété $v \in \mathscr{V}_i$ contient au moins deux valeurs. Cette situation est une conséquence du fait que si une valeur v n'est homogène à aucune autre valeur, alors v n'entre dans aucune paire contrastive (par suite de la proposition 2).

Une valeur v qui n'est homogène à aucune autre valeur sera appelée un *trait*. Si, en plus, $v \in \mathscr{V}(x)$, alors on dit que v est un trait du son x. La proposition suivante montre l'absence d'intérêt de cette notion.

PROPOSITION 4. *Si v est un trait du son x, alors v est un trait de tout autre son.*

Démonstration. Soit

$$\mathscr{V}(x) = \{ v_1(x), v_2(x), \ldots, v_i(x), \ldots \} .$$

Soit j le nombre naturel ayant la propriété $v_j(x) = v$. Cela signifie que $\mathscr{V}_j = \{ v \}$. Soit maintenant un autre son y. On a

$$\mathscr{V}_j \cap \mathscr{V}(y) = \{ v \} \cap \mathscr{V}(y)$$

et, vu que l'ensemble $\mathscr{V}_j \cap \mathscr{V}(y)$ ne peut être vide, il résulte que

$$v \in \mathscr{V}(y) ,$$

donc v est un trait de y.

On dira qu'une valeur v est *parasite* s'il n'existe aucun son x tel que $v \in \mathscr{V}(x)$. Toutes les fois qu'on ne spécifiera pas le contraire, l'existence des valeurs parasites sera exclue, c'est-à-dire qu'on supposera vraie la relation

$$\mathscr{V} = \bigcup_{x \in E} \mathscr{V}(x) .$$

Evidemment, les systèmes phonétiques des langues naturelles ne contiennent pas de valeurs parasites.

7. Equivalence absolue. Distance

Deux sons x et y tels que $\mathscr{V}(x) = \mathscr{V}(y)$ seront appelés *sons absolument équivalents*.

Si on admet, par définition, que l'opposition entre deux sons x et y est l'opposition entre les ensembles $\mathscr{V}(x)$ et $\mathscr{V}(y)$, alors on peut dire que les sons x

et y sont absolument équivalents si et seulement si x et y sont en opposition zéro.

Mais pour que l'opposition entre deux sons puisse refléter d'une manière plus adéquate leur situation réciproque, il convient de concevoir $\mathscr{V}(x)$ et $\mathscr{V}(y)$ comme *ensembles ordonnés* et l'opposition entre eux comme une *opposition ordonnée*. C'est ainsi qu'on considérera, dans $\mathscr{V}(x)$ et $\mathscr{V}(y)$, l'ordre induit par la partition P. On posera

$$\mathscr{V}(x) = \{ v_1(x), v_2(x), ..., v_i(x), ... \} ,$$
$$\mathscr{V}(y) = \{ v_1(y), v_2(y), ..., v_i(y), ... \} ,$$

où

$$v_i(x) \in \mathscr{V}_i , v_i(y) \in \mathscr{V}_i \quad (i = 1, 2, ...) .$$

Selon le modèle de la distance de Hamming en théorie des codes, on introduira ici une mesure, une évaluation quantitative de l'opposition entre $\mathscr{V}(x)$ et $\mathscr{V}(y)$: nous considérerons l'ensemble $\mathscr{N}_{xy}$ des nombres naturels i pour lesquels $v_i(x) \neq v_i(y)$. Le nombre cardinal de l'ensemble $\mathscr{N}_{xy}$ est, par définition, la *distance* entre $\mathscr{V}(x)$ et $\mathscr{V}(y)$. Ce nombre cardinal mesure l'opposition entre les sons x et y. Dans le cas où la partition P est finie, on vérifie facilement que toutes les propriétés de la distance sont satisfaites.

Observons que les éventuels traits présents dans $\mathscr{V}(x)$ et $\mathscr{V}(y)$ ont une contribution nulle à la distance entre $\mathscr{V}(x)$ et $\mathscr{V}(y)$. Une autre observation évidente : *Deux sons x et y sont absolument équivalents si et seulement si la distance entre $\mathscr{V}(x)$ et $\mathscr{V}(y)$ est égale à zéro.*

8. Sons abstraits

Il est clair que l'équivalence absolue satisfait toutes les propriétés d'une relation d'équivalence dans E. E se décompose donc en classes d'équivalence absolue ; une telle classe sera appelée un *son abstrait*. Le son abstrait associé au son x sera noté par $[x]$.

La distance de Hamming introduit dans l'ensemble $\mathscr{S}$ des sons abstraits une distance par l'intermédiaire de laquelle $\mathscr{S}$ devient un *espace métrique* associé au système phonétique potentiel $\{ \mathscr{V}, P, E, \varphi \}$. Cela veut dire que la distance entre $[x]$ et $[y]$ sera, par définition, égale à la distance entre $\mathscr{V}(x')$ et $\mathscr{V}(y')$, où $x' \in [x]$ et $y' \in [y]$. Il est clair que cette distance ne dépend pas de la manière dont on choisit x' en $[x]$ et y' en $[y]$.

9. Certaines analogies avec la théorie des codes

On dira que l'espace métrique $\mathscr{S}$ *détecte les erreurs simples* si, étant donné $[x] \in \mathscr{S}$, $v \in \mathscr{V}(x) = \{ v_1, v_2, ..., v_{j-1}, v, v_{j+1}, ... \}$ et une valeur $v' \neq v$, il n'existe aucun son y tel que

$$\mathscr{V}(y) = \{ v_1, v_2, ..., v_{j-1}, v', v_{j+1}, ... \} .$$

Par un raisonnement similaire à celui utilisé dans la théorie des codes, on montre que

L'espace métrique $\mathcal{S}$ détecte les erreurs simples si et seulement si la distance entre ses éléments est plus grande ou égale à deux.

On en déduira la

PROPOSITION 5. *Soit $\mathcal{S}$ l'espace métrique associé au système phonétique potentiel $\{ \mathcal{V}, P, E, \varphi \}$. Pour que $\mathcal{S}$ détecte les erreurs simples il est nécessaire et suffisant que $\mathcal{V}$ ne contienne aucune paire contrastive de valeurs.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{S}$ détecte les erreurs simples. Il en résulte que la distance entre ses éléments est plus grande ou égale à deux. S'il existait deux valeurs v_1 et v_2 qui forment une paire contrastive, alors il existerait deux sons x et y pour lesquels $\mathcal{V}(x) - \mathcal{V}(y) = \{ v_1 \}$ et $\mathcal{V}(y) - \mathcal{V}(x) = \{ v_2 \}$. Cela entraîne que la distance entre $\mathcal{V}(x)$ et $\mathcal{V}(y)$ est plus petite ou égale à deux. Mais en vertu de la proposition 2, les valeurs v_1 et v_2 sont homogènes, donc la distance entre $\mathcal{V}(x)$ et $\mathcal{V}(y)$ est égale à un, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que $\mathcal{S}$ détecte les erreurs simples. Donc l'existence d'une paire contrastive de valeurs est exclue.

Supposons maintenant qu'il n'existe aucune paire contrastive de valeurs. Admettons, pour raisonner par l'absurde, que $\mathcal{S}$ ne détecte pas toutes les erreurs simples. Dans ce cas, il existe deux sons abstraits $[x] \in \mathcal{S}$, $[y] \in \mathcal{S}$, entre lesquels la distance est plus petite que deux, donc égale à un (la distance ne peut être nulle, car x et y sont distincts). Il résulte qu'en posant $\mathcal{V}(x) = \{ v_1(x), v_2(x), \ldots, v_i(x), \ldots \}$, $\mathcal{V}(y) = \{ v_1(y), v_2(y), \ldots, v_i(y), \ldots \}$, il existe un nombre naturel j, tel que $v_j(x) \neq v_j(y)$ et $v_i(x) = v_i(y)$ pour tout $i \neq j$. Cela entraîne que $\mathcal{V}(x) - \mathcal{V}(y) = \{ v_j(x) \}$ et $\mathcal{V}(y) - \mathcal{V}(x) = \{ v_j(y) \}$, donc les valeurs $v_j(x)$ et $v_j(y)$ forment une paire contrastive, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. Donc $\mathcal{S}$ détecte toutes les erreurs simples.

COROLLAIRE. *Soit un système phonétique potentiel $\{ \mathcal{V}, P, E, \varphi \}$ dont l'espace associé $\mathcal{S}$ détecte les erreurs simples. Pour que le système soit complet, il est nécessaire et suffisant que $\mathcal{V}$ ne contienne pas de valeurs incompatibles.*

En tenant compte du corollaire à la proposition 1, on peut donc énoncer la proposition suivante :

Soit un système phonétique potentiel $\{ \mathcal{V}, P, E, \varphi \}$, dont l'espace associé $\mathcal{S}$ détecte les erreurs simples. Pour que le système soit complet il est nécessaire et suffisant que chaque terme de la partition P soit un ensemble formé par un seul élément.

En vertu de la définition de la notion de « trait », on a aussi la proposition suivante :

Soit un système phonétique potentiel $\{ \mathcal{V}, P, E, \varphi \}$, dont l'espace associé $\mathcal{S}$ détecte les erreurs simples. Pour que le système soit complet il est nécessaire et suffisant que tout élément de $\mathcal{V}$ soit un trait.

Les trois propositions énoncées ci-dessus montrent que les systèmes phonétiques potentiels qui fonctionnent comme un code détecteur d'erreurs simples ne sont complets que dans des cas banals (voir surtout la dernière caractérisation de ces systèmes). L'explication de ce fait est naturelle ; la complétion d'un système phonétique correspond au cas où toutes les oppositions possibles dans le système sont effectivement utilisées, on réalise donc le maximum d'économie et la redondance du système est nulle. Mais, comme on sait, une certaine redondance est toujours nécessaire pour pouvoir détecter et corriger les éventuelles erreurs et cette redondance existe effectivement dans les langues naturelles. Les systèmes linguistiques naturels contiennent toujours une certaine redondance.

Il est facile de voir que chacun des trois caractères de la complétion dans les systèmes phonétiques détecteurs d'erreurs simples devient un caractère de la semi-complétion de ces systèmes, dès que l'on remplace, dans leur énoncé, le mot « complet » par le mot « semi-complet » et le mot « incompatible » par le mot « homogène ». Il résulte que, dans les systèmes phonétiques détecteurs d'erreurs simples, la semi-complétitude se réalise seulement dans certains cas banals.

10. Suites repérées et suites permises

Soit $\mathscr{F}$ un certain ensemble de suites de sons ; on dira de ces suites qu'elles sont *repérées*. Dans une langue naturelle, en guise des suites repérées on prend, d'habitude, les mots ou les phrases de la langue en question.

Une suite repérée est aussi appelée une chaîne repérée. Toute sous-chaîne (sous-suite) d'une chaîne (suite) repérée s'appelle *chaîne permise* ou *suite permise*. Il est donc évident que toute suite repérée est permise mais pas réciproquement. Toute sous-suite d'une suite permise est, de même, permise.

11. Systèmes phonématiques potentiels

Un système d'objets $\{\mathscr{V}, P, E, \varphi, \mathscr{F}\}$, où $\mathscr{V}$, P, E et φ sont les objets qui composent un système phonétique potentiel et $\mathscr{F}$ est l'ensemble des suites repérées, s'appellent *système phonématique potentiel* ou simplement *système phonématique*.

En ce qui concerne les suites repérées et les suites permises, nous ferons l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE FONDAMENTALE. *Si, dans une suite repérée, on remplace un son x par un autre absolument équivalent à x, alors la nouvelle suite obtenue est aussi repérée*. De cette hypothèse fondamentale on déduit facilement que : *Si dans une suite permise on remplace un son par un autre absolument équivalent, alors la nouvelle suite obtenue est aussi permise.*

En effet, soit S_x une suite permise qui contient x et soit y absolument équivalent à x. Soit S_y la suite obtenue à partir de S_x en remplaçant x par y. S_x est une sous-suite d'une suite repérée σ_x. Soit σ_y la suite obtenue à partir de σ_x, en remplaçant x par y. Par l'hypothèse fondamentale, σ_y est repérée. D'autre part, σ_y contient S_y, donc S_y est permise.

En vertu de cette hypothèse, les suites avec lesquelles on travaille sont, en fait, des suites de sons abstraits ; les propriétés que nous allons considérer seront invariantes par la relation d'équivalence absolue.

Etant données deux suites de sons $x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_n$ et $y_1 y_2 \ldots y_i \ldots y_n$, on dira que ces suites sont *absolument équivalentes* si x_i est absolument équivalent à y_i pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$. Il résulte qu'une *suite absolument équivalente à une suite repérée* (*permise*) *est aussi repérée* (*permise*).

12. Valeurs relevantes

On dira que la valeur $v \in \mathscr{V}(x)$ est une *valeur relevante du son* x s'il existe une valeur v' telle que v et v' forment une paire contrastive et il existe un son y tel que $\mathscr{V}(y) = (\mathscr{V}(x) - \{ v \}) \cup \{ v' \}$. On dira des valeurs v et v' qu'elles forment une *paire contrastive par rapport au son* x.

De la définition même, il résulte que

Si $v \in \mathscr{V}(x)$ est une valeur relevante du son x, alors v est une valeur relevante de tout son absolument équivalent à x.

Si v et v' forment une paire contrastive par rapport au son x, alors v et v' forment une paire contrastive par rapport à tout son absolument équivalent à x.

Ces propriétés rendent légitimes les définitions suivantes :

Une valeur $v \in \mathscr{V}(x)$ est, par définition, relevante pour le son abstrait $[x]$ s'il existe un son $y \in [x]$ qui admet v comme valeur relevante.

Deux valeurs v et v' forment, par définition, une paire contrastive par rapport au son abstrait $[x]$ s'il existe un son $y \in [x]$ par rapport auquel v et v' forment une paire contrastive.

13. Valeurs liées

Etant donnés un son x et une suite permise s qui contient x, on dira que la valeur $v \in \mathscr{V}(x)$ est, pour x, une *valeur liée par rapport à la suite* s, si l'une des deux situations suivantes a lieu :

1° v n'est pas une valeur relevante de x ;

2° pour toute valeur v', telle que v et v' forment une paire contrastive par rapport à x et pour tout son y ayant la propriété $\mathscr{V}(y) = (\mathscr{V}(x) - \{ v \}) \cup \{ v' \}$, la suite obtenue à partir de s, en remplaçant x par y, n'est pas permise.

Il est évident, en vertu de l'hypothèse fondamentale énoncée ci-dessus, que

Si la valeur v est, pour le son x, une valeur liée par rapport à la suite permise s et si u est un son absolument équivalent à x, alors, en désignant par t la suite obtenue à partir de s, en remplaçant x par u, t est une suite permise et v est, pour u, une valeur liée par rapport à la suite t.

On dira qu'une valeur $v \in \mathscr{V}(x)$ est, pour x, *liée à gauche* si quel que soit le son z pour lequel la suite xz est permise, la valeur v est, pour x, liée par rapport à la suite xz.

On dira qu'une valeur $v \in \mathscr{V}(x)$ est, pour x, *liée à droite*, si quel que soit le son y pour lequel la suite yx est permise, la valeur v est, pour x, liée par rapport à la suite yx.

On dira qu'une valeur $v \in \mathscr{V}(x)$ est, pour x, *bilatéralement liée* si elle est, pour x, liée à gauche et liée à droite.

On dira qu'une valeur $v \in \mathscr{V}(x)$ est, pour x, une *valeur proximement liée*, si, pour toute suite permise du type yxz, la valeur v est, pour x, liée par rapport à yxz.

Les notions de « valeur liée à droite », « valeur liée à gauche », « valeur bilatéralement liée » et « valeur proximement liée » sont-elles aussi invariantes par la relation d'équivalence absolue.

Proposition 6. *Si la valeur $v \in \mathscr{V}(x)$ est, pour x, liée à gauche, alors v est, pour x, une valeur proximement liée.*

Démonstration. Soit une suite permise du type yxz. On doit montrer que v est, pour x, une valeur liée par rapport à cette suite. Supposons, par réduction à l'absurde, que cette situation ne se présente pas. Dans ce cas, v est une valeur relevante de x ; en plus, il existe une valeur v' qui forme avec v une paire contrastive par rapport à x et il existe un son w ayant les propriétés suivantes :

1) $\mathscr{V}(w) = (\mathscr{V}(x) - \{ v \}) \cup \{ v' \}$;
2) La suite ywz est permise.

Du fait que les suites yxz et ywz sont permises, les sous-suites xz et wz le sont, aussi. En tenant compte du fait que v' forme avec v une paire contrastive par rapport à x et en observant la propriété 1) du son w, on constate qu'on se trouve en contradiction avec l'hypothèse que v est, pour x, liée à gauche.

De manière analogue on démontre la

Proposition 6'. *Si la valeur $v \in \mathscr{V}(x)$ est, pour x, liée à droite, alors v est, pour x, une valeur proximement liée.*

La réciproque des propositions 6 et 6' n'est pas vraie. En effet, on a la

Proposition 7. *Il existe un système phonématique qui contient un son z et une valeur v proximement liée pour z, valeur qui n'est cependant liée, pour z, ni à gauche, ni à droite.*

Démonstration. On considérera le système phonématique défini de la manière suivante : $\mathscr{V} = \{ v_1, v_2, v_3 \}$; $E = \{ x, y, z \}$; $\mathscr{V}_1 = \{ v_1 \}$;

$$\mathscr{V}_2 = \{ v_2, v_3 \} ;$$

$\mathscr{V}(x) = \{ v_1, v_2 \}$; $\mathscr{V}(y) = \mathscr{V}(z) = \{ v_1, v_3 \}$. On supposera qu'il existe une seule suite repérée, à savoir $xyzyx$.

La valeur v_3 est proximement liée pour z, car dans l'unique suite permise du type $\alpha z \beta$ — à savoir dans la suite yzy — le remplacement de la valeur relevante v_3 par la valeur v_2 conduit à la suite yxy et cette suite n'est pas permise.

La valeur v_3 n'est pas bilatéralement liée pour z. En effet, soit la suite permise zy ; la valeur v_3 est une valeur relevante de z et n'est pas liée par rapport à la suite zy, car en remplaçant v_3 par v_2 on obtient la suite xy, qui est aussi une suite permise. Donc la valeur v_3 de z n'est pas liée à gauche. D'autre part, dans la suite permise yz, le remplacement de v_3 par v_2 fournit la suite yx, qui est aussi une suite permise. Donc v_3 n'est pas liée à droite. La proposition 7 est complètement démontrée.

Par définition, on dira que la valeur $v \in \mathscr{V}(x)$ est, pour x, une *valeur liée*, si v est, pour x, liée par rapport à toute suite permise qui contient x.

PROPOSITION 8. *La valeur $v \in \mathscr{V}(x)$ est, pour x, une valeur liée si et seulement si v est, pour x, une valeur proximement liée.*

Démonstration. La nécessité de la condition est évidente. Il reste à établir qu'elle est suffisante. Admettons que v soit proximement liée et supposons, par réduction à l'absurde, qu'il existe une suite permise $x_1\ x_2 \dots x_{i-1}\ x x_{i+1} \dots x_n$ par rapport à laquelle v n'est pas liée. Cela signifie qu'il existe une valeur v' et un son y, tels que $\mathscr{V}(y) = \big(\mathscr{V}(x) - \{ v \}\big) \cup \{ v' \}$ et que la suite

$$x_1\ x_2 \dots x_{i-1}\ y x_{i+1} \dots x_n$$

est permise. Comme sous-suites de certaines suites permises, les suites $x_{i-1}\ x x_{i+1}$ et $x_{i-1}\ y x_{i+1}$ sont aussi permises. En tenant compte des autres propriétés des valeurs v et v' et des sons x et y, on voit que v n'est pas, pour x, une valeur liée par rapport à la suite permise $x_{i-1}\ x x_{i+1}$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que v est, pour x, une valeur proximement liée. La proposition 8 est ainsi démontrée.

COROLLAIRE. *Si la valeur $v \in \mathscr{V}(x)$ est, pour x, liée à gauche ou à droite, alors v est, pour x, une valeur liée.*

Démonstration. Le corollaire résulte immédiatement des propositions 6, 6′ et 8 ci-dessus.

Par définition, on dira que la valeur $v \in \mathscr{V}(x)$ est, pour x, *alternative à gauche* (*à droite*, *bilatéralement*) si v n'est pas, pour x, liée à gauche (à droite, bilatéralement).

Par définition, on dira que la valeur $v \in \mathscr{V}(x)$ est, pour x (*proximement*) *alternative* si v n'est pas, pour x (proximement) liée.

Des propositions ci-dessus on déduit :

PROPOSITION 9. *Si la valeur $v \in \mathscr{V}(x)$ est, pour x, proximement alternative, alors v est pour x, bilatéralement alternative.*

PROPOSITION 10. *La valeur $v \in \mathscr{V}(x)$ est, pour x, une valeur alternative si et seulement si v est, pour x, proximement alternative.*

PROPOSITION 11. *Si $v \in \mathscr{V}(x)$ est, pour x, une valeur alternative, alors v est, pour x, bilatéralement alternative.*

PROPOSITION 12. *Il existe un système phonématique qui contient un son z et une valeur v qui est bilatéralement alternative pour z, mais n'est pas proximement alternative pour z.*

14. Valeurs pertinentes

L'ensemble des valeurs du son x qui sont, pour x, alternatives à gauche (à droite) sera désigné par $\mathscr{A}_g(x)$ (respectivement $\mathscr{A}_d(x)$).

L'ensemble des valeurs du son x qui sont, pour x, bilatéralement alternatives sera désigné par $\mathscr{A}_b(x)$.

L'ensemble des valeurs du son x qui sont, pour x, proximement alternatives, sera désigné par $\mathscr{A}_p(x)$.

L'ensemble des valeurs du son x qui sont alternatives, pour x, sera désigné par $\mathscr{A}(x)$.

Des propositions 9, 10, 11 et 12 on déduit :

PROPOSITION 13. *Pour tout son x on a*

$$\mathscr{A}(x) = \mathscr{A}_p(x) \subseteq \mathscr{A}_b(x)$$

et il existe, dans certains systèmes phonématiques, des sons x pour lesquels l'inclusion est stricte.

On considérera maintenant, dans l'ensemble des suites repérées, une relation d'équivalence R, dont l'interprétation naturelle est la suivante : deux suites repérées sont R-équivalentes si elles ont la même signification.

Soit $v \in \mathscr{A}(x)$. On dira que v est, pour x, *pertinente par rapport à la suite repérée s qui contient* x, s'il existe une valeur v' et un son y, tels que :

1) $\mathscr{V}(y) = (\mathscr{V}(x) - \{ v \}) \cup \{ v' \}$;
2) La suite σ obtenue à partir de s, en remplaçant x par y, est repérée ;
3) σ n'est pas R-équivalente à s.

Soit $v \in \mathscr{A}(x)$. S'il existe une suite repérée s qui contient x et par rapport à laquelle v est, pour x, pertinente, alors on dit que v est une *valeur pertinente de* x.

Si, dans les définitions ci-dessus, on remplace l'ensemble $\mathscr{A}(x)$ par l'ensemble $\mathscr{A}_b(x)$, ce qu'on obtient est une *valeur bilatéralement pertinente de* x.

15. Phonèmes

Désignons par $\mathscr{F}(x)$ l'ensemble des valeurs pertinentes de x et par $\mathscr{F}_b(x)$ l'ensemble des valeurs bilatéralement pertinentes de x. Par définition, le couple $\{x, \mathscr{F}(x)\}$ constitue *le phonème associé au son* x ou bien le phonème induit par x ; de même par définition, le couple $\{x, \mathscr{F}_b(x)\}$ constitue *le phonème bilatéral associé à* x ou le phonème bilatéral induit par x.

On dira que deux sons x et y sont *phonématiquement équivalents* si $\mathscr{F}(x) = \mathscr{F}(y)$; x et y sont *bilatéralement phonématiquement équivalents* si $\mathscr{F}_b(x) = \mathscr{F}_b(y)$. Désignons par $\mathscr{C}(x)$ l'ensemble des sons phonématiquement équivalents à x et par $\mathscr{C}_b(x)$ l'ensemble des sons bilatéralement phonématiquement équivalents à x. Le couple $\{\mathscr{C}(x), \mathscr{F}(x)\}$ est *le phonème général* associé à x ou le phonème général induit par x ; chaque son $y \in \mathscr{C}(x)$ est, par définition, un *allophone* ou une *variante*. $\mathscr{C}(x)$ est *la composante physique* et $\mathscr{F}(x)$ est *la composante relationnelle* du phonème considéré. Le couple $\{\mathscr{C}_b(x), \mathscr{F}_b(x)\}$ est *le phonème général bilatéral* associé au son x ou le phonème général bilatéral induit par x.

16. Neutralisation et archiphonème

Soit v une valeur pertinente de x. Soit s une suite repérée qui contient x et soit v' une valeur et y un son possédant les propriétés 1), 2) et 3) de la définition de la valeur pertinente par rapport à s. Soit τ une suite repérée qui contient x. Supposons que les conditions suivantes sont remplies : α) la suite τ' obtenue de τ en remplaçant x par y est repérée ; β) τ' est R-équivalente à τ. Dans ces conditions, on dit que x définit, dans la suite τ, une *position de neutralisation de la différence entre* v *et* v'. Si pour toute suite s qui contient x, pour toute valeur v' et pour tout son y possédant les propriétés 1), 2), 3) de la définition de la valeur pertinente par rapport à s, x définit, dans la suite τ, une position de neutralisation de la différence entre v et v', alors on dit que x définit, dans la suite τ, une position de *neutralisation absolue* ou *une position de neutralisation de la différence entre* v *et les autres valeurs homogènes à* v.

Etant donnés deux phonèmes généraux $(\mathscr{C}(x), \mathscr{F}(x))$ et $(\mathscr{C}(y), \mathscr{F}(y))$, on appelle *archiphonème associé aux deux phonèmes* l'ensemble

$$\mathscr{F}(x) \cap \mathscr{F}(y) .$$

Un archiphonème est *normal* si chacun des ensembles

$$\mathscr{F}(x) - \mathscr{F}(y) , \qquad \mathscr{F}(y) - \mathscr{F}(x)$$

est formé par un élément et seulement un.

S'il existe un son z, tel que

$$\mathscr{F}(z) = \mathscr{F}(x) \cap \mathscr{F}(y) ,$$

alors on dit que l'archiphonème défini par le second membre de la dernière égalité est *réalisé*. On en déduit l'existence d'un phonème, à savoir $(\mathscr{C}(z), \mathscr{F}(z))$, qui admet comme composante relationnelle l'archiphonème $\mathscr{F}(x) \cap \mathscr{F}(y)$.

A chaque type d'opposition entre $\mathscr{F}(x)$ et $\mathscr{F}(y)$ correspond un certain type d'archiphonème. Si $\mathscr{F}(x) = \mathscr{F}(y)$, alors l'archiphonème associé est $\mathscr{F}(x)$ lui-même. Si $\mathscr{F}(x) \cap \mathscr{F}(y) = 0$, alors l'archiphonème associé est vide. Si $\mathscr{F}(x) \subset \mathscr{F}(y)$, l'archiphonème associé est *réalisé* ; en effet, on peut prendre $z = x$. Si $\mathscr{F}(y) \subset \mathscr{F}(x)$, l'archiphonème associé est aussi réalisé, comme on le voit en posant $z = y$.

Pour les notions de neutralisation et d'archiphonème voir aussi [36], en ce qui concerne l'aspect linguistique.

17. Notion de système phonologique

Dans ce qui suit nous suivons l'ordre des idées de [32], avec certaines améliorations et précisions.

Soit $\mathscr{E}(\mathscr{S})$ le monoïde libre engendré par l'ensemble $\mathscr{S}$ des sons abstraits. Parmi les éléments de $\mathscr{E}(\mathscr{S})$ il y a aussi la séquence vide ω, jouissant de la propriété que $x\omega = \omega x = x$ quel que soit $x \in \mathscr{E}(\mathscr{S})$. Désignons par $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ la partie de $\mathscr{E}(\mathscr{S})$ formée par les séquences repérées de sons abstraits.

Soit R une relation de congruence dans $\mathscr{E}(\mathscr{S})$ (pour la notion de congruence voir le § 30 du chapitre I) telle que $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ soit fermé par rapport à R (c'est-à-dire que pour $x \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ et xRy on a $y \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$). Le système $\{\mathscr{E}(\mathscr{S}), \mathscr{F}(\mathscr{S}), R\}$ des objets ainsi définis est, par définition, un *système phonologique* ; c'est un système phonologique du langage dont les phrases sont les éléments de $\mathscr{F}(\mathscr{S})$. La restriction de R à $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ (c'est-à-dire la relation R considérée seulement pour les éléments de $\mathscr{F}(\mathscr{S})$) sera interprétée comme une relation de synonymie, donc elle est une extension de la relation R du paragraphe 14.

En vertu de la proposition 19 du chapitre I, pour $x, y, z, w \in \mathscr{E}(\mathscr{S})$, xRy et zRw on a aussi $xzRyw$. Donc, en partant de certaines paires de séquences repérées synonymes, on obtient une infinité de ces paires.

La fermeture de $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ par rapport à R veut dire que la synonymie entre y et $x \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ implique le caractère repéré de y, ce qui est d'ailleurs exigé par la notion même de synonymie. Le choix de l'ensemble $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ et de la relation R est influencé, évidemment, par la sémantique et la syntaxe.

18. Variantes

Etant données les parties $X_1, X_2, ..., X_n$ de $\mathscr{E}(\mathscr{S})$, on désigne par $X_1 X_2 ... X_n$ l'ensemble des séquences de la forme $x_1 x_2 ... x_n$, où $x_i \in X_i$ pour $i = 1, 2, ..., n$. Si $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$, alors on pose $X_1 X_2 ... X_n = X^n$.

Dans ce qui suit, tous les demi-groupes considérés contiennent la séquence vide ω.

Soit X une partie de $\mathscr{E}(\mathscr{S})$. Le demi-groupe $D(X)$ engendré par X est, par définition, le plus petit sous-demi-groupe de $\mathscr{E}(\mathscr{S})$ qui contient l'ensemble X, c'est-à-dire que $D(X)$ est l'intersection de tous les sous-demi-groupes de $\mathscr{E}(\mathscr{S})$ qui contiennent l'ensemble X.

PROPOSITION 14. *Le demi-groupe $D(X)$ engendré par X coïncide avec l'ensemble*

$$A = X^0 \cup X^1 \cup \cdots \cup X^n \cup \cdots$$

où $X^0 = \{\omega\}$.

Démonstration. Si Y est un demi-groupe contenant X, alors Y contient aussi l'ensemble X^n, quel que soit n entier non négatif, donc $A \subseteq Y$, d'où $A \subseteq \cap\, Y$, où Y parcourt tous les demi-groupes contenant X ; c'est-à-dire que $A \subseteq D(X)$. Mais il est aisé de voir que A est aussi un demi-groupe contenant X, donc $D(X) \subseteq A$. Il s'ensuit que $D(X) = A$.

On dira que les séquences x et y se trouvent en *relation de variation* ou que x (resp. y) est une *variante* de y (resp. x) et on écrira $x\mu y$ si, quelles que soient les séquences z et w, on a les deux implications suivantes :

1) Si $zxw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$, alors $zxwRzyw$;
2) Si $zyw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$, alors $zxwRzyw$.

PROPOSITION 15. *Si $x\mu y$ et si $x \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ ou $y \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$, alors on a xRy.*

Démonstration. En effet, il suffit de prendre, dans la définition de la relation de variation, $z = w = \omega$.

PROPOSITION 16. *La relation de variation est une relation de congruence dans $\mathscr{E}(\mathscr{S})$.*

Démonstration. En vertu de la réflexivité de R, la relation μ est réflexive. La symétrie du μ est une conséquence de la définition de μ et de la symétrie de R. Supposons maintenant que $x\mu y$ et $y\mu z$. Soit, d'autre part, $uxw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$. Du fait que $x\mu y$, on déduit $uxwRuyw$, donc, puisque $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ est fermé par rapport à R, $uyw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$. Du fait que $y\mu z$ on déduit maintenant que $uywRuzw$ et, en tenant compte de la transitivité de R, on déduit que $uxwRuzw$. On a donc établi l'implication $uxw \in \mathscr{F}(\mathscr{S}) \Rightarrow uxwRuzw$. D'une manière analogue on établit l'implication $uzw \in \mathscr{F}(\mathscr{S}) \Rightarrow uxwRuzw$. Donc la relation μ est transitive ; elle est une relation d'équivalence dans $\mathscr{E}(\mathscr{S})$.

Supposons maintenant que $x\mu y$ et démontrons que $xv\mu yv$ quelle que soit $v \in \mathscr{E}(\mathscr{S})$. Supposons que $zxvw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$. Du fait que $x\mu y$ il s'ensuit que $zxvwRzyvw$. D'autre part, si $zyvw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$, on a aussi, en vertu du fait que $x\mu y$, la relation $zxvwRzyvw$. Il en résulte que $xv\mu yv$ et la relation μ est invariante à droite. D'une manière analogue on prouve que μ est invariante à gauche, elle est donc une relation de congruence.

Remarque. Les séquences parasites par rapport à $\mathscr{F}(\mathscr{S})$, c'est-à-dire les séquences qui ne sont contenues dans aucune séquence de $\mathscr{F}(\mathscr{S})$, forment une seule classe de congruence.

PROPOSITION 17. *L'ensemble $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ est fermé par rapport à μ.*

Démonstration. Supposons que $x \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ et $x\mu y$. En vertu de la proposition 15, on a xRy. Mais $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ est fermé par rapport à R, donc $y \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$.

19. Variantes au sens large

La relation de variation μ correspond au rapport de variation libre, bien connu en analyse phonématique. Mais on sait que deux séquences sonores sont considérées en analyse phonématique comme variantes (allophones) d'une même entité non seulement lorsqu'elles se trouvent en variation libre, mais aussi dans certaines situations de distribution complémentaire (pour ce type de distribution, voir le § 34 du chapitre I). Pour inclure aussi cette situation, nous allons introduire une extension de la relation μ, à savoir : Les séquences x et y se trouvent, par définition, en *relation de variation au sens large* si quelles que soient les séquences z et w telles que $zxw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ et $zyw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$, on a $zxwRzyw$. On dit, dans ce cas, que x (resp. y) est une *variante au sens large* de y (resp. x) et on écrit xvy.

PROPOSITION 18. *Si x est une variante de y, alors x est une variante au sens large de y, mais la réciproque n'est pas vraie.*

Démonstration. Si $x\mu y$, $zxw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ et $zyw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$, alors on peut appliquer chacune des implications 1) et 2) de la définition de μ et on obtient $zxwRzyw$; donc on a xvy.

Pour prouver que la réciproque n'est pas vraie, soient $\mathscr{S} = \{a, b\}$ et $\mathscr{F}(\mathscr{S}) = \{aaa, aab, aba, abb\}$. Convenons que R soit la relation de décomposition de $\mathscr{E}(\mathscr{S})$ en classes de ρ-équivalence (distribution au sens large ; § 29 du chapitre I). Comme on sait (§ 30 du chapitre I), R est, dans ce cas, une relation de congruence et, en vertu des propositions 20 et 22 du chapitre I, $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ est fermé par rapport à R.

Prenons maintenant $x = b$ et $y = a$. Pour avoir $zxw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ et $zyw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ il faut et il suffit qu'on ait l'une des trois situations suivantes : $z = a$, $w = a$; $z = aa$, $w = \omega$; $z = ab$, $w = \omega$. Dans chacune de ces trois situations on constate que $zxwRzyw$, donc xvy. D'autre part, si $z = \omega$ et $w = aa$, on constate que $zxw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ — car $zxw = aaa$ — mais on n'a pas $zxwRzyw$, car zyw ($= baa$) n'appartient pas à $\mathscr{F}(\mathscr{S})$, donc ne peut pas se trouver dans la même classe de distribution au sens large que zxw. Il résulte qu'on n'a pas $x\mu y$.

Remarque. D'après la proposition 15, si x ou $y \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ et $x\mu y$, alors xRy. Mais dans la démonstration exposée ci-dessus on a aussi l'implication

$$xRy \Rightarrow x\mu y .$$

En effet, si x et y se trouvent dans la même classe de distribution au sens large, alors pour $zxw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ on a $zxwRzyw$, en vertu de la proposition 18 du chapitre I ; pour le même motif, si $zyw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$, alors on a de nouveau $zxwRzyw$.

20. L'infériorité des variantes au sens large

Parfois, le phonème est défini comme un ensemble de sons qui se trouvent en variation libre ou en distribution complémentaire ; c'est-à-dire, qu'on considère que deux séquences x et y appartiennent au même phonème si et seulement si xvy, car les appartenances $zxw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$, $zyw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ ne se réalisent jamais si x et y sont en distribution complémentaire, donc l'implication désirée est satisfaite. Mais on arrive ainsi à des ambiguïtés, car la relation v n'est pas une relation d'équivalence. En effet, on a la

PROPOSITION 19. *La relation de variation au sens large n'est pas transitive.*

Démonstration. Soient $\mathscr{S} = \{a, b, c, d, e, f\}$ et $\mathscr{F}(\mathscr{S}) = \{ae, ce, fa, cf, dbe, dae, dce, fae\}$. Convenons que R est la relation de décomposition de $\mathscr{E}(\mathscr{S})$ en classes de distribution au sens large. Nous allons montrer que pour $x = a$, $y = b$ et $u = c$ on a xvy et yvu, mais on n'a pas xvu. En effet, on a $zaw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ et $zbw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ si et seulement si $z = d$ et $w = e$. Mais on a $dbeRdae$, car dbe et dae sont des séquences repérées dont le seul contexte admis est le contexte vide. On a établi ainsi que xvy. On a aussi yvu, car les appartenances $zbw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ et $zcw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ ont lieu si et seulement si $z = d$ et $w = e$ et, d'autre part, on a $dbeRdce$. Mais on n'a pas xvu, car pour $z = \omega$ et $w = e$ on a $zxw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ et $zuw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$, sans avoir $zxwRzuw$; en effet, zxw est admise par le contexte (f, ω), tandis que zuw n'est pas admise par ce contexte.

21. Base phonématique et phonèmes

Soit $X \subseteq \mathscr{E}(\mathscr{S})$. On dira que X est une *base* pour le système phonologique $\{\mathscr{E}(\mathscr{S}), \mathscr{F}(\mathscr{S}), R\}$, s'il existe une partie $Y \subseteq \mathscr{E}(\mathscr{S})$ jouissant des trois propriétés suivantes :

1) $Y \subseteq D(X)$;

2) Si $x \in X$, $y \in Y$ et $u, v \in \mathscr{E}(\mathscr{S})$ (l'une au moins des séquences u et v étant non vide) alors on ne peut pas avoir $x = uyv$ (c'est-à-dire, une séquence de Y ne peut pas être une partie stricte d'une séquence de X) ;

3) $\mathscr{F}(\mathscr{S}) \subseteq D(\mu(Y))$, où par $\mu(Y)$ on a désigné l'ensemble des variantes des séquences de Y.

En vertu de la proposition 14, la condition 1) revient à dire que les éléments de Y sont des séquences d'éléments de X. La condition 2) exprime un caractère minimal des séquences appartenant à la base X, tandis que la condition 3) exprime la possibilité de représenter chaque phrase du langage considéré comme une séquence de variantes de certaines séquences de Y. Si, comme le fait S. Kanger [32], on interprète les éléments de Y comme des mots dont la prononciation est strictement standardisée, alors $\mu(Y)$ contient toutes les variantes de prononciation des mots de Y, donc, chaque phrase du langage $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ est une séquence de variantes des mots de Y.

Dans le cas particulier où la relation $x\mu y$ n'est vérifiée que si $x = y$, la base X est telle que chaque phrase de $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ est une séquence d'éléments de X ; c'est une conséquence immédiate de la proposition 14 et du fait que les relations $\mathscr{F}(\mathscr{S}) \subseteq D(Y)$ et $Y \subseteq D(X)$ entraînent la relation $\mathscr{F}(\mathscr{S}) \subseteq D(X)$ (car

$$D(D(X)) = D(X),$$

tandis que $M \subseteq N$ entraîne $D(M) \subseteq D(N)$).

Parmi les différentes bases d'un système phonologique, les plus importantes sont justement celles qui contiennent le plus petit nombre d'éléments. On arrive alors à la notion suivante : Une base X est, par définition, une *base phonématique* s'il n'existe aucune autre base dont le nombre cardinal soit inférieur à celui de X. Evidemment, on peut avoir plusieurs bases phonématiques d'un même système phonologique. On peut alors préférer celle dont l'ensemble Y associé a le plus petit cardinal ou on peut prendre en considération d'autres critères.

Si, parmi les bases d'un système phonologique, il y en a au moins une qui est finie, alors on dit qu'on a un *système à base phonématique finie*. L'ensemble des éléments d'une base phonématique constituent, dans ce cas, un *inventaire phonématique* du système considéré, tandis que les éléments mêmes de cette base sont les *phonèmes* du système phonologique considéré. Le nombre des phonèmes d'un système phonologique sera, par définition, l'*indice* de ce système.

23. Problèmes d'existence et d'unicité de l'inventaire phonématique

PROPOSITION 20. *Tout système phonologique est à base phonématique finie. L'indice du système* $\{\mathscr{E}(\mathscr{S}), \mathscr{F}(\mathscr{S}), R\}$ *ne peut dépasser le nombre des éléments de* $\mathscr{S}$, *qui est toujours une base.*

Démonstration. L'ensemble $\mathscr{S}$ est une base du système, car on a toujours, pour $Y = \mathscr{F}(\mathscr{S})$, $\mathscr{F}(\mathscr{S}) \subseteq D(\mathscr{S})$ et $\mathscr{F}(\mathscr{S}) \subseteq D(\mu(\mathscr{F}(\mathscr{S})))$. En outre, aucune séquence non vide ne peut être une partie stricte d'une séquence formée d'un seul élément. Mais $\mathscr{S}$ est, par hypothèse, un ensemble fini, donc il est une base finie et l'indice ne peut pas dépasser le nombre des éléments de $\mathscr{S}$.

PROPOSITION 21. *Si x et y ne sont pas parasites par rapport à $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ et si l'on a l'implication $xRy \Rightarrow x = y$, alors on a aussi l'implication $x\mu y \Rightarrow x = y$.* (Par séquences parasites on entend des phrases parasites au sens du chapitre I, § 40.)

Démonstration. Supposons que $xRy \Rightarrow x = y$ et que $x\mu y$. Si $zxw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$, alors on a $zxwRzyw$, donc $zxw = zyw$, donc $x = y$. De la même façon on trouve, pour $zyw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$, que $x = y$. D'autre part, il existe certainement z et w tels que $zxw \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$, car x n'est pas parasite.

PROPOSITION 22. *Il existe un système phonologique dont la base phonématique n'est pas uniquement déterminée.*

Démonstration. Soient $\mathscr{S} = \{ a, b \}$ et $\mathscr{F}(\mathscr{S}) = \{ ab, abab, ..., (ab)^n, ..., ba, baba, ..., (ba)^n, ... \}$. Pour $x, y \in \mathscr{E}(\mathscr{S})$, posons xRy si et seulement si $x = y$. En vertu de la proposition 21, pour x et y non parasites on a $x\mu y$ si et seulement si $x = y$. En vertu de la proposition 20, on a la base $B = \{ a, b \}$. Il est aisé de voir que B est une base phonématique, c'est-à-dire que l'indice du système considéré est égal à 2. Mais il y a encore une base phonématique ; c'est l'ensemble $B' = \{ ab, ba \}$, car chaque phrase de $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ est une séquence finie d'éléments de B'.

Dans l'exemple ci-dessus, il est facile de choisir parmi les deux bases ; c'est B qui est préférable, pour des raisons d'économie de symboles.

On pourrait croire que l'ensemble $\mathscr{S}$ est toujours une base phonématique. Mais il est facile de donner un exemple où $\mathscr{S}$ n'est pas une base phonématique. On a, en effet, la

PROPOSITION 23. *Il existe un système phonologique dont l'indice est strictement inférieur au nombre des éléments de $\mathscr{S}$.*

Démonstration. Soient $\mathscr{S} = \{ a, b \}$ et $\mathscr{F}(\mathscr{S}) = \{ ab, (ab)^2, ..., (ab)^n, ... \}$. Pour $x, y \in \mathscr{E}(\mathscr{S})$, posons xRy si et seulement si $x = y$. En vertu de la proposition 21, pour x et y non parasites on a $x\mu y$ si et seulement si $x = y$. En vertu de la proposition 20, on a la base $B = \{ a, b \}$. Mais cette base n'est pas phonématique, car il y a une base formée d'une seule séquence, à savoir $B' = \{ ab \}$. Donc l'indice du système considéré est égal à 1.

23. Quelques difficultés concernant l'application aux langues naturelles

En ce qui concerne l'inventaire phonématique d'une langue naturelle, les deux exigences suivantes sont également importantes :

a) Le nombre des phonèmes doit être le plus petit possible ;

b) Chaque phrase de la langue doit être une séquence de variantes des phonèmes.

La définition de l'inventaire phonématique, donnée ci-dessus, est en accord avec l'exigence *a*), mais elle ne l'est pas avec *b*). En effet, d'après les définitions données, chaque phrase d'un langage est une séquence de variantes des séquences de phonèmes, mais n'est pas toujours une séquence de variantes des phonèmes. En particulier, la condition *b*) n'est pas satisfaite lorsqu'on considère des traits prosodiques.

On pourrait satisfaire à la condition *b*) en modifiant la définition de la base de la manière suivante : X est une base du système phonologique $\{\mathscr{E}(\mathscr{S}), \mathscr{F}(\mathscr{S}), R\}$ si aucune séquence de $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ n'est une partie stricte d'une séquence de X et si l'on a l'inclusion $\mathscr{F}(\mathscr{S}) \subseteq D(\mu(X))$.

Mais dans ce cas, la condition *a*) n'est plus satisfaite, comme le montre l'exemple suivant tiré de l'anglais. Désignons par o^n (resp. i^n) l'expression formée par le son o (resp. i) n fois accentué ; o^3 n'est pas une variante de o^1, car il y a des contextes où le remplacement de o^3 par o^1 ne conduit pas à une séquence synonymique : i^2mpo^3rt et i^2mpo^1rt ne sont pas synonymes. D'une manière pareille, o^5 n'est pas une variante de o^3ou de o^1, car i^4mpo^5rt n'est synonyme ni de i^4mpo^3rt, ni de i^4mpo^1rt. En continuant ainsi, on constate que le son o, multiplement accentué, engendre un grand nombre de phonèmes. Mais dès qu'on renonce à la condition *b*), on a seulement deux phonèmes engendrés par le son o, l'un accentué, l'autre non accentué (pour pouvoir « résoudre » l'homonymie d'un mot comme *import*).

24. Binarisme

Nous retournons maintenant au point de vue développé dans les §§ 2-16.

Selon Roman Jakobson ([28], [29]), la notion centrale de l'analyse phonématique n'est pas celle de phonème, mais celle qu'il appelle « trait distinctif binaire ». En utilisant la terminologie adoptée ci-dessus, le trait distinctif binaire correspond à une valeur pertinente, dans l'hypothèse que chaque ensemble de valeurs homogènes est formé exactement de deux éléments (l'un noté par $+$, l'autre par $-$, donc l'un positif, l'autre négatif). La composante relationnelle de chaque phonème est donc un ensemble de tels « traits distinctifs binaires ». Cette hypothèse est justement l'une des idées centrales de la théorie de R. Jakobson.

Dans un travail publié il y a 26 ans, cet auteur écrit ([27], p. 35) :

« La logique distingue deux espèces d'oppositions. Le premier type, opposition des termes *contradictoires*, est une relation entre la présence et l'absence d'un même élément. Exemple : voyelles longues s'opposant aux voyelles sans longueur. Le second type, opposition des termes *contraires*, est une relation entre deux éléments qui font partie d'un même genre, et qui diffèrent le plus entre eux ; ou qui, présentant un caractère spécifique susceptible de degrés, en possèdent respectivement le maximum ou le minimum. Exemple : voyelles aiguës s'opposant aux graves. »

Les descriptions données dans [13], [14], [18], [26], [40], [42], [43], [45] ramènent l'analyse phonématique à des termes exclusivement contradictoires et c'est ainsi que se manifeste le binarisme linguistique. Les polémiques concernant cette question n'ont toujours pas cessé ([19], [25]). Du point de vue de la description donnée dans le présent chapitre, deux valeurs homogènes v_1 et v_2 sont des termes contradictoires si l'ensemble $\mathscr{V}_i$ qui les contient est formée exclusivement de ces deux éléments ; si, au contraire, $\mathscr{V}_i$ contient au moins une valeur autre que v_1 et v_2, alors l'existence des termes contradictoires est exclue. Par exemple, si $\mathscr{V}_i = \{$ *sourd*, *sonore* $\}$, alors *sourd* et *sonore* sont des termes contradictoires ; mais si $\mathscr{V}_i = \{$ *sourd*, *neutre*, *sonore* $\}$, alors *sourd* et *sonore* sont des termes contraires, tandis que *sourd* et *neutre* ou *neutre* et *sonore* ne sont ni contradictoires, ni contraires.

Les descriptions binaires présentent beaucoup d'avantages non seulement pour des raisons linguistiques, mais aussi pour des raisons mathématiques. Elles permettent des analogies élégantes avec la théorie des codes binaires — extrêmement développée — et avec la théorie des algèbres et des fonctions de Boole (voir aussi le travail de L. J. Prieto [41]).

En retenant seulement la composante relationnelle des phonèmes, le tableau 1 donne la représentation binaire des phonèmes consonantiques de l'anglais [20].

TABLEAU 1

	p	*b*	*m*	*f*	*v*	*k*	*g*	*t*	*d*	*θ*	*ð*	*n*	*s*	*z*	*č*	*ǯ*	*s*	*ž*
Vocalique........	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
Consonantique ...	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Grave	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
Compacte	−	−	−	−	−	+	+	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+
Strident	−	−	−	+	+	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+
Nasal	−	−	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	−	−	−	−	−	−
Continu	−	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	+	+	−	−	+	+
Sonore	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+

25. Simplicité d'une description phonologique

Un ensemble A de phonèmes constitue, par définition, une *classe naturelle*, si le nombre de valeurs qui sont communes aux phonèmes de A et nécessaires pour caractériser l'ensemble A est inférieur au nombre des valeurs qui caractérisent un phonème quelconque de l'ensemble A.

Il peut arriver que l'ensemble des valeurs communes aux phonèmes de A ne soit pas caractéristique de A ; dans ce cas A n'est pas une classe naturelle (voir l'exemple 4 ci-dessous).

Exemple 1. L'ensemble de toutes les consonnes de l'anglais est une classe naturelle, car elle est caractérisée par les valeurs *consonantique* et *non vocalique*, tandis qu'aucune consonne ne peut être caractérisée par deux valeurs seulement.

Exemple 2. L'ensemble $\{ s, z, \check{c}, \check{ʒ}, \check{s}, \check{z} \}$ est caractérisé par deux valeurs seulement : *non grave* et *strident*. Cet ensemble est donc une classe naturelle, car aucun de ses éléments ne peut être caractérisé par deux valeurs seulement.

Exemple 3. L'ensemble $\{ p, b, f, v, m \}$ est caractérisé par les valeurs : *grave* et *non compact*. Elle est donc aussi une classe naturelle.

Exemple 4. L'ensemble $\{ m, s \}$ n'est pas une classe naturelle, car les valeurs communes à m et s sont : *non vocalique*, *consonantique* et *non compact*, mais il y a encore d'autres consonnes, par exemple p, b, n, f, v, t, d, qui possèdent aussi ces trois valeurs.

La notion de classe naturelle a été introduite par Morris Halle [20]. Il propose de mesurer la simplicité d'une description phonologique par le nombre de valeurs utilisées : une description est plus simple lorsque ce nombre est plus petit. Un exemple significatif est, dans ce sens, la formation du pluriel des substantifs anglais. En voici une description possible : *a*) si l'élément final du radical est non vocalique, consonantique, non grave et strident, alors on ajoute [*iz*] ; *b*) si l'élément final du radical est non vocalique, consonantique, sonore et non strident ou s'il est non vocalique, consonantique, sonore, strident et grave, alors on ajoute [*s*] ; *c*) si l'élément final du radical est vocalique ou s'il est non vocalique, consonantique, sonore et non strident ou, enfin, s'il est non vocalique, consonantique, sonore, strident et grave, alors on ajoute [*z*]. On a encore une autre description, à savoir : A) si l'élément final du radical est non vocalique, consonantique, non grave et strident, alors on ajoute [*iz*] ; B) si l'élément final du radical est non vocalique, consonantique et sonore, alors on ajoute [*s*] ; C) dans tous les autres cas on ajoute [*z*].

Evidemment, la deuxième description est plus simple que la première ; elle n'utilise que cinq valeurs, tandis que la première en utilise sept. Il est aisé de voir que cette économie a été obtenue par une meilleure classification des situations possibles [20]. Une description phonologique n'étant jamais la seule possible [12], un choix s'impose.

26. Algèbres de Boole

Considérons un ensemble A et deux opérations binaires définies dans A, l'une notée par $\vee$ et l'autre par $\wedge$. On associe donc à chaque couple d'éléments

x, y de A deux éléments bien déterminés de A, l'un désigné par $x \vee y$ et l'autre par $x \wedge y$. On suppose que les cinq conditions suivantes sont remplies, quels que soient x, y et z de A :

1) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
2) $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$;
3) il existe dans A un élément — désigné par e — tel que $x \wedge e = x$;
4) il existe dans A un élément — désigné par 0 — tel que $x \vee 0 \equiv 0 \vee x = x$;
5) pour chaque $x \in A$ il existe dans A au moins un élément — appelé un complémentaire de x et désigné par x' — tel que $x \wedge x' = 0$ et
$$x \vee x' = e .$$

Un ensemble A, muni de deux opérations binaires $\vee$ et $\wedge$ jouissant des cinq propriétés énoncées ci-dessus est, par définition, une *algèbre de Boole*.

PROPOSITION 24. *Si A est une algèbre de Boole, alors on a $x \wedge x = x$, quel que soit $x \in A$.*

Démonstration. En utilisant les propriétés 4, 5, 1 et de nouveau 5, on obtient

$$x \wedge x = (x \wedge x) \vee 0 = (x \wedge x) \vee (x \wedge x') = x \wedge (x \vee x') = x \wedge e = x .$$

PROPOSITION 25. *Si A est une algèbre de Boole, alors on a, quel que soit $x \in A$, $(x')' = x$.*

Démonstration. En utilisant la proposition 24 et les cinq propriétés de la définition, on obtient

$$\begin{aligned}(x')' &= 0 \vee [(x')' \wedge (x')'] = [x' \wedge (x')'] \vee [(x')' \wedge (x')'] \\ &= (x' \vee (x')') \wedge (x')' = e \wedge (x')' = (x \vee x') \wedge (x')' \\ &= [x \wedge (x')'] \vee 0 = 0 \vee [x \wedge (x')'] = (x \wedge x') \vee (x \wedge (x')') \\ &= x \wedge (x' \vee (x')') = x \wedge e = x .\end{aligned}$$

PROPOSITION 26. *Si A est une algèbre de Boole, alors on a $x' \wedge x = 0$ et $x' \vee x = e$, quel que soit $x \in A$.*

Démonstration. En effet, on a, en vertu de la proposition 25,

$$x' \wedge x = x' \wedge (x')'$$

donc, en vertu de la propriété 5 de la définition, $x' \wedge x = 0$. D'autre part, en utilisant les mêmes faits, on a $x' \vee x = x' \vee (x')' = e$.

PROPOSITION 27. *Si A est une algèbre de Boole, alors pour tout $x \in A$, l'élément x' associé est uniquement déterminé.*

Démonstration. Soient x_1' et x_2' deux complémentaires de x. En vertu de la proposition 25, on a

$$x_1' = ((x')')' = x_2' .$$

Proposition 28. *Si A est une algèbre de Boole, alors on a*

$$x \wedge 0 = 0 = 0 \wedge x\,,$$

quel que soit $x \in A$.

Démonstration. On a

$$0 = x \wedge x' = x \wedge (x' \vee 0) = (x \wedge x') \vee (x \wedge 0) = 0 \vee (x \wedge 0) = x \wedge 0$$

et

$$0 = y \wedge y' = (0 \vee y) \wedge y' = (0 \wedge y') \vee (y \wedge y') = (0 \wedge y') \vee 0 = 0 \wedge y'.$$

Mais, en vertu de la proposition 25, pour $y = x'$ on a $x = y'$ et la proposition 28 est établie.

Corollaire 1. *Si* $0 = e$, *alors on a* $x = 0$ *quel que soit* $x \in A$.

Démonstration. On a

$$0 = 0 \vee 0 = 0 \vee (x \wedge 0) = 0 \vee (x \wedge e) = x \wedge e = x.$$

Corollaire 2. *Si* $0 \neq e$, *alors* $e \wedge x = x$, *quel que soit* $x \in A$.

Démonstration. On a

$$e \wedge x = (x \vee x') \wedge x = (x \wedge x) \vee (x' \wedge x) = x \vee 0 = x.$$

Exemple d'algèbre de Boole. Soit E un ensemble quelconque et désignons par $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Il est aisé de voir — nous laissons ce soin au lecture — que $\mathscr{P}(E)$, muni des opérations de réunion et d'intersection, est une algèbre de Boole ($\cup$ joue le rôle de $\vee$, tandis que $\cap$ jouit le rôle de $\wedge$). Le rôle de e est ici joué par l'ensemble total E, tandis que le rôle de 0 est joué par la partie vide de E. Enfin, si $M \in \mathscr{P}(E)$, alors M' est le complémentaire de M par rapport à E. Il est aisé aussi de vérifier — sur ce cas particulier — les propositions démontrées ci-dessus.

Pour la définition et les propriétés énoncées ci-dessus des algèbres de Boole voir [9] et [16] qui font une étude systématique et approfondie de ces structures mathématiques.

27. Algèbre de Boole engendrée par une classe d'ensembles

Considérons l'ensemble E et les propriétés α, β, γ, ... appliquables aux éléments de E. Supposons que chaque élément de E possède au moins une des propriétés considérées. Désignons par a (resp. b, c, ...) l'ensemble des éléments de E qui possèdent la propriété α (respectivement, β, γ, ...). Rappelons qu'on note par $\bar{a}$ (respectivement $\bar{b}$, $\bar{c}$, ...) le complémentaire de l'ensemble a (respectivement b, c, ...) par rapport à E. Pour simplifier l'écriture, on va noter, dans ce paragraphe, l'intersection $\cap$ par la simple juxtaposition.

Considérons maintenant tous les ensembles qu'on peut obtenir en partant des ensembles a, b, c, ..., par les opérations de réunion, intersection et passage au complémentaire. Il est aisé de voir que la classe des ensembles ainsi obtenus est une algèbre de Boole, dont l'élément e est E (l'ensemble des éléments de E qui possèdent au moins une des propriétés α, β, γ, ...) tandis que l'élément 0 est l'ensemble vide (l'ensemble des éléments de E qui ne possèdent aucune des propriétés α, β, γ, ...). L'algèbre de Boole ainsi obtenue est, par définition, *engendrée* par les ensembles a, b, c, ..., qui sont les *générateurs* de cette algèbre. On pourra dire aussi que cette algèbre de Boole est engendrée par les propriétés α, β, γ, ... Par exemple, si l'on a seulement deux propriétés, α et β, l'algèbre de Boole qu'elles engendrent est formée des ensembles suivants : 0, E, a, b, ab, $a\bar{b}$, $\bar{a}b$ (l'ensemble $\bar{a}\bar{b}$ est vide).

Désignons par $\mathscr{B}(\alpha, \beta, \gamma, ...)$ l'algèbre de Boole engendrée par les propriétés α, β, γ, ... Toute intersection où chacun des ensembles a, b, c, ... est représenté soit par lui-même, soit par son complémentaire, est par définition un *ensemble minimal de* $\mathscr{B}(\alpha, \beta, \gamma, ...)$. On peut montrer que si le nombre des propriétés α, β, γ, ... est égal à n, alors le nombre des ensembles minimaux de $\mathscr{B}(\alpha, \beta, \gamma, ...)$ est inférieur ou égal à 2^n. Par exemple, si $n = 3$, alors on a les ensembles minimaux suivants : abc, $\bar{a}bc$, $a\bar{b}c$, $ab\bar{c}$, $\bar{a}\bar{b}c$, $\bar{a}b\bar{c}$, $a\bar{b}\bar{c}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$. A l'aide des ensembles minimaux, on peut donner à la description ci-dessus une représentation dans l'esprit de la théorie de l'information (tableau 2).

TABLEAU 2

	abc	$\bar{a}bc$	$a\bar{b}c$	$\bar{a}\bar{b}c$	$ab\bar{c}$	$\bar{a}b\bar{c}$	$a\bar{b}\bar{c}$	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}$
a	+	−	+	−	+	−	+	−
b	+		−		+		−	
c	+				−			

C'est justement une représentation de ce type qu'on utilise dans certaines descriptions phonologiques, par exemple dans [14]. En effet, si nous envisageons des propriétés de nature phonique, en adoptant la description phonologique binaire on obtient, à l'aide des notions que nous venons d'exposer, une image très systématique des phonèmes, sous leur aspect relationnel.

28. Phonèmes et algèbres de Boole

Voici, par exemple, une représentation du système consonantique allemand [49]. Considérons les propriétés : α = propriété d'être vocalique, β = pr.

d'être consonantique, γ = pr. d'être compact, δ = pr. d'être grave, λ = pr. d'être nasal, μ = pr. d'être continu, ν = pr. d'être strident, ρ = pr. d'être tendu. Désignons par $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1$ et ρ_1 les ensembles correspondants de phonèmes. Le système consonantique allemand est une partie de l'algèbre de Boole $\mathscr{B}$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \nu, \rho)$. En effet, on a :

$m - \beta_1\,\delta_1\,\lambda_1$	$v - \beta_1\,\delta_1\,\mu_1$	$s - \beta_1\,\mu_1\,\rho_1$	$k - \beta_1\,\gamma_1\,\delta_1\,\rho_1$
$p - \beta_1\,\delta_1\,\rho_1$	$n - \beta_1\,\lambda_1$	$z - \beta_1\,\mu_1$	$g - \beta_1\,\gamma_1\,\delta_1$
$b - \beta_1\,\delta_1$	$t - \beta_1\,\rho_1$	$\hat{s} - \beta_1\,\nu_1$	$x - \beta_1\,\gamma_1\,\mu_1\,\rho_1$
$f - \beta_1\,\delta_1\,\mu_1\,\rho_1$	$d - \beta_1$	$\eta - \beta_1\,\gamma_1\,\delta_1\,\lambda_1$	$\int - \beta_1\,\gamma_1$
$r - \alpha_1\,\beta_1$	$l - \alpha_1\,\beta_1\,\mu_1$	$j - \beta_1\,\gamma_1\,\mu_1$	$\widehat{f} - \beta_1\,\delta_1\,\nu_1$

L'algèbre de Boole $\mathscr{B}$ $(\alpha, \beta, \gamma, ...)$ admet ce qu'on appelle un « diagramme de Hasse » ; on représente chaque élément de l'algèbre par un point dans le plan et on considère une flèche allant du point P_1 au point P_2 si et seulement si chaque propriété appartenant aux éléments de l'ensemble associé à P_2 appartient aussi aux éléments de l'ensemble associé à P_1, mais il existe une propriété — et une seule — appartenant aux éléments de l'ensemble associé à P_1, mais pas à ceux de l'ensemble associé à P_2. On a alors, pour le système consonantique allemand, le diagramme donné à la figure 1.

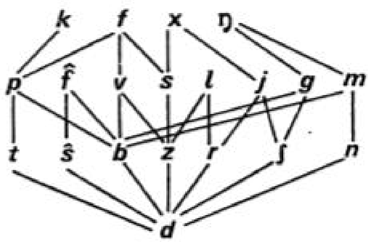


FIG. 1.

Ce diagramme présente quatre niveaux, le niveau de rang i $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ contenant les consonnes qui sont caractérisées par i propriétés. Cette représentation répond aux exigences exprimées par Bröndal, qui a esquissé dans [11] la possibilité d'une hiérarchie des phonèmes, « c'est-à-dire des différences systématiques de rang ou de plan entre phonèmes de complexité variable : entre types plus abstraits, définis de manière simple, et types plus concrets ou complexes, définis par des éléments plus nombreux ». En utilisant quatre propriétés articulatoires, à savoir « *back*, *front*, *high*, *low* » $(\beta, \varphi, \chi, \lambda)$, Bröndal a donné une description du système vocalique, en prenant comme guide le principe suivant [10] : « Il sera indispensable de déconcrétiser les notions de base, c'est-à-dire de reconnaître dans les contrastes *front-back* et *high-low* non seulement des types d'articulation physiologique, des timbres acoustiques et des représentations et images psychologiques ; il faut y avoir en même temps et comme fondement de toutes ces manifestations extérieures des *valeurs symboliques* ». C'est avec justesse que Ungeheuer considère Bröndal comme le premier qui a introduit un point de vue algébrique dans la classification des voyelles [49]. La description de Bröndal revient à considérer le système vocalique comme une partie de l'algèbre de Boole $\mathscr{B}(\beta, \varphi, \chi, \lambda)$. On a 16 types de voyelles, à savoir (pour ne plus compliquer les notations, on va noter les ensembles associés aux propriétés $\beta, \varphi, \chi, \lambda$ par les mêmes lettres) :

1) une voyelle neutre (amorphe), caractérisée par l'absence de chacune des propriétés $\beta, \varphi, \chi, \lambda$: [ə] ;

2) quatre types élémentaires de voyelles, chacun caractérisé par une seule propriété :

$$[\varepsilon] = \varphi\,,\ [a] = \beta\,,\ [v] = \chi\,,\ [\alpha] = \lambda$$

3) six voyelles distinctes, chacune caractérisée par deux propriétés :

$$[ø] = \varphi\beta\,,\ [i] = \chi\varphi\,,\ [u] = \chi\beta\,,\ [e] = \lambda\varphi\,,\ [o] = \lambda\beta\,,\ [\partial] = \chi\lambda\,;$$

4) quatre voyelles combinées, chacune caractérisée par trois propriétés :

$$[\underset{\cdot}{e}] = \chi\lambda\varphi\,,\ [\underset{\cdot}{o}] = \chi\lambda\beta\,,\ [\ddot{u}] = \varphi\beta\chi\,,\ [\ddot{o}] = \varphi\beta\lambda\,;$$

5) une voyelle polymorphe, caractérisée par les quatre propriétés considérées : la voyelle russe [ы] $= \varphi\beta\chi\lambda$.

On obtient alors le diagramme de la figure 2.

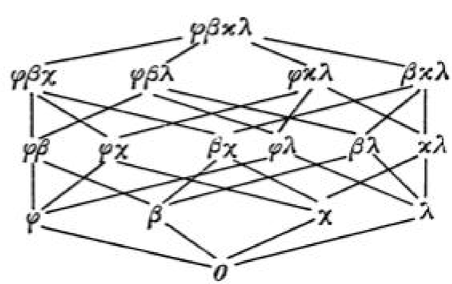


FIG. 2.

On obtient une description équivalente, en employant la méthode binaire qui nous à servi à décrire le système consonantique de l'anglais. La représentation correspondante est donnée dans le tableau

TABLEAU 3

	ə	ε	*a*	ν	α	ø	*i*	*u*	*e*	*o*	∂	*ẹ*	*ọ*	*ü*	*ö*	ы
φ	−	+	−	−	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	+
β	−	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	−	+	+	+	+
χ	−	−	−	+	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	+
λ	−	−	−	−	+	−	−	−	+	+	+	+	+	−	+	+

Une étude analogue peut être faite pour le consonantisme du roumain, en partant du travail [35]. En ce qui concerne la structure phonématique du roumain, voir aussi [1], [39], [44] et [50].

Une description des phonèmes à l'aide des fonctions de Boole se trouve dans le livre de V. Belevitch [5].

Les idées développées dans les paragraphes 27 et 28 sont, pour l'essentiel, celles de Ungeheuer [49].

Pour d'autres questions concernant l'analyse phonologique voir [6], [21] et [34].

OUVRAGES CITÉS

[1] Avram, A., *Cercetări asupra sonorității în limba română*. Editura Academiei R. P. R., București, 1961.

[2] Batog, T., « Logiczna rekonstrukcja pojecia fonemu ». *Studia Logica*, vol. 11, 1961, p. 139-183.

[3] Batog, T., « Critical remarks on Greenberg's axiomatic phonology ». *Studia Logica*, vol. 12, 1961, p. 195-205.

[4] Baudouin de Courtenay, I. A., *Vvedenie v jazykoznanie* (5e édition), Moscou, 1917.

[5] Belevitch, V., *Langage des machines et langage humain*. Collection Lebègue, 1956.

[6] Benzécri, J. P., *Linguistique mathématique*. Université de Rennes, 1964.

[7] Bloch, B., « A set of postulates for phonemic analysis ». *Language*, vol. 24, 1948, No 1.

[8] Bloomfield, L., « A set of postulates for the science of language ». *Language*, vol. 2, 1926, p. 26-31.

[9] Birkhoff, G., *Lattice Theory* (revised edition). New York, 1948.

[10] Bröndal, V., « La structure des systèmes vocaliques ». *Travaux du Cercle linguistique de Prague*, vol. 6, 1936, p. 62-74.

[11] Bröndal, V., « Structure et variabilité des systèmes morphologiques » dans *Essais de linguistique générale*, Copenhague, 1943, p. 15-24.

[12] Chao, Y. R., « The non-uniqueness of phonemic solutions of phonetic systems ». *Readings in linguistics*, New York, 1958, p. 38-54.

[13] Cherry, E. C., « Roman Jakobson's « distinctive features » as the normal coordinates of a language ». *For Roman Jakobson*, Haag, 1956.

[14] Cherry, E., Halle, M., Jakobson R., « Toward the logical description of languages in their phonemic aspects ». *Language*, vol. 29, 1953, No 1.

[15] Fischer-Jorgensen, E., « On the definition of phoneme categories ». *Acta linguistica*, vol. 7, 1952.

[16] Glivenko, V., *Théorie générale des structures*. Paris, 1938.

[17] Greenberg, J. H., « An axiomatization of the phonologic aspect of language ». *Symposium on Sociological Theory*, ed. L. Gross, Evanston, New York, 1959.

[18] Halle, M., « The strategy of phonemics ». *Word*, vol. 10, 1954, p. 197-209.

[19] Halle, M., « In the defence of the number two ». *Studies presented to J. Whatmough* (recueil d'études), 's-Gravenhage, 1957.

[20] Halle, M., « On the role of simplicity in linguistic description ». *Proceedings of the Symposia in Applied Mathematics*, vol. 12 (Structure of language and its mathematical aspects), Amer. Math. Soc., 1961, p. 89-94.

[21] Harary, F., Paper, H. H., « Toward a general calculus of phonemic distribution ». *Language*, vol. 33, 1957, p. 143-169.

[22] Harris, Z. S., *Structural linguistics*. University of Chicago Press, Fifth impression, 1961.

[23] Hockett, C. F., *A Manual of Phonology*, 1955.

[24] Hockett, C. F., « Two fundamental problems in phonemics ». *Studies in Linguistics*, vol. 7, 1959, p. 33.

[25] Horalek, H., « A criticism of the number two (Binarism) ». *Preprints of papers for the Ninth International Congress of Linguists*, August 27-31, 1962, Cambridge, Mass, p. 46-47.

[26] IVANOV, V. V., « Teorija fonologičeskih različitel'nyh priznakov ». *Novoe v lingvistike*, vol. 2, Izd. Akad, Nauk SSSR, Moskva 1962, p. 139-172.

[27] JAKOBSON, R., « Observations sur le classement phonologique des consonnes ». *Proceedings of the 3-rd International Congress of Phonetic Sciences* 1938, Ghent 1939, p. 34-41.

[28] JAKOBSON, R., FANT, G. M., HALLE, M., *Preliminaries to speech analysis : the distinctive features and their correlates*, 3-rd pr. Boston (Mass.), 1955.

[29] JAKOBSON, R., HALLE, M., *Fundamentals of language*, 's-Gravenhage, 1956.

[30] JONES, D., *The phoneme : its nature and use*. Cambridge, 1950.

[31] JONES, D., « The history and meaning of the term phoneme ». *Supplément à « Le maître phonétique »*. Juillet-décembre, 1957.

[32] KANGER, S., « The notion of a phoneme ». *Statistical Methods in Linguistics*, 1964, N° 3, p. 43-48 (Stockholm).

[33] MARCUS, S., « Un model matematic al fonemului ». *Studii şi cercetări matematice*, vol. 14, 1963, N° 3, p. 405-421.

[34] MARCUS, S., « Structures linguistiques et structures topologiques ». *Revue de mathématiques pures et appliquées*, vol. 6, 1961, N° 3, p. 501-506.

[35] MARCUS, S., VASILIU, E., « Mathématiques et phonologie. Théorie des graphes et consonantisme de la langue roumaine ». *Revue de mathématiques pures et appliquées*, vol. 5, 1960, fasc. 2, p. 319-340 et fasc. 3-4, p. 681-704.

[36] MARTINET, A., « Neutralisation et archiphonème ». *Travaux du Cercle linguistique de Prague*, vol. 6, 1936.

[37] MARTINET, A., *Economie des changements phonétiques*. Berne, 1955.

[38] PETERSON, G. E., HARARY, F., « Foundations of phonemic theory ». *Proceedings of the Symposia of Applied Mathematics*, vol. 12 (Structure of language and its mathematical aspects), Amer. Math. Soc., 1961, p. 139-165.

[39] PETROVICI, E., « Sistemul fonematic al limbii române ». *Studii şi cercetări lingvistice*, vol. 7, 1956, p. 7-20.

[40] PIOTROVSKII, R. G., « Eščio raz o differencial'nyh priznakah fonemy ». *Voprosy jazykoznanija*, 1960, N° 6.

[41] PRIETO, L. J., « Traits oppositionnels et traits contrastifs ». *Word*, vol. 10, 1954, N° 1, p. 43-59.

[42] REVZIN, I. I., *Modeli jazyka*. Izd. Akad. Nauk SSSR, Moskva, 1962.

[43] REVZIN, I. I., « K logičeskomu obosnovaniju teorii fonologičeskih priznakov ». *Voprosy jazykoznanija*, 1964, N° 5, p. 59-65.

[44] ROSETTI, A., « Despre sistemul fonologic al limbii române ». *Studii şi cercetări lingvistice*, vol. 7, 1956, p. 21-26.

[45] ŠAUMJAN, S. K., « Logičeskii analiz ponjatija fonemy ». *Logičeskie issledovanija* (recueil d'études), Izd. Akad. Nauk SSSR, Moskva, 1959, p. 159-177.

[46] ŠAUMJAN, S. K., *Problemy teoretičeskoi fonologii*. Izd. Akad. Nauk SSSR, Moskva 1962.

[47] TROUBETZKOY, N. S., *Principes de Phonologie* (traduit de l'allemand par J. CANTINEAU). Paris, 1957.

[48] TWADELL, W. F., « On defining the phoneme ». *Readings in linguistics* (recueil d'études), Washington, 1957.

[49] UNGEHEUER, G., « Das logische Fundament binärer Phonemklassifikationen ». *Studia Linguistica*, 1959, p. 69-97.

[50] VASILIU, E., *Fonologia limbii române*. Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1965.

Ajouté sur les épreuves

Pour le développement ultérieur des aspects logiques en phonologie, voir V. N. BELOOZEROV (« Formalnoe opredelenie fonemy ». *Voprosy jazykoznanija*, 1964, N° 6, p. 54-60), A. P. EVDOŠENKO (« K voprosu o primenenii stereometričeskoi modeli v oblasti fonologii ».

Issledovanija po strukturnoi tipologii, Moscou, 1963 ; « Stereometričeskoe modelirovanie i izomorfism ». *Studii de limbă moldovenească*, 1963, p. 127-153), Bertil MALMBERG (*Structural Linguistics and Human Communication. An Introduction into the Mechanism of Language and the Methodology of Linguistics*. Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963), S. MARCUS (« Sur un ouvrage de Stig Kanger concernant le phonème », *Statistical Methods in Linguistics*, 1965, N° 4, p. 27-36 ; « Le modelage mathématique en phonologie », *Cahiers de Linguistique théorique et appliquée*, vol. 3, 1966, p. 109-116), G. F. MEIER (« Auf dem Wege zu einer kybernetischen Phonemtheorie » (Vorläufige Mitteilung), *Zeitschrift für Phonetik, Sprachwissenschaft und Kommunikationsforschung*, Band 16, 1963, Heft 1-3, p. 327-335), L. NEBESKÝ (« K odnoi matematičeskoi modeli fonemy ». *Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées*, vol. 11, 1966, N° 4, p. 453-456 ; « On the notion of relevant features ». *The Prague Bulletin of Mathematical Linguistics*, 1966, N° 6, p. 35-43), R. G. PIOTROVSKII (*Modelirovanie fonologičeskih sistem i metody ih sravnenija*. Akad. Nauk SSSR, Institut jazykoznanija, Izd. Nauka, Moscou-Leningrade, 1966) et V. A. USPENSKII (« Odna model dlja ponjatija fonemy ». *Voprosy jazykoznanija*, 1964, N° 6, p. 39-53). Pour l'application, en phonologie, de la géométrie analytique et différentielle, voir les ouvrages de Masao IRI (« The logarithmic vowel triangle based on the phonetical-geometrical structure of the Japanese and English languages ». *RAAG Memoirs of the unifying study of basic problems in engineering and physical sciences by means of geometry*, vol. 3, Division H, 1962, p. 551-566), Kazuo KONDO (« A geometrical analytical approach to the mathematical foundation of Phonetics ». *RAAG Memoirs of the unifying study of basic problems in engineering and physical sciences by means of geometry*, vol. 3, Division H, 1962, p. 567-606 ; « Quaternionian Phonology ». *RAAG Memoirs of the unifying study of basic problems in engineering and physical sciences by means of geometry*, vol. 3, Division H, 1962, p. 606-646) et K. KONDO, M. TAKATA et SHUN-ICHI AMARI (« Analytical structures of speech-sounds, mechanical composition and decomposition of phonemes and the design principle of primary phonetical automata » *RAAG Memoirs of the unifying study of basic problems in engineering and physical sciences by means of geometry*, vol. 3, Division H, 1962). Pour l'analyse binaire en phonologie, voir O. S. ŠIROKOV (« Binarnoe diferentory i modelirovanija fonologičeskih sistem ». *Naučnye doklady vysšeĭ školy. Filologičeskie nauki*, vol. 8, 1965, N° 3, p. 88-97).

CHAPITRE III

ANALYSE MORPHÉMATIQUE

1. Introduction

L'analyse morphématique se propose de donner des critères pour la décomposition de la chaîne parlée en segments minimaux, munis de signification — lexicale ou grammaticale. Elle se propose ensuite de classifier ces segments, de réduire leur inventaire, en considérant comme équivalents certains d'entre eux, et d'étudier leurs lois de combinaison. C'est l'un des problèmes les plus difficiles de la linguistique et, malgré les nombreuses contributions apportées depuis presque un siècle, on ne dispose pas, même aujourd'hui, d'une théorie générale satisfaisante du morphème. Introduit par Baudouin de Courtenay [2], ce terme a reçu de nombreuses définitions et explications, qui cherchent, d'habitude, à préciser l'idée intuitive de segment significatif minimal ou de classe de segments significatifs minimaux mutuellement équivalents. Mais aujourd'hui, nous sommes dans la situation remarquée par Hilary Putnam [32] : « When we come to the notion of a morpheme, however, it is more difficult to know what to say. Speaking for myself, I should say that I have never seen a satisfactory definition of this concept in either semantical or non semantical terms ».

Dans ces conditions, notre but sera assez modeste. Nous n'essayons pas de décrire des choses fines telles que les alternances vocaliques ou consonantiques, munies de fonction morphologique, la distinction entre désinence et suffixe grammatical, la nature discontinue de certains morphèmes, etc. Nous allons seulement construire des modèles simples, pour des aspects assez rudimentaires de la flexion ; c'est une première approximation de l'analyse morphématique, qui concerne les constructions régulières de certaines langues naturelles et qui repose essentiellement sur la notion de paradigme, dans l'acception intuitive de totalité de formes flexionnelles d'un mot. On dit souvent que l'analyse morphématique ignore le mot. Mais hormis un petit nombre de critères — dont celui décrit par Harris dans [16] paraît le plus réussi — les critères de segmentation de la chaîne parlée utilisent, parfois d'une manière non explicite et indirecte, la décomposition en mots. Nous n'essayons pas de cacher notre point de départ : les mots. Le morphème sera ainsi défini comme une notion relative à un certain paradigme, c'est-à-dire relative à la totalité des formes flexionnelles d'un mot. C'est pour cela que nous essayons de donner aussi un modèle logique de la notion de paradigme. Bien entendu, cette construction de modèle ne convient pas à toutes les espèces de langues naturelles et, surtout, elle ne concerne pas les langues sans morphologie. D'autre part, il faut remarquer que des phénomènes tels que les divers procédés de dérivation lexicale (la formation des diminutifs, etc.) conduisent à des chaînes dont les composantes morphématiques ne peuvent être détectées par des critères morphologiques. La distinction entre dérivation et flexion est un problème non encore résolu de l'analyse formelle de la langue ; ou, peut être, est-ce une simple question de convention. D'ailleurs, le caractère relatif et ambigu de la distinction grammatical — non grammatical a été souvent mis en évidence. (Voir, par exemple [32].) Un critère de segmentation purement syntaxique qui ne suppose connue que la distinction entre les chaînes admises et celles non admises, devrait déceler aussi les morphèmes de dérivation lexicale. Mais on ne sait pas encore si un critère tel que celui de Harris [16] est assez fin pour ce but.

2. Nécessité d'étudier les oppositions entre ensembles ordonnés

La théorie des oppositions linguistiques, développée par Troubetzkoy et Cantineau, concerne les oppositions entre ensembles d'éléments linguistiques. Une telle théorie est adéquate pour étudier, par exemple, les oppositions entre phonèmes, conçus comme ensembles de traits différentiels ou les oppositions entre ensembles de morphèmes au sens de Hjelmslev. Mais si l'on veut étudier l'opposition entre mots, conçus comme ensembles de sons généraux (au sens de [37]), voici ce qu'on obtient : les mots roumains *un* et *nu* sont en opposition zéro, car chacun d'eux revient à l'ensemble $\{u, n\}$. Intuitivement, on ne peut pas accepter cela, mais la théorie des oppositions linguistiques n'a pas encore tiré explicitement la conséquence qui s'impose : à savoir, la nécessité de définir exactement et d'étudier les oppositions entre ensembles ordonnés d'éléments linguistiques. Dans le premier chapitre nous avons étudié l'aspect logique des oppositions entre ensembles non ordonnés ; maintenant nous nous occupons, sans donner trop de détails, des oppositions entre ensembles ordonnés. A l'aide de cette étude on obtient un modèle logique de la notion de paradigme et, basée sur cette notion, celle de morphème.

3. Chaînes, sous-chaînes et leurs éléments

Soit E un ensemble d'éléments de nature non spécifiée. Toute suite finie d'éléments de E (un même élément pouvant apparaître plusieurs fois dans une suite) sera appelée dans ce chapitre une *chaîne*. On considère, de même, la chaîne vide, qui ne contient aucun élément. Si x, y, z sont des éléments de E, alors xyz, xyy, yxx, zzz sont des chaînes différentes deux à deux. Il existe des chaînes qui diffèrent par la nature même des éléments (ainsi, par exemple, xyz et yxx), tandis que d'autres diffèrent seulement par l'ordre des éléments (par exemple, xyx et yxx).

Une sous-suite β d'une chaîne α est une *sous-chaîne* de α s'il existe deux sous-suites γ et δ telles que $\alpha = \gamma\beta\delta$. Par exemple, xy et yz sont sous-chaînes de xyz, mais xz n'est pas une sous-chaîne de xyz, car x et z ne sont pas voisins en xyz.

Dans chaque chaîne on distingue l'*élément initial* et l'*élément final* de la chaîne. Une sous-chaîne β de α telle qu'il existe une chaîne γ avec $\alpha = \beta\gamma$ est dite une *sous-chaîne initiale* de α ; une sous-chaîne ξ de α telle qu'il existe une chaîne ε avec $\alpha = \varepsilon\xi$ est dite une *sous-chaîne finale* de α. Une sous-chaîne qui n'est ni initiale ni finale est dite une *sous-chaîne médiane*.

4. Oppositions ordonnées

Une opposition ordonnée est une paire ordonnée de deux chaînes. Considérons deux chaînes λ et μ. L'opposition entre λ et μ sera désignée par (λ, μ). La sous-chaîne initiale maximale, commune à λ et μ, est dite la *base initiale* de l'opposition (λ, μ). Pour spécifier qu'on considère l'opposition (λ, μ) par rapport à sa base initiale, on dira que l'opposition (λ, μ) est une *opposition initiale* et on écrira $(\lambda, \mu)_i$. On peut considérer, de même, des oppositions finales. La sous-chaîne finale maximale, commune à λ et μ, est dite la *base finale* de l'opposition (λ, μ). Pour spécifier le fait qu'on considère l'opposition (λ, μ) par rapport à sa base finale on dira que l'opposition (λ, μ) est une *opposition finale* et on écrira $(\lambda, \mu)_f$.

On peut considérer, de même, des *oppositions médianes*, mais dans ce qui suit on considère seulement des oppositions initiales ou finales. Les oppositions initiales sont traitées plus en détail ; les considérations sont transposées par symétrie aux oppositions finales. Les oppositions ordonnées finales ou initiales seront désignées par le nom d'*oppositions extrémales*.

5. Classification des oppositions initiales

On définit, comme on l'a vu, une opération de composition des chaînes. Etant données deux chaînes λ et μ, l'opération de composition conduit à la chaîne $\lambda\mu$, obtenue par la juxtaposition de la chaîne μ à droite de λ. L'opération de composition est associative, mais non pas commutative (il est évident qu'on peut définir cette opération pour un nombre fini quelconque de chaînes). Exemple : si $\lambda = xyz$ et $\mu = acb$, alors $\lambda\mu = xyzacb$.

Considérons une opposition initiale $(\lambda, \mu)_i$ et soit v la base initiale correspondante. Il existe deux chaînes λ' et μ', uniquement déterminées, telles que

$\lambda = \nu\lambda'$ et $\mu = \nu\mu'$. Les chaînes λ' et μ' sont dites *sous-chaînes différentielles* de l'opposition $(\lambda, \mu)_i$.

L'opposition $(\lambda, \mu)_i$ est dite *opposition zéro* si $\lambda = \mu$, c'est-à-dire si les chaînes différentielles sont vides.

L'opposition $(\lambda, \mu)_i$ est dite *privative à gauche* ou *privative en faveur de* μ si λ' est la chaîne vide, tandis que μ' n'est pas vide. L'opposition $(\lambda, \mu)_i$ est dite *privative à droite* ou *privative en faveur ce* λ si μ' est la chaîne vide, tandis que λ' n'est pas vide. Une opposition $(\lambda, \mu)_i$ qui est privative à gauche ou à droite est dite *opposition privative*. Exemples tirés du russe : Si $\lambda =$ дуг, $\mu =$ дуга, l'opposition $(\lambda, \mu)_i$ est privative à gauche. Si $\lambda =$ дуга, $\mu =$ дуг, l'opposition $(\lambda, \mu)_i$ est privative à droite (*).

L'opposition $(\lambda, \mu)_i$ sera dite *disjonctive* si la base initiale correspondante est la chaîne vide. Par exemple, si $\lambda =$ город et $\mu =$ книга, l'opposition $(\lambda, \mu)_i$ est disjonctive ; si $\lambda =$ до, $\mu =$ то, l'opposition $(\lambda, \mu)_i$ est, de même, disjonctive.

L'opposition $(\lambda, \mu)_i$ sera dite *équipollente* si elle n'est ni zéro, ni privative, ni disjonctive. Par exemple, si $\lambda =$ дуга, $\mu =$ дуги, l'opposition $(\lambda, \mu)_i$ est équipollente, car on a $\nu =$ дуг, $\lambda' =$ а, $\mu' =$ и ; si $\lambda =$ бумага, $\mu =$ быть, l'opposition $(\lambda, \mu)_i$ est aussi équipollente, car on a $\nu =$ б, $\lambda' =$ умага, $\mu' =$ ыть.

6. Relations entre oppositions initiales

Deux oppositions initiales $(\lambda_1, \mu_1)_i$ et $(\lambda_2, \mu_2)_i$ seront dites *homogènes* si elles ont la même base initiale, c'est-à-dire si, en désignant par ν_1 la base initiale de $(\lambda_1, \mu_1)_i$ et par ν_2 la base initiale de $(\lambda_2, \mu_2)_i$, on a $\nu_1 = \nu_2$. Par exemple, si $\lambda_1 =$ дуг $= \lambda_2$, $\mu_1 =$ дуга, $\mu_2 =$ дуги, alors on a $\nu_1 =$ дуг $= \nu_2$, donc les oppositions $(\lambda_1, \mu_1)_i$ et $(\lambda_2, \mu_2)_i$ sont homogènes.

Il est facile de voir que la relation d'homogénéité entre oppositions initiales est une relation d'équivalence. Il est, de même, facile de démontrer qu'étant données deux oppositions homogènes $(\lambda_1, \mu_1)_i$ et $(\lambda_2, \mu_2)_i$, si $(\lambda_1, \mu_1)_i$ est disjonctive, alors $(\lambda_2, \mu_2)_i$ l'est aussi.

S'il n'existe aucune opposition initiale autre que $(\lambda, \mu)_i$, qui soit homogène à l'opposition $(\lambda, \mu)_i$ alors on dira que $(\lambda, \mu)_i$ est une opposition *singulière*.

Deux oppositions initiales $(\lambda_1, \mu_1)_i$ et $(\lambda_2, \mu_2)_i$ seront appelées *proportionnelles* si elles ont les mêmes sous-chaînes différentielles, c'est-à-dire si, en désignant par λ_1', μ_1' les sous-chaînes différentielles de $(\lambda_1, \mu_1)_i$ et par λ_2', μ_2' les sous-chaînes différentielles de $(\lambda_2, \mu_2)_i$, on a $\lambda_1' = \lambda_2'$ et $\mu_1' = \mu_2'$. Par exemple, si $\lambda_1 =$ дуг, $\lambda_2 =$ луг, $\mu_1 =$ дуга, $\mu_2 =$ луга, alors on a $\lambda_1' = \lambda_2' =$ la chaîne vide, $\mu_1' = \mu_2' =$ а, donc $(\lambda_1, \mu_1)_i$ est proportionnelle à $(\lambda_2, \mu_2)_i$.

Il est facile de voir que la relation de proportionnalité entre oppositions

(*) On envisage parfois, dans le présent chapitre, l'interprétation des éléments d'une chaîne comme lettres.

initiales est une relation d'équivalence. Il est aussi facile de démontrer qu'étant données deux oppositions proportionnelles $(\lambda_1, \mu_1)_i$ et $(\lambda_2, \mu_2)_i$, alors, si $(\lambda_1, \mu_1)_i$ est une opposition zéro, $(\lambda_2, \mu_2)_i$ est aussi une opposition zéro ; si $(\lambda_1, \mu_1)_i$, est une opposition privative à gauche, $(\lambda_2, \mu_2)_i$ est aussi privative à gauche ; si $(\lambda_1, \mu_1)_i$ est privative à droite $(\lambda_2, \mu_2)_i$ est aussi privative à droite ; si $(\lambda_1, \mu_1)_i$ est équipollente ou disjonctive, $(\lambda_2, \mu_2)_i$ est aussi équipollente ou disjonctive. Mais il peut arriver que $(\lambda_1, \mu_1)_i$ soit équipollente sans que $(\lambda_2, \mu_2)_i$ soit équipollente ou que $(\lambda_1, \mu_1)_i$ soit disjonctive sans que $(\lambda_2, \mu_2)_i$ soit disjonctive. Les démonstrations de ces propositions sont semblables aux démonstrations données aux théorèmes correspondants du chapitre I.

7. Oppositions finales

Considérons deux chaînes λ et μ et soit ω la sous-chaîne finale maximale, commune à λ et μ. Considérée par rapport à ω, l'opposition (λ, μ) sera, par définition, une *opposition finale* et sera désignée par $(\lambda, \mu)_f$. Les chaînes λ'' et μ'' — uniquement déterminées — telles que $\lambda = \lambda'' \omega$ et $\mu = \mu'' \omega$ sont les *sous-chaînes différentielles* de l'opposition $(\lambda, \mu)_f$. L'opposition $(\lambda, \mu)_f$ est : *zéro*, si $\lambda = \mu$; *privative à gauche* si $\lambda'' = 0$ et $\mu'' \neq 0$; *privative à droite*, si $\mu'' = 0$ et $\lambda'' \neq 0$; *privative*, si elle est privative à gauche ou a droite ; disjonctive, si $\omega = 0$; *équipollente*, si elle n'est ni privative, ni zéro, ni disjonctive.

Exemples : si $\lambda =$ от et $\mu =$ вот, alors $(\lambda, \mu)_f$ est privative à gauche, tandis que $(\mu, \lambda)_f$ est privative à droite. En effet, on a, dans les deux cas, $\omega =$ от, $\lambda'' =$ la chaîne vide, $\mu'' =$ в. Si $\lambda =$ мужчины et $\mu =$ столы, alors $(\lambda, \mu)_f$ est équipollente, car $\omega =$ ы, donc $(\lambda, \mu)_f$ n'est pas disjonctive, $\lambda'' =$ мужчин, $\mu'' =$ стол, donc $(\lambda, \mu)_f$ n'est ni zéro ni privative.

8. Relations entre oppositions finales

Deux oppositions finales $(\lambda_1, \mu_1)_f$ et $(\lambda_2, \mu_2)_f$ s'appellent *homogènes* si elles possèdent la même base finale. Par exemple, si $\lambda_1 =$ но, $\mu_1 = \lambda_2 =$ то, $\mu_2 =$ до, alors $(\lambda_1, \mu_1)_f$ et $(\lambda_2, \mu_2)_f$ ont la même base finale : 0.

La relation d'homogénéité entre oppositions finales est une relation d'équivalence. Si deux oppositions finales sont homogènes et si l'une d'elles est disjonctive, alors l'autre l'est aussi. S'il n'existe aucune opposition finale qui soit homogène à l'opposition $(\lambda, \mu)_f$, alors on dira que $(\lambda, \mu)_f$ est une opposition *singulière*.

Deux oppositions finales seront dites *proportionnelles* si elles ont les mêmes sous-chaînes différentielles. Par exemple, si $\lambda_1 =$ но, $\lambda_2 =$ на, $\mu_1 =$ до, $\mu_2 =$ да, alors les oppositions $(\lambda_1, \mu_1)_f$ et $(\lambda_2, \mu_2)_f$ sont proportionnelles, car on a $\lambda_1'' = \lambda_2'' =$ н, $\mu_1'' = \mu_2'' =$ д.

La relation de proportionnalité entre les oppositions finales est une relation d'équivalence. On démontre, pour cette relation, qu'elle conserve toutes les propriétés conservées par la relation de proportionnalité entre les oppositions initiales. (Voir la dernière partie du paragraphe 6.)

9. Morphologie régulière

Considérons un ensemble E et formons les chaînes dont les éléments appartiennent à E. Soit $\mathscr{E}$ un certain ensemble de chaînes de ce type. Les éléments de $\mathscr{E}$ sont, par définition, des *mots permis*.

Considérons une partition Π de $\mathscr{E}$:

$$\mathscr{E} = \bigcup_j \mathscr{E}_j \quad (\mathscr{E}_i \cap \mathscr{E}_k = 0 \text{ pour } i \neq k)$$

et soit $\mathscr{F}$ un certain ensemble de chaînes dont les éléments appartiennent à $\mathscr{E}$. La triade $\{ \mathscr{E}, \Pi, \mathscr{F} \}$ est, par définition, une *langue* ; les éléments de $\mathscr{F}$ sont, par définition, les *phrases permises*.

Un terme $\mathscr{E}_j$ de la partition Π est *régulier* s'il a la propriété suivante :

Si $\lambda_1 \in \mathscr{E}_j$, $\lambda_2 \in \mathscr{E}_j$, $\mu_1 \in \mathscr{E}_j$, $\mu_2 \in \mathscr{E}_j$, alors les oppositions $(\lambda_1, \mu_1)_i$ et $(\lambda_2, \mu_2)_i$ sont homogènes.

De la définition donnée il résulte immédiatement que :

Si $\mathscr{E}_j$ est un ensemble régulier, alors il existe une chaîne λ telle que toute chaîne qui est un élément de $\mathscr{E}_j$ est de la forme $\lambda\mu$, où μ varie d'une chaîne à l'autre ; λ est la base initiale commune à toutes les oppositions initiales entre éléments de $\mathscr{E}_j$.

Par exemple, si $\mathscr{E}_j$ est la totalité des formes du singulier du substantif russe завод, alors $\mathscr{E}_j$ est régulier. En effet, on a $\mathscr{E}_j = \{$ завод, завода, заводу, заводом, заводе $\}$ et il est facile à voir que chaque opposition initiale entre deux éléments de $\mathscr{E}_j$ a la même base : завод On a donc $\lambda =$ завод.

10. Ensembles réguliers en anglais

En anglais, les formes flexionnelles du substantif forment un ensemble régulier, car un substantif présente seulement deux formes flexionnelles. Ainsi, par exemple, l'ensemble $\{$ *book*, *books* $\}$ est régulier et on a $\lambda =$ *book*. En revanche, les formes flexionnelles d'un adjectif ne forment pas toujours un ensemble régulier. Ainsi, par exemple, l'ensemble $\{$ *great*, *greater*, *greatest* $\}$ n'est pas régulier, car l'opposition (*great*, *greater*)$_i$ a comme base *great*, tandis que l'opposition (*greater*, *greatest*)$_i$ a comme base *greate*, donc les oppositions ne sont pas homogènes.

11. Ensembles réguliers en français

En français, un substantif a deux formes flexionnelles, une pour le singulier et une autre pour le pluriel ; les formes flexionnelles d'un substantif français forment donc toujours un ensemble régulier. Un adjectif français a, d'habitude, quatre formes flexionnelles. Elles ne forment que quelquefois un ensemble régulier. Ainsi, l'ensemble { *grand*, *grands*, *grande*, *grandes* } n'est pas régulier, car l'opposition $(grand, grands)_i$ a comme base *grand*, tandis que l'opposition $(grande, grandes)_i$ a comme base *grande*. En revanche, l'ensemble { *douce*, *douces* } est évidemment régulier.

Dans les langues à flexion synthétique, les mots dont les formes flexionnelles forment un ensemble régulier sont beaucoup plus rares que dans les langues à flexion analytique.

Ainsi, les langues roumaine, russe et latine, connues par le caractère synthétique de leur flexion (tant la flexion nominale que la flexion verbale), contiennent peu de mots dont les formes flexionnelles forment un ensemble régulier ; par contre, la langue française, ayant une flexion nominale très analytique contient de nombreux substantifs et adjectifs de ce type.

Si, dans une langue $\mathscr{L}$, chaque ensemble $\mathscr{E}_j$ est régulier, alors on dira que $\mathscr{L}$ a une *morphologie régulière*.

12. Morphologie paradigmatique

Soient deux mots permis, λ et μ, doués de la propriété suivante : Il n'existe aucune phrase permise contenant le mot λ, et telle que, en remplaçant λ par μ, la phrase obtenue soit encore permise. Dans ce cas, on dit que λ et μ sont en distribution *complémentaire*.

Considérons une langue $\mathscr{L} = \{ \mathscr{E}, \Pi, \mathscr{F} \}$, supposée à morphologie régulière. On dira qu'un ensemble $\mathscr{E}_j$ de la partition Π est un *paradigme* de la langue $\mathscr{L}$ si, pour $\lambda \in \mathscr{E}_j$, $\mu \in \mathscr{E}_j$, les mots λ et μ sont en distribution complémentaire. Si tout ensemble $\mathscr{E}_i$ est un paradigme de $\mathscr{L}$, alors on dira que $\mathscr{L}$ a une *morphologie paradigmatique*. Toute langue qui possède une morphologie paradigmatique a donc une morphologie régulière, mais la réciproque n'est pas vraie.

La morphologie paradigmatique est une situation idéale. Comme les adjectifs anglais ne changent pas selon le nombre, la morphologie des substantifs anglais, quoique régulière, n'est pas paradigmatique. La morphologie des substantifs français se rapproche davantage d'une morphologie paradigmatique, sans se confondre avec cette dernière.

13. Classes d'homologie

Soit $\mathscr{L}$ une langue quelconque. On dira que deux ensembles $\mathscr{E}_m$ et $\mathscr{E}_n$ de la partition Π sont *homologues* si l'on peut établir entre $\mathscr{E}_m$ et $\mathscr{E}_n$ une correspondance biunivoque, telle que, si $\lambda_m \in \mathscr{E}_m$, $\mu_m \in \mathscr{E}_m$, $\lambda_n \in \mathscr{E}_n$, $\mu_n \in \mathscr{E}_n$, et si λ_n correspond à λ_m et μ_n correspond à μ_m, alors les oppositions $(\lambda_m, \mu_m)_i$ et $(\lambda_n, \mu_n)_i$ sont proportionnelles. Il est facile de voir que la relation d'homologie est une relation d'équivalence.

Les classes d'équivalence ainsi obtenues seront *les classes d'homologie*. En particulier, dans une langue qui possède une morphologie paradigmatique, les paradigmes sont répartis en classes d'homologie.

Soient $\mathscr{E}_m$ et $\mathscr{E}_n$ deux paradigmes homologues d'une langue à morphologie paradigmatique. Si $\lambda \in \mathscr{E}_n$, $\mu \in \mathscr{E}_n$, $\lambda' \in \mathscr{E}_n$, $\mu' \in \mathscr{E}_n$ et si λ' correspond à λ et μ' correspond à μ, alors les oppositions finales $(\lambda, \lambda')_f$ et $(\mu, \mu')_f$ sont proportionnelles. Cette propriété est une conséquence immédiate des définitions données ci-dessus.

14. Exemple de classe d'homologie en russe

Pour donner un exemple, supposons que $\mathscr{E}$ est le lexique de la langue russe et que, pour tout $\lambda \in \mathscr{E}$, l'ensemble $\mathscr{E}_j$ contenant λ est défini comme l'ensemble des formes flexionnelles de λ. Dans ce cas, si $\mathscr{E}_m$ est l'ensemble des formes flexionnelles de завод et si $\mathscr{E}_n$ est l'ensemble des formes flexionnelles de народ, on a homologie entre $\mathscr{E}_m$ et $\mathscr{E}_n$. En effet, $\mathscr{E}_m$ = { завод, завода, заводу, заводом, заводе, заводы, заводов, заводам, заводами, заводах }, $\mathscr{E}_n$ = { народ, народа, народу, народом, народе, народы, народов, народам, народами, народах }.

Si l'on met en correspondance les éléments de même rang des deux ensembles, la condition de proportionnalité est évidemment satisfaite. Par exemple, (народа, народу)$_i$ est proportionnel à (завода, заводу)$_i$, (народами, народах)$_i$ est proportionnel à (заводами, заводах)$_i$, etc.

15. Classes d'homologie des adjectifs en français

Comme le montre le tableau de la page 86, si on considère les mots non comme chaînes de sons, mais comme chaînes de lettres, en français les adjectifs qualificatifs forment plus de vingt-cinq classes d'homologie.

On a fait abstraction, entre autres, des adjectifs qualificatifs tels que *hébreu* et *fat*, qui n'ont pas de féminin et des adjectifs invariants du type *kaki*.

	Sous-chaînes différentielles maximales				Adjectifs qui entrent dans la classe considérée
	Masculin singulier	Féminin singulier	Masculin pluriel	Féminin pluriel	deux adjectifs de la même ligne horizontale ont des paradigmes homologues
1	chaîne vide	e	s	es	différent, bleu, méchant, petit, dévot
2	chaîne vide	le	s	les	différentiel, cruel, pareil, mol, nul
3	l	le	ux	les	égal, normal, loyal, légal
4	au	lle	aux	lles	nouveau, beau, jumeau
5	f	ve	fs	ves	additif, craintif, neuf
6	x	se	x	ses	heureux, jaloux, glorieux
7	chaîne vide	chaîne vide	s	s	analytique, sage, maigre, large
8	chaîne vide	e	chaîne vide	es	divers, niais, ras, français
9	chaîne vide	te	s	tes	muet, sot, favori, coi
10	chaîne vide	ne	s	nes	moyen, bon, ancien
11	chaîne vide	se	chaîne vide	ses	gras, épais
12	s	ce	s	ces	tiers
13	u	lle	us	lles	fou, mou
14	x	sse	x	sses	faux, roux
15	ux	ille	ux	illes	vieux
16	x	ce	x	ces	doux
17	c	que	cs	ques	public, turc, caduc, franc (français)
18	chaîne vide	que	s	ques	grec
19	chaîne vide	he	s	hes	blanc, franc
20	is	îche	is	îches	frais
21	chaîne vide	ue	s	ues	long, oblong
22	r	se	s	ses	voleur, trompeur
23	ur	resse	urs	resses	vengeur, chasseur
24	eur	rice	eurs	rices	conducteur
25	n	gne	s	gnes	bénin, malin

16. Sous-chaînes différentielles maximales

Pour comprendre le tableau de la page 86, il faut éclaircir ce que l'on comprend par « sous-chaînes différentielles maximales ». Etant donné un mot λ, conçu comme une chaîne dont les éléments sont des lettres, l'ensemble $\mathcal{E}_j$ associée est interprétée comme étant la totalité des formes flexionnelles de ce mot, donc $\lambda \in \mathcal{E}_j$. La sous-chaîne différentielle maximale de λ est, par définition, la plus longue sous-chaîne finale de λ, qui est sous-chaîne différentielle dans une opposition $(\lambda, \mu)_i$ avec $\mu \in \mathcal{E}_j$. Le schéma général de cette notion est donc le suivant. Soit une langue $\{ \mathcal{E}, \Pi, \mathcal{F} \}$ et soit $\mathcal{E}_j$ un terme de Π. Soit $\lambda \in \mathcal{E}_j$. Pour toute opposition initiale $(\lambda, \mu)_i$ avec $\mu \in \mathcal{E}_i$, il existe une sous-chaîne λ' de λ, telle que λ' soit une sous-chaîne différentielle de l'opposition $(\lambda, \mu)_i$. On peut donc dire qu'on a défini ici une fonction qui associe à toute chaîne $\mu \in \mathcal{E}_i$ une sous-chaîne finale bien déterminée de λ : la sous-chaîne différentielle λ' de l'opposition $(\lambda, \mu)_i$. Si on désigne cette fonction par $\varphi_{\lambda,i}$, on peut poser $\lambda' = \varphi_{\lambda,i}(\mu)$. Supposons maintenant que λ soit une chaîne de longueur finie. Dans ce cas, il existera une chaîne $\mu_0 \in \mathcal{E}_j$ pour laquelle la fonction $\varphi_{\lambda,i}$ atteint son maximum en ce sens, que la longueur de la chaîne $\varphi_{\lambda,i}(\mu_0)$ est plus grande ou égale à la longueur de la chaîne $\varphi_{\lambda,i}(\mu)$, quelle que soit $\mu \in \mathcal{E}_j$; $\varphi_{\lambda,i}(\mu_0)$ sera appelée la *sous-chaîne différentielle maximale de* λ, *par rapport aux oppositions initiales*, ou, s'il est clair qu'il est question des oppositions initiales, simplement *la sous-chaîne différentielle maximale de* λ.

De manière analogue on définit *la sous-chaîne différentielle maximale de* λ *par rapport aux oppositions finales.*

Soit maintenant $\lambda \in \mathcal{E}_j$; soit λ' la sous-chaîne différentielle maximale de λ par rapport aux oppositions initiales et soit λ'' la sous-chaîne différentielle maximale de λ par rapport aux oppositions finales. Il existe deux sous-chaînes ν' et ν'', uniquement déterminées, telles que $\lambda = \nu', \lambda' = \lambda'' \nu''$. ν' sera, par définition, *la base initiale minimale de la chaîne* λ ; ν'' sera, par définition, *la base finale minimale de la chaîne* λ.

Nous allons, maintenant, illustrer par des exemples les notions introduites, en utilisant le tableau de la page 86. Soit, par exemple, $\lambda =$ *fou*. L'ensemble $\mathcal{E}_j$ avec $\lambda \in \mathcal{E}_j$ est $\mathcal{E}_j = \{$*fou*, *folle*, *fous*, *folles*$\}$. La chaîne *fou* participe à quatre oppositions initiales par rapport à $\mathcal{E}_j$: $(\textit{fou}, \textit{fou})_i$, $(\textit{fou}, \textit{folle})_i$, $(\textit{fou}, \textit{fous})_i$, $(\textit{fou}, \textit{folles})_i$. Dans ces oppositions, les sous-chaînes différentielles de *fou* sont, respectivement : la chaîne vide, *u*, la chaîne vide, *u*. La plus longue de ces chaînes est *u*, donc *u* est la sous-chaîne différentielle maximale de *fou*. Il en résulte que la base initiale minimale de *fou* est *fo*. Considérons maintenant les oppositions finales de *fou* par rapport à $\mathcal{E}_j$: $(\textit{fou}, \textit{fou})_f$, $(\textit{fou}, \textit{folle})_f$, $(\textit{fou}, \textit{fous})_f$, $(\textit{fou}, \textit{folles})_f$. Les sous-chaînes différentielles de *fou*, dans ces oppositions sont, respectivement : la chaîne vide, *fou*, *fou*, *fou*. La plus longue d'entre elles est *fou*, donc *fou* est la sous-chaîne différentielle maximale de *fou* par rapport aux oppositions finales. Il en résulte que la base finale minimale de *fou* est la chaîne vide.

17. Comparaison avec la classification donnée par O. S. Kulagina

Comme le montre le tableau ci-dessus, les adjectifs qualificatifs français sont distribués en 25 classes d'homologie. Parmi celles-ci, les classes 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9 et 10 ont été aussi obtenues par O. S. Kulagina ([23], p. 193). Mais dans [23] *égal* rentre dans une autre classe que *normal* et les mots *entier* et *différent* qui n'entrent pas dans la même classe d'homologie, dans [23] sont distribués aussi dans des classes différentes.

L'homologie de deux mots de la même classe se vérifie facilement. Prenons, par exemple, les mots *muet* et *favori*. Si *muet* $\in \mathscr{E}_m$, *favori* $\in \mathscr{E}_n$, alors $\mathscr{E}_m = \{$ *muet, muette, muets, muettes* $\}$, $\mathscr{E}_n = \{$ *favori, favorite, favoris, favorites* $\}$. En $\mathscr{E}_m$, la base initiale minimale est *muet* ; en $\mathscr{E}_n$, la base initiale minimale est *favori*. On met en correspondance les mots qui s'obtiennent à partir de la base minimale en ajoutant la même chaîne. On obtient la correspondance : *muet* — *favori*, *muette* — *favorite*, *muets* — *favoris*, *muettes* — *favorites*. De cette manière, toute opposition initiale de $\mathscr{E}_m$ est proportionnelle à l'opposition correspondante de $\mathscr{E}_n$. Ainsi, en mettant en évidence les sous-chaînes différentielles des oppositions, on a : l'opposition $(muet, muet\text{-}te)_i$ est proportionnelle à $(favori, favorite)_i$; $(muet\text{-}s, muet\text{-}tes)_i$ est proportionnelle à $(favori\text{-}s, favorit\text{-}tes)_i$ et ainsi de suite. Donc $\mathscr{E}_m$ est homologue à $\mathscr{E}_n$.

18. Classes d'homologie des substantifs français

Il est bien plus simple d'établir les classes d'homologie des substantifs français. Elles sont au nombre de cinq (au moins), comme suit (voir [23], p. 190) :

Sous-chaînes différentielles maximales		Substantifs qui entrent dans la classe considérée
Singulier	Pluriel	
chaîne vide	s	fonction, livre, cahier
chaîne vide	x	tableau, cadeau, bijou
il	ux	travail
l	ux	radical
chaîne vide	chaîne vide	cas

Pour obtenir les classes d'homologie des verbes français on peut utiliser les suggestions de Kulagina ([23], p. 192).

En ce qui concerne les classes d'homologie des mots roumains, elles peuvent être établies conformément aux travaux [29] et [6] pour les substantifs et conformément au travail [28] pour les verbes.

Les travaux [28] et [29] ont déjà été utilisés pour la composition de l'algorithme de traduction automatique de l'anglais en roumain, par E. Domonkos.

19. Morphèmes et quasi-morphèmes

Soit $\mathscr{L}$ une langue qui a une morphologie paradigmatique et soient $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_n$ les paradigmes de $\mathscr{L}$. Une chaîne λ est, par définition, un *morphème* de $\mathscr{L}$ par rapport à $\mathscr{E}_j$ si λ est base ou chaîne différentielle dans une opposition initiale entre deux termes de $\mathscr{E}_j$. Si λ est base, alors λ est un *morphème base par rapport à* $\mathscr{E}_j$; si λ est chaîne différentielle, alors λ est un *morphème différentiel par rapport à* $\mathscr{E}_j$. Il est donc clair que la notion de morphème se définit *par rapport à un certain paradigme*.

Des définitions posées ci-dessus, on déduit que :

1) dans une langue qui a une morphologie paradigmatique, il existe, par rapport à un certain paradigme, un seul morphème base ;

2) si deux paradigmes sont homologues, ils ont les mêmes chaînes différentielles.

La notion de morphème a été définie seulement pour les langues qui ont une morphologie paradigmatique. Mais les langues naturelles ne satisfont pas, en général, cette condition. On peut définir pour les langues quelconques, une notion de quasi-morphème, notion qui, dans le cas particulier des langues à morphologie paradigmatique, se réduit à la notion de morphème. Soit, pour cela, une langue $\mathscr{L} = \{ \mathscr{E}, \Pi, \mathscr{F} \}$ et soit $\mathscr{E}_j$ un ensemble de la partition Π. Chaque chaîne qui est base ou chaîne différentielle d'une opposition initiale entre éléments de $\mathscr{E}_j$ sera, par définition, un *quasi-morphème par rapport à* $\mathscr{E}_j$. On a donc des *quasi-morphèmes-bases par rapport à* $\mathscr{E}_j$ et des *quasi-morphèmes différentiels par rapport à* $\mathscr{E}_j$. Prenons un exemple dans la langue russe. Si $\mathscr{E}_j$ est la totalité des formes flexionnelles du mot завод, alors $\mathscr{E}_j$ n'est pas régulière, car l'opposition (заводом, заводу)$_i$ n'est pas homogène à l'opposition (заводом, заводов)$_i$. On ne peut donc pas définir des morphèmes par rapport à $\mathscr{E}_j$. Mais on peut définir les quasi-morphèmes par rapport à $\mathscr{E}_j$. Il existe des quasi-morphèmes bases, comme : завод, завода, заводо, заводам et des quasi-morphèmes différentiels, comme : а, у, ом, е, ам, ы, ах, ами, ми, и, в, х, м.

20. Quasi-morphèmes irréductibles

Un quasi-morphème base par rapport à $\mathscr{E}_j$, qui ne contient aucun autre quasi-morphème base par rapport à $\mathscr{E}_j$, est appelé un *quasi-morphème base irréductible* ou, simplement, une *base irréductible*. Dans l'exemple ci-dessus, завод est une base irréductible.

Un quasi-morphème base qui n'est pas irréductible est, par définition, un *quasi-morphème base réductible* ou, simplement, une *base réductible*. Dans l'exemple ci-dessus, завода, заводо et заводам sont des bases réductibles.

Les quasi-morphèmes différentiels par rapport à $\mathscr{E}_j$ peuvent être classés en : *quasi-morphèmes différentiels irréductibles*, qui ne contiennent pas d'autres quasi-morphèmes différentiels par rapport à $\mathscr{E}_j$ et *quasi-morphèmes différentiels réductibles*. Des exemples de quasi-morphèmes différentiels irréductibles sont, ci-dessus, les quasi-morphèmes а, у, е, м, ы, х, и, в tandis que ом, ах et ами sont réductibles.

21. Propriétés des ensembles homologues

Il est aisé de vérifier les propositions suivantes :

Si $\mathscr{E}_m$ et $\mathscr{E}_n$ sont deux ensembles homologues de la partition Π, alors :

α) tout quasi-morphème différentiel par rapport à $\mathscr{E}_m$ est de même un quasi-morphème différentiel par rapport à $\mathscr{E}_n$ et réciproquement ;

β) un quasi-morphème différentiel irréductible par rapport à $\mathscr{E}_m$ est aussi irréductible par rapport à $\mathscr{E}_n$ et réciproquement ;

γ) le nombre de quasi-morphèmes bases par rapport à $\mathscr{E}_m$ est égal au nombre de quasi-morphèmes bases par rapport à $\mathscr{E}_n$.

Soient x et y deux quasi-morphèmes par rapport à un certain ensemble $\mathscr{E}_j$ de la partition Π. On dira que x et y sont *compatibles* s'il existe un mot de $\mathscr{E}_j$ qui contient la chaîne xy. Dans l'exemple ci-dessus, заводам et и sont compatibles, tandis que завод et и sont incompatibles.

Il est clair qu'on peut avoir compatibilité entre x et y, mais incompatibilité entre y et x.

22. Relations de domination entre quasi-morphèmes

On dira que *x domine y à gauche par rapport à $\mathscr{E}_j$* et on écrira $(\mathscr{E}_j)\ x \rightarrow y$ si x est compatible avec y par rapport à $\mathscr{E}_j$ et si, dans tout mot de $\mathscr{E}_j$ contenant la sous-chaîne xy, le remplacement de xy par x conduit à un mot appartenant aussi à $\mathscr{E}_j$.

On dira que *x domine y à droite par rapport à $\mathscr{E}_j$* et on écrira $x \rightarrow y\ (\mathscr{E}_j)$, si y est compatible avec x par rapport à $\mathscr{E}_j$ et si, dans tout mot de $\mathscr{E}_j$ contenant la sous-chaîne yx, le remplacement de yx par x conduit à un mot appartenant de même à $\mathscr{E}_j$.

Comme exemple, considérons pour $\mathscr{E}_j$ la totalité des formes flexionnelles de завод. On a alors :

$(\mathscr{E}_j)$ завод $\rightarrow$ у, $(\mathscr{E}_j)$ завод $\rightarrow$ е $(\mathscr{E}_j)$ завод $\rightarrow$ ы, $(\mathscr{E}_j)$ завод $\rightarrow$ ов,
$(\mathscr{E}_j)$ ам $\rightarrow$ и, $(\mathscr{E}_j)$ а $\rightarrow$ х, $(\mathscr{E}_j)$ завода $\rightarrow$ ми, etc.

Il est aisé de voir que deux ensembles homologues $\mathscr{E}_m$ et $\mathscr{E}_n$ sont isomorphes par rapport à la relation de domination à gauche. Cela signifie qu'entre l'ensemble des quasi-morphèmes par rapport à $\mathscr{E}_m$ et l'ensemble des quasi-morphèmes par rapport à $\mathscr{E}_n$ on peut établir une correspondance biunivoque qui conserve la relation de domination à gauche. Par exemple, si $\mathscr{E}_m$ est la totalité des formes flexionnelles de завод, et si $\mathscr{E}_n$ est la totalité des formes flexionnelles de народ, alors, comme on le sait, $\mathscr{E}_m$ et $\mathscr{E}_n$ sont homologues et on a isomorphisme entre $\mathscr{E}_m$ et $\mathscr{E}_n$ par rapport à la relation de domination à gauche : завод correspond à народ, заводами correspond à народами, on a

$(\mathscr{E}_m)$ завод $\rightarrow$ ами, $(\mathscr{E}_n)$ народ $\rightarrow$ ами , etc.

23. Morphologie quasi-paradigmatique

Soit $\mathscr{L} = \{ \mathscr{E}, \Pi, \mathscr{F} \}$ une langue quelconque. Soient $\lambda \in \mathscr{E}$, $\mu \in \mathscr{E}$. On dira que λ et μ sont en *distribution contrastante* s'il existe une phrase de $\mathscr{F}$ contenant le mot λ, où en remplaçant λ par μ on arrive à une phrase qui n'appartient plus à $\mathscr{F}$ et il existe une phrase de $\mathscr{F}$ contenant le mot μ où le remplacement de μ par λ conduit à une phrase qui n'appartient plus à $\mathscr{F}$.

On dira que la langue $\mathscr{L}$ a une morphologie *quasi-paradigmatique* si, pour un ensemble quelconque $\mathscr{E}_m$ de la partition Π et pour $\lambda \in \mathscr{E}_m$, $\mu \in \mathscr{E}_m$, λ et μ sont en distribution contrastante.

24. Méthode du carré

Le problème fondamental, non encore résolu, de l'analyse morphématique est le problème même de la définition du morphème et, directement lié à celui-ci, le problème de la segmentation du texte, de sa décomposition en éléments morphématiques. En ce qui concerne les critères proposés à cet effet, on en distingue deux types : critères morphologiques, où les facteurs paradigmatiques prédominent, critères qui implicitement ou explicitement supposent comme donnés les mots et, pour chaque mot, ses formes flexionnelles et critères où prédominent les facteurs syntagmatiques, qui comportent en premier lieu l'analyse de la chaîne de la parole, des relations entre ses portions, sans supposer connus ni les mots, ni les formes flexionnelles, mais seulement la possibilité de distinguer une chaîne admise d'une chaîne non admise dans la langue considérée.

Parmi les critères de segmentation du premier type, il faut remarquer surtout celui de J. Greenberg, critère appelé « la méthode du carré » [11]. Nous allons analyser quelques aspects de ce critère, à la lumière des notions introduites dans le présent chapitre.

Il faut remarquer d'abord que J. Greenberg utilise, d'une façon explicite, les mots, dans toute analyse morphématique. En effet, selon lui, tout point de séparation de deux mots doit être aussi un point de segmentation de la chaîne parlée.

Une caractéristique du critère de Greenberg réside dans la considération de plusieurs langues naturelles. C'est de cette manière seulement que cet auteur considère possible d'obtenir une méthode formelle de segmentation. Il introduit d'abord la notion de *carré*, qui est, par définition, un ensemble de quatre formes de mots ayant, respectivement, la structure suivante : AC, BC, AD, BD. Par exemple les formes *eating*, *walking*, *eats*, *walks* de l'anglais définissent un carré, car on a $A = eat$, $B = walk$, $C = ing$, $D = s$. Il admet aussi la possibilité que l'une des composantes A, B, C, D soit vide ; c'est le cas des formes anglaises *king*, *kingdom*, *duke*, *dukedom*, où l'on a un carré dont la composante C est vide.

Il est aisé de voir, dans les exemples ci-dessus, que les quatres composantes du carré donnent la segmentation des quatres formes constituant le carré. On peut donner d'autres exemples aussi, tirés des langues les plus diverses. Par exemple, les formes roumaines *casă*, *rată*, *casei*, *ratei* définissent un carré où $A = cas$, $B = rat$, $C = ă$, $D = ei$. Ici aussi on constate que les composantes A, B, C, D donnent la segmentation des formes constituant le carré considéré.

Mais il y a aussi des carrés comme le carré suivant, tiré de l'anglais parlé : *hammer*, *ham*, *badger*, *badge* ; bien que ce carré soit formellement correct, il est inacceptable, car la différence de signification entre *hammer* et *ham* n'est pas la même qu'entre *badger* et *badge*. Dans ce cas, les composantes du carré ne fournissent aucune segmentation des formes considérées, intuitivement acceptable.

Comment peut-on formaliser le critère concernant la concordance entre la différence de signification des formes AC, BC d'une part, et celle des formes AD, BD d'autre part ? J. Greenberg propose la solution suivante. S'il existe une autre langue où les quatre formes correspondantes de AC, BC, AD et BD forment aussi un carré, alors la différence de signification entre AC et BC est la même qu'entre AD et BD. Par exemple, pour le carré anglais *eating*, *walking*, *eats*, *walks*, cette autre langue est l'italien. En effet, les formes correspondantes sont ici *mangiando*, *passeggiando*, *mangia*, *passeggia* ; ces formes définissent aussi un carré. Ce n'est pas le cas pour les formes *hammer*, *badger*, *ham*, *badge* ; il n'existe aucune autre langue où les formes correspondantes constituent aussi un carré.

25. Carrés homologiques

Un tel critère est assez normal, si l'on tient compte de l'habitude assez répandue, ces derniers temps, de formaliser les questions sémantiques par la considération de plusieurs langues. Il est à remarquer qu'on peut éviter d'envisager plusieurs langues si l'on suppose comme donnée la partition Π, c'est-à-dire si l'on suppose qu'on sait, pour chaque mot, quelles sont ses formes flexionnelles. Dans ce cas, il suffit d'exiger que AC et AD (resp. BC et BD) soient des formes flexionnelles d'un même mot et que BC soit dans la classe d'homologie de AC, tandis que BD sera dans la classe d'homologie de AD. Par exemple, dans le carré *eating*, *walking*, *eats*, *walks* on constate que *eatings* et *eats* appartiennent au même terme de Π, *walking* et *walks* appartiennent aussi au même terme de Π ; *walking* appartient à la classe d'homologie de *eating*, tandis que *walks* appartient à la classe d'homologie de *eats*. Donc le carré considéré est admissible. D'autre part, le carré *hammer*, *badger*, *ham*, *badge* n'est pas admissible, car *hammer* n'est pas une forme flexionnelle de *ham*, *badger* n'est pas une forme flexionnelle de *badge*.

Ce critère, qui utilise les formes flexionnelles et les classes d'homologie, donne une condition seulement suffisante, mais pas nécessaire pour l'existence d'un point de segmentation. En outre, ce critère est très restrictif. Mais il a l'avantage d'être formel et d'éviter toute ambiguïté. Par exemple, si l'on considère le carré *walking*, *talking*, *walks*, *talks*, on a $A = walk$, $B = talk$, $C = ing$, $D = s$, mais on peut avoir aussi $A = w$, $B = t$, $C = alking$, $D = alks$. On peut résoudre cette ambiguïté, en imposant la condition que C et D soient des quasimorphèmes différentiels par rapport à la totalité des formes flexionnelles de AC et aussi par rapport à la totalité des formes flexionnelles de BC. On constate que $C = ing$ et $D = s$ satisfont cette condition, tandis que $C = alking$ et $D = alks$ ne la satisfont pas. Donc seul le premier carré est admissible.

On arrive ainsi à attribuer une importance particulière aux carrés AC, BC, AD, BD jouissant des propriétés suivantes : AD (resp. BD) est une forme flexionnelle de AC (resp. BC) ; BC (resp. BD) appartient à la classe d'homologie de AC (resp. AD) ; C et D sont des quasimorphèmes différentiels par rapport à la totalité des formes flexionnelles de AC et aussi par rapport à la totalité des formes flexionnelles de BC. Ces carrés seront appelés *carrés homologiques*.

26. Alternances morphologiques. Quelques suggestions

Dans [11], J. Greenberg expose quelques critères supplémentaires pour effectuer la segmentation des formes qui ne participent à aucun carré. On peut essayer de confronter ces critères avec les modifications introduites ci-dessus.

Nous nous contentons de remarquer qu'il y a ici une perspective de résoudre certains problèmes plus fins, signalés dans l'introduction de ce chapitre. Considérons, par exemple, le phénomène d'alternance morphophonologique. Les formes *man* et *men* ne peuvent être insérées dans aucun carré. Pour quelles raisons dit-on que la paire *man*, *men* définit une alternance morphophonologique ? J. Greenberg pose la condition de l'existence de deux autres formes — par exemple *boy* et *boys* — telles que les quatre conditions suivantes soient remplies : 1) la différence de signification entre *man* et *men* est la même qu'entre *boy* et *boys* ; 2) *boy* et *boys* peuvent être insérées dans un même carré ; 3) il existe un contexte admis par *man* et *boy*, mais non pas admis par *men* et *boys* ; 4) il existe un contexte admis par *men* et *boys* mais non pas admis par *man* et *boy*.

Il est aisé de voir que toutes les conditions sont remplies dans l'exemple ci-dessus. En effet, on a le carré *boy*, *lad*, *boys*, *lads* ; le contexte (*this*, *is good*) est admis par *boy* et *lad*, mais non pas par *boys* et *lads* ; le contexte (*these*, *are good*) est admis par *boys* et *lads*, mais non pas par *boy* et *lad*.

Si les conditions 2), 3) et 4) ont un caractère assez formel pour pouvoir être acceptées, on ne peut pas dire la même chose de la condition 1). On pourrait remplacer la condition 1) par la condition de l'existence d'une langue où les formes correspondant à *man*, *boy*, *men* et *boys* constituent un carré. Pour éviter le recours à une autre langue, on pourrait essayer de remplacer les conditions 1) et 2) par la condition que *boy* et *boys* puissent être insérées dans un même carré homologique. C'est justement le cas ci-dessus, où le carré *boy*, *lad*, *boys*, *lads* est un carré homologique. Un exemple analogue, fourni par le roumain, est l'alternance *masă-mese*. Ici aussi on peut trouver deux formes — par exemple *casă* et *case* — qui satisfont des conditions du type 1), 2), 3), 4) ci-dessus (on a *masă* au lieu de *man*, *mese* au lieu de *men*, *casă* au lieu de *boy*, *case* au lieu de *boys*, *plasă* au lieu de *lad*, *plase* au lieu de *lads*).

Des phénomènes plus complexes d'alternances morphophonologiques se rencontrent dans les langues munies d'une flexion plus riche que l'anglais, par exemple en roumain. On y trouve des alternances qui dépendent de certaines désinences. Une description de ces phénomènes du roumain et la segmentation des formes correspondantes à l'aide des critères distributionnels ont été traités dans [8].

27. Méthode du successeur

Nous allons présenter maintenant un point de vue purement syntagmatique concernant la segmentation de la chaîne parlée, celui de Z. S. Harris [16]. Le problème discuté par cet auteur pourrait être formulé de la façon suivante : Sachant, pour chaque séquence de phonèmes, si elle est ou non correcte (pour la langue envisagée), obtenir la décomposition de chaque séquence correcte en segments significatifs minimaux (irréductibles). Afin de résoudre ce problème, Z. S. Harris envisage, pour chaque segment initial de la séquence considérée, le nombre de phonèmes différents dont l'occurrence est possible après ce segment. Le principe de sa méthode consiste à choisir les points de division morphématique parmi les points où ce nombre a un maximum local. Un exemple (qui est justement celui de Harris) donnera une image plus claire de cette méthode.

Considérons la séquence anglaise *He's clever* (*hiyzklevər*). Dans une séquence correcte qui commence par *h* on peut avoir, en deuxième position, l'un des 9 phonèmes suivants : *w*, *y*, *i*, *e*, *æ*, *a*, *ə*, *o*, *u*. Dans une séquence correcte qui commence par *hi* on peut avoir, en troisième position, l'un des 14 phonèmes suivants : *p*, *t*, *k*, *d*, *g*, *ð*, *s*, *č*, *z*, *l*, *m*, *n*, *h*, *y*. Dans une séquence correcte qui commence par *hiy* on a le choix en quatrième position, entre 29 phonèmes (*p*, *d*, etc.). Dans une séquence correcte qui commence par *hiyz* on a le choix en cinquième position, aussi entre 29 phonèmes possibles. Dans une séquence correcte qui commence par *hiyzk* on a le choix en sixième position, entre 11 phonèmes possibles. En continuant de cette manière, on trouve ensuite les nombres 7, 8, 1 et 1. On obtient donc la suite numérique 9, 14, 29, 29, 11, 7, 8, 1, 1. En tenant compte du fait que 7 n'est pas un maximum local et que la différence entre 7 et 8 est trop petite pour considérer le terme 8 comme un maximum local, on a des points de division morphématique seulement après le troisième et le quatrième terme ; donc la séquence *hiyzklevər* est formée de trois segments morphématiques : *hiy* — *z* — *klevər*.

Essayons maintenant de donner une présentation plus formelle du critère de segmentation.

Soit A l'ensemble des phonèmes d'une certaine langue. (Il s'agit ici de la notion de phonème au sens de Harris et Hockett, notion qui a été présentée dans le chapitre II.) Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des chaînes (sur A) qui sont admises (repérées) dans la langue considérée. Soir $f \in \mathscr{F}$, $f = a_1 a_2 \dots a_n$. Désignons par f_i la chaîne $a_1 a_2 \dots a_i$ $(1 \leqslant i < n)$ et par m_i le nombre des éléments $a \in A$ tels qu'il existe une séquence $g = b_1 b_2 \dots b_p$, $p \geqslant i + 1$, $g \in \mathscr{F}$, où $b_j = a_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant i$ et $b_{i+1} = a$. Considérons la suite $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_{n-1}$. Un terme m_j sera, par définition, un *maximum local* de la suite si

$$m_{j-1} \leqslant m_j \geqslant m_{j+1}.$$

La tentative de Harris consiste à chercher les points de division morphématique parmi les termes qui sont des maximums locaux ; c'est-à-dire, si m_j est un maximum local, alors entre a_j et a_{j+1} il y a un point de division morphématique possible de la séquence f.

28. Critère de la suite inverse

Les considérations exposées ci-dessus constituent seulement une première approximation de l'opération de segmentation. Le modèle de Harris comporte quelques étapes ultérieures. En effet, il y a des cas où un point qui est, intuitivement — ou pour des raisons morphologiques (paradigmatiques) — un point de division morphématique, n'est pourtant pas un terme de maximum local de la suite $\{ m_i \}_{1 \leqslant i \leqslant n-1}$. Nous allons analyser quelques situations de ce type.

Considérons, en suivant [16], la séquence anglaise *It disturbs me* (*itdistərbzmiy*). Pour des raisons morphologiques, nous savons qu'il y a un point de division morphématique entre b et z ; toutefois, le terme m_9 de la suite $\{ m_i \}_{1 \leqslant i \leqslant 12}$ correspondante n'est pas un maximum local (on a $m_9 = 3$). La quantité d'information si petite du passage de b à z est due au caractère très prévisible du phonème z ; en effet, la présence du segment *it* au commencement de la séquence exige l'occurrence, après b, de *ed*, de *ing* ou de z. Cette dépendance très restrictive entraîne la valeur si petite de m_9. La justesse d'une telle motivation peut être vérifiée aussi par un autre exemple ; pour la séquence anglaise *They disturb me* (*ðeydistərbmiy*), où une dépendance restrictive du type ci-dessus n'existe plus, on a $m_{10} = 19$, ce qui confirme l'existence d'un point de division morphématique entre b et m. Ici, le passage de b au morphème suivant est doué d'une quantité d'information bien plus grande que dans la séquence précédente. L'idée de Harris est d'éviter cet « accident », dû à une dépendance de gauche à droite, en reversant l'ordre d'application du critère ci-dessus. On arrive ainsi à la formalisation suivante :

En conservant pour A, $\mathscr{F}$ et f les significations ci-dessus, désignons par φ_i la chaîne $a_i\, a_{i+1} \ldots a_n$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Soit P_{n-i+1} le nombre des éléments $b \in A$ tels qu'il existe une séquence $h = c_1\, c_2 \ldots c_r$, $r \geqslant n - i + 2$, $h \in \mathscr{F}$, où $c_j = a_j$ pour $i \leqslant j \leqslant n$ et $c_{i-1} = b$. Considérons la suite $P_1, P_2, \ldots, P_j, \ldots, P_{n-1}$. Un terme P_j sera un maximum local de la suite si $P_{j-1} \leqslant P_j \geqslant P_{j+1}$.

Convenons de dire que $m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots, m_{n-1}$ est la *suite directe* associée à f, tandis que $P_1, P_2, \ldots, P_j, \ldots, P_{n-1}$ est la *suite inverse* associée à f. Il est aisé de comprendre que la suite inverse est susceptible d'« accidents » dus aux dépendances de droite à gauche, de la même manière que la suite directe est susceptible d'« accidents » dus aux dépendances de gauche à droite. Pour éviter ces « accidents », on cherche les points de division morphématique non seulement parmi les termes de maximum local de la suite directe, mais aussi parmi les termes de maximum local de la suite inverse. En d'autres termes, pour placer un point de division morphématique entre a_i et a_{i+1} il suffit que l'une au moins des deux conditions suivantes soit remplie : 1) m_i est un maximum local de la suite directe ; 2) P_{n-1} est un maximum local de la suite inverse.

L'application de cette méthode à la séquence *It disturbs me* (*itdistərbzmiy*) donne les valeurs $m_9 = 3$ et $P_{13-9} = P_4 = 18$; en dépit du fait que m_9 n'est pas un maximum local de la suite directe, P_4 est un maximum local de la suite inverse ; on peut donc introduire un point de division morphématique entre b et z, ce qui correspond d'ailleurs à l'intuition morphologique.

L'importance de cette amélioration concerne non seulement le problème de la segmentation morphématique, mais aussi celui de la détection des dépendances entre morphèmes. En effet, chaque fois qu'on a 1) sans avoir 2) on a une grande probabilité de trouver une dépendance de gauche à droite ; chaque fois qu'on a 2) sans avoir 1), il est très probable qu'on a une dépendance de droite à gauche.

La possibilité d'avoir 1) sans avoir 2), ou 2) sans avoir 1) a parfois une autre explication. Considérons par exemple la séquence suivante [16] : *Let me qualify this* (*letmiykwalifayðis*). L'intuition morphologique introduit un point de division morphématique entre *l* et *i*, mais m_{10} (= 1) n'est pas un maximum local de la suite directe. Ce fait est dû à la distribution très pauvre (en ce sens qu'il se combine, à droite, avec un nombre très réduit de morphèmes) du segment *letmiykwal*, en contraste avec le nombre très élevé de contextes admis par le morphème suivant. C'est-à-dire qu'ici la grande variété liée à un point de division morphématique se reflète non pas dans le grand nombre de phonèmes possibles après *l*, mais dans la grande probabilité d'apparition de ces phonèmes et des morphèmes qui commencent après eux ; en fait, on a un seul phonème possible après *l*, c'est le phonème *i*. En revanche, en considérant la suite inverse, on a $P_{17-10} = P_7 = 13$; P_7 est un maximum local de la suite inverse et la division morphématique entre *l* et *i* devient ainsi possible.

Ce dernier exemple fait mieux ressortir la nature informationnelle du critère de Harris. En travaillant toujours avec l'entropie d'ordre zéro, c'est-à-dire en mesurant toujours l'indétermination par le nombre de phonèmes possibles dans une certaine position, sans envisager aussi la probabilité de ces phonèmes dans la position correspondante, on arrive à des résultats insatisfaisants chaque fois que ces probabilités marquent des différences saisissantes. Mais, inversement, l'idée de considérer la suite inverse peut donner des suggestions pour l'amélioration des expériences de prédiction concernant l'évaluation de l'entropie.

29. Une nouvelle amélioration : l'insertion

La considération de la suite directe et de la suite inverse permet de neutraliser l'effet des dépendances unidirectionnelles (à gauche ou à droite). Mais il y a aussi des dépendances bidirectionnelles, où les deux termes s'influencent réciproquement. Ces dépendances peuvent introduire des irrégularités dont l'effet ne peut être neutralisé ni par la suite directe, ni par la suite inverse. Harris propose, pour ces situations, une nouvelle amélioration de sa méthode : l'insertion. Prenons, par exemple, la séquence anglaise *This is new* (*ðisiznyuw*) [16]. Cherchons d'abord les séquences (correctes ou non), qui peuvent être insérées entre les deux premiers phonèmes, ð et *i*, telles que la séquence toute entière, ainsi obtenue, soit correcte. On peut, par exemple, insérer la séquence *ačœl*, qui donne la séquence correcte *ðečœlisiznyuw* (*The chalice is new*) ; on peut aussi insérer *œth*, qui donne la séquence correcte *That hiss is new*, etc. Cherchons maintenant combien de phonèmes différents peuvent apparaître au commencement ou à la fin d'une séquence « insérable » entre ð et *i*, puis entre

i et s. (Un exemple de séquence « insérable » entre i et s est *yzmarksšowðætð-ebak*, qui donne la séquence correcte *These marks show that the box is new.*) On constitue de cette manière pour toutes les positions suivantes de la séquence *ðisiznyuw*. Les points de division morphématique seront parmi les positions où le nombre des phonèmes différents, pouvant apparaître au commencement ou à la fin d'une séquence « insérable » à la position correspondante, a un maximum local.

Essayons maintenant de donner une présentation plus formelle de ce procédé. Soit $f = a_1 a_2 \dots a_i \dots a_n$ une séquence marquée ($a_i \in A$, où A est l'ensemble des phonèmes). Désignons par g_i la séquence $a_1 a_2 \dots a_i$ et par h_i la séquence $a_{i+1} a_{i+2} \dots a_n$ $(1 \leqslant i \leqslant n - 1)$. Soient : r_i = le nombre des phonèmes α tels qu'il existe une séquence φ commençant par α et admise par le contexte (g_i, h_i) ; s_i = le nombre des phonèmes β tels qu'il existe une séquence ψ ayant β comme phonème final et admise par le contexte (g_i, h_i) ; $t_i = r_i + s_i$. (Les séquences φ et ψ sont des séquences ou phrases semi-marquées, au sens du paragraphe 40 du chapitre I.) Le nombre t_i est une mesure de la variété extrémale des insertions possibles dans le contexte (g_i, h_i). Il est donc naturel d'appeler t_i la *variété extrémale du contexte* (g_i, h_i). En considérant maintenant la suite $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_{n-1}$ nous déterminerons les maximums locaux de cette suite, c'est-à-dire les termes t_i tels que $t_{i-1} \leqslant t_i \geqslant t_{i+1}$. Dès que t_i est un maximum local, nous tenterons de placer un point de division morphématique de f, entre a_i et a_{i+1}. En d'autres mots, nous cherchons les points de division morphématique de f parmi les contextes (g_i, h_i) dont la valeur extrémale t_i présente un maximum local. C'est justement par cette méthode qu'on trouve — dans l'exemple ci-dessus — un point de division morphématique entre s et i (on a, dans ce cas, $g_3 = ðis$, $h_3 = iznyuw$).

30. Successeurs des successeurs

Une amélioration ultérieure de ce modèle envisage non seulement l'influence des n premiers phonèmes sur l'indétermination du phonème situé en position $n + 1$, mais aussi, pour chaque phonème possible en position $n + 1$, les phonèmes possibles en position $n + 2$ [16]. Par exemple, si l'on considère la séquence anglaise *It disturbed me* (*itdisterbedmiy*), on trouve 16 phonèmes possibles après i initial. Parmi ces 16 phonèmes, il y a six phonèmes avec 29 successeurs (*it*, *if*, *itch*, *is*, *ill*, *in* ; après chacun de ces six phonèmes il y a un point de division morphématique possible) ; il y a un seul phonème avec 18 successeurs (y : *eat*, *eager*, *easy*, *each*, *either*, etc.), un seul phonème avec 10 successeurs (m : *imp*, *imbibe*, *immune*, *immediate*, etc.) et 8 phonèmes avec un nombre de successeurs inférieur à 5 (η : *ink*, *English* ; d : *idiot*, etc.). On cherche ensuite s'il y a une certaine régularité parmi les nombres ainsi trouvés. Par exemple, en anglais, on constate, d'une façon empirique, que si le $(n + 1)$-ième phonème est uniquement déterminé, tandis qu'en position

$n + 2$ sont possibles 10 phonèmes environ, alors l'existence d'un point de division morphématique entre les positions n et $n + 1$ est assez probable. Mais si le $(n + 1)$-ième phonème est susceptible seulement de un ou deux successeurs, alors il est assez probable qu'il n'existe pas de point de division morphématique entre les positions n et $n + 1$.

Mieux que les critères envisagés dans les paragraphes précédents, ces types de régularité ont un caractère essentiellement statistique, dont la formalisation dépasse le cadre du présent livre.

31. Autres points de vue et problèmes en analyse morphématique. Analogies et non-concordances

On distingue d'habitude trois problèmes fondamentaux en analyse morphématique : *a*) la décomposition d'une séquence en segments significatifs minimaux ; (ces segments correspondent aux « morpheme alternants » de Harris [12], aux « morphs » de Hockett [21] et Greenberg [11] et, approximativement, aux « formants » de Hjelmslev [19]) ; *b*) l'introduction d'une certaine relation binaire R entre segments significatifs minimaux (la relation R est réflexive et symétrique, mais n'est pas transitive ; elle conduit à la notion de morphème, définie comme l'ensemble de tous les « morpheme alternants » ou « morphs » qui se trouvent en relation R avec un « morph » déterminé [12] [21]) ; *c*) la description contextuelle des morphèmes et de leurs fonctions [14]. Nous nous sommes occupés jusqu'ici surtout du problème *a*). Quelques aspects des problèmes *b*) et *c*) feront l'objet du chapitre IV.

Nous n'avons envisagé ci-dessus que des points de vue selon lesquels le morphème appartient au plan de l'expression. Il faut remarquer l'existence d'un autre point de vue, selon lequel le morphème est un élément du plan du contenu, élément dont l'enveloppe extérieure (le « formant ») appartient au plan de l'expression. C'est le point de vue développé en glossématique [18], [19], [20] repris par K. Togeby [38] et, sous une forme un peu différente, par S. K. Šaumjan [37]. L'exposé de ce point de vue dépasse le cadre du présent livre.

Il existe une certaine correspondance entre les morphèmes base et les quasi-morphèmes base étudiés aux paragraphes 20 et 21, d'une part, et les « sémantèmes » de Vendryès [39] et les « plérèmes » de Hjelmslev [19] d'autre part. Il y a aussi une certaine correspondance entre les morphèmes différentiels et les quasi-morphèmes différentiels étudiés aux paragraphes 19 et 20, d'une part, et les morphèmes de Vendryès [39], d'autre part. Chez Vendryès, comme chez G. Gougenheim, l'opposition sémantème-morphème est, essentiellement, l'opposition lexical-grammatical ; l'opposition plérème-morphème chez Hjelmslev est de nature analogue [19]. D'autre part, les théories descriptivistes du morphème n'envisagent jamais une telle distinction ; on peut même dire que l'analyse morphématique est, chez les descriptivistes, un moyen d'éviter la discussion de la distinction grammatical-non grammatical.

Les notions de morphème et de quasi-morphème introduites et étudiées aux paragraphes 19, 20 et 21 ont leur origine chez Baudouin de Courtenay [2] et correspondent, sous certains aspects seulement, aux « morphs » de Hockett [21] et Greenberg [11] et aux « morpheme alternants » de Harris [12]. C'est dans une grande mesure l'examen critique de plusieurs méthodes et l'effort fait pour expliciter ce qui est sous-entendu qui nous ont conduits aux définitions données dans les paragraphes 19, 20 et 21. Une confrontation détaillée avec les notions et les méthodes exposées dans de [1], [4], [5], [9], [10], [15], [22], [24], [27], [30], [31], serait intéressante. On trouvera dans [3] et [7] des exposés de synthèse et des mises au point très utiles. Voir aussi [25], [26], [33], [34], [35] et [36].

Il serait intéressant de discuter la non-concordance entre les modèles de paradigme et quasi-paradigme proposés ci-dessus, d'une part, et les paradigmes des langues naturelles d'autre part. Le modèle ci-dessus n'envisage pas le phénomène des alternances à valeurs morphologiques (*man-men* en anglais, *masă-mese* en roumain, etc.), problème qui complique sensiblement la segmentation de la chaîne parlée (voir [13] et [17]). On n'a pas envisagé le phénomène de dérivation lexicale (par exemple, la formation des diminutifs). Une distinction fondamentale en analyse morphématique, qui définit deux grandes classes de morphèmes, segmentaux — morphèmes proprement dits — et suprasegmentaux (concernant l'accent, l'intonation, etc.) est restée en dehors de la discussion.

En ce qui concerne les classes d'homologie, étudiées aux paragraphes 13-15, elles constituent un instrument très utile en linguistique appliquée et en linguistique structurale (voir, par exemple, [6], [27], [28] et [29], où ces classes sont utilisées d'une façon plus ou moins explicite).

32. Isomorphisme entre la notion de paradigme et la notion de son abstrait

Il y a un certain isomorphisme entre la notion de paradigme au sens du paragraphe 12 et la notion de son abstrait au sens du chapitre II, paragraphe 8. En effet, en désignant par E l'ensemble des sons et par ρ la relation d'équivalence absolue définie dans E (voir le paragraphe 7 du chapitre II), un son abstrait est une classe de ρ-équivalence.

Convenons de considérer comme indiscernables deux sons absolument équivalents qui ne diffèrent pas par leur position. Dans ce cas, deux sons différents sont ρ-équivalents si et seulement s'ils diffèrent uniquement par leur position.

Etant donnés quatre sons ρ-équivalents s_1, s_2, s_3 et s_4, les oppositions (s_1, s_2) et (s_3, s_4) sont homogènes (c'est-à-dire qu'elles ont la même base). En effet, la base commune est donnée par l'ensemble des valeurs qui définissent un son abstrait, c'est-à-dire par l'ensemble des valeurs communes aux sons ρ-équivalents ; c'est justement l'ensemble des sons ρ-équivalents (obtenu, abstraction faite de la position de ces sons). On peut donc dire qu'un son abstrait est un ensemble régulier, au sens donné à ce terme au paragraphe 9. Mais, du fait que deux sons différents et ρ-équivalents sont, par ce fait même, incompatibles à la même position, on déduit que deux sont ρ-équivalents sont en distribution complémentaire. Donc le *son abstrait et le paradigme admettent le même modèle logique*.

OUVRAGES CITÉS

[1] AVANESOV, R. I., « Kratčaišaja zvukovaja edinica v sostave slova i morfemy ». *Voprosy grammatičeskogo stroja*. Moskva, 1955.

[2] BAUDOUIN DE COURTENAY, I. A. *Vvedenie v jazykoznanie* (5e izd.), 1917.

[3] BIERWISCH, M., « Uber den theoretischen Status des Morphems ». *Studia Grammatica*, vol. 1, 1962, p. 51-89.

[4] BOLINGER, D., « Visual morphemes ». *Language*, vol. 22, 1946, N° 4, p. 333-340.

[5] BOLINGER, D., « On defining the morpheme ». *Word*, vol. 4, 1948.

[6] DIACONESCU, P., « Un mod de descriere a flexiunii nominale, cu aplicaţie în limba română contemporană ». *Studii şi cercetări lingvistice*, vol. 12, 1961, N° 2, p. 163-192.

[7] DIACONESCU, P., « Pe marginea unor lucrări despre morfem ». *Studii şi cercetări lingvistice*, vol. 13, 1962, N° 4, p. 519-544.

[8] DIACONESCU, P., « Le nombre et le genre du substantif roumain (Analyse contextuelle.) ». *Revue roumaine de linguistique*, vol. 9, 1964, N° 2, p. 171-193.

[9] FREI, H., « Critères de délimitation ». *Word*, vol. 10, 1954, p. 2-3.

[10] GLEASON, H. A. Jr., *An introduction to descriptive linguistics*. New York, 1956.

[11] GREENBERG, J., *Essays in linguistics*. New York, 1957.

[12] HARRIS, Z. S., « Morpheme alternants in linguistic analysis ». *Language*, vol. 18, 1942, p. 170-177.

[13] HARRIS, Z. S., « Discontinuous morphemes ». *Language*, vol. 21, 1945, N° 3, p. 121-127.

[14] HARRIS, Z. S., « From morpheme to utterance ». *Language*, vol. 22, 1946, N° 3, p.161-183.

[15] HARRIS, Z. S., « Discourse analysis ». *Language*, vol. 28, 1952, N° 1, p. 1-30.

[16] HARRIS, Z. S., « From phoneme to morpheme ». *Language*, vol. 31, 1955, N° 2, p. 190-222.

[17] HARRIS, Z. S., *Structural linguistics*. University of Chicago Press, Fifth impression, 1961.

[18] HJELMSLEV, L., *Principes de grammaire générale*. Kobenhavn, 1928.

[19] HJELMSLEV, L., « Essai d'une théorie des morphèmes ». *Actes du IVe Congrès international des linguistes*. Copenhague, 1938, p. 140-151.

[20] HJELMSLEV, L., *Prolegomena to a theory of language*. Baltimore, 1953.

[21] HOCKETT, Ch., « Problems of morphemic analysis ». *Language*, vol. 23, 1947, p. 321-343.

[22] HOCKETT, Ch., « A formal statement of morphemic analysis ». *Studies in Linguistics*, vol. 10, 1952, p. 27-39.

[23] KULAGINA, O. S., « O mašinnom perevode s francuzkogo jazyka na russkii I ». *Problemy kibernetiki*, vol. 7, 1960, p. 181-208.

[24] KULAGINA, O. S., « Ob ispolzovanii mašiny pri sostavlenii algoritmov analiza teksta ». *Problemy kubernetiki*, vol. 7, 1962, p. 209-223.

[25] MARCUS, S., « Description, à l'aide de la théorie des ensembles, de certains phénomènes morphologiques ». *Revue de mathématiques pures et appliquées*, vol. 6, 1961, N° 4, p. 735-744.

[26] MARCUS, S., « Logičeskii aspekt lingvističeskih oppozicii ». *Problemy strukturnoi lingvistiki* (recueil de travaux), vol. 2, Moscou, 1963, p. 47-74.

[27] MELČUK, I. A., « Morfologičeskii analiz pri mašinnom perevode (preimuščestvenno na materiale russkogo jazyka) ». *Problemy kibernetiki*, vol. 6, 1961, p. 207-276.
[28] MOISIL, Gr. C., « Probleme puse de traducerea automată. Conjugarea verbelor în limba română scrisă ». *Studii şi cercetări lingvistice*, vol. 11, 1960, N° 1.
[29] MOISIL, Gr. C., « Problèmes posés par la traduction automatique. La déclinaison en roumain écrit ». *Cahiers de linguistique théorique et appliquée*, vol. 1, 1962, p. 123-134.
[30] MOTSCH, W., « Zur Stellung der Wortbildung in einem formalen Sprachmodell ». *Studia Grammatica*, vol. 1, 1962, p. 31-50.
[31] NIDA, E., *Morphology : the descriptive analysis of words*. Ann. Arbor, 1946.
[32] PUTNAM, H., « Some issues in the theory of grammar ». *Proceedings of the Symposia in Applied Mathematics*, vol. 12, « Structure of language and its mathematical aspects ». *American Math. Soc.*, 1961, p. 25-42.
[33] REVZIN, I., « O logičeskoi forme lingvističeskih opredelenii (na primere opredelenija morfemy) ». *Primenenie logiki v nauke i tehnike*. Izd. Akad. Nauk SSSR, Moskva, 1960, p. 140-148.
[34] REVZIN, I., *Modeli jazyka*. Izd. Akad. Nauk SSSR, Moskva, 1962.
[35] SAPORTA, S., « Morph, morpheme, archimorpheme ». *Word*, vol. 12, 1956.
[36] SAUSSURE, F. de, *Cours de linguistique générale*, 3e édition, Paris, 1931.
[37] ŠAUMJAN, S.K., « O ponjatijah lingvističeskoi sistemy i lingvističeskogo znaka ». *Kratkie soobščenija*. Instityt slavjanovedenija Akad. Nauk SSSR. Moskva, 1961, p. 3-13.
[38] TOGEBY, K., « Structure immanente de la langue française ». *Travaux du Cercle linguistique de Copenhague*, vol. VI, 1951.
[39] VENDRYÈS, J., *Le langage*. Paris, 1921.

Ajouté sur les épreuves

Pour la notion de morphème voir aussi S. ABRAHAM, F. KIEFER (« An algorithmic definition of the morpheme ». *Statistical Methods in Linguistics*, 1965, N° 4). Pour la définition des unités linguistiques fondamentales voir Ernesto ZIERER (« Minimum linguistic units ». *Zeitschrift für Phonetik, Sprachwissenschaft und Kommunikationsforschung*, Band 18, 1965, Heft 2). Une présentation de l'analyse morphématique est donnée par Viktor KRUPA (« Morféma ako lingvistická jednotka ». *Jazykovedný Časopis*, vol. 15, 1964, N° 1, p. 21-26).

CHAPITRE IV

MÉTHODES FONCTIONNELLES EN ANALYSE MORPHÉMATIQUE

Le présent chapitre expose, avec des modifications et omissions insignifiantes, les recherches de S. I. Fitialov et I. L. Bratčikov relatives à la construction d'une morphologie formelle, telles qu'elles sont exposées en [2], [3] et [6]. On attire l'attention sur le fait que, dans ce chapitre, la terminologie est différente de celle du chapitre III. On utilisera le terme « élément morphématique » pour ce qui est « le morphème » chez Ch. Hockett et le terme de « morphème » avec une acception proche de celle de Hjelmslev [7] (voir aussi le paragraphe 31 du chapitre III).

1. Représentation fonctionnelle de l'information contenue dans des mots

La totalité des règles qui permettent le remplacement des mots par les informations qu'elles contiennent, conduit à une représentation fonctionnelle de la correspondance entre mots et informations. Il apparaît une fonction f, définie sur un ensemble fini de mots et qui associe à chaque mot C de cet ensemble une certaine information $f(C)$.

La manière la plus simple de représenter la fonction f consiste à indiquer, par un tableau, ses valeurs. Dans ce cas on obtient un dictionnaire de mots. Mais la recherche d'autres modes de représentation de la fonction f, plus économiques que l'utilisation d'un tableau à valeurs, présente aussi un intérêt.

On cherchera à représenter la fonction f comme superposition d'autres fonctions, plus simples, qui aient, en même temps, une interprétation linguistique naturelle. Ainsi, nous considérerons la représentation

$$f(C) = \Pi(\Phi(\Gamma(\Delta(C)))) \tag{1}$$

où les fonctions Π, Φ, Γ et Δ ont les significations suivantes :

Δ associe à chaque mot C une suite d'éléments morphématiques, à savoir la suite d'éléments morphématiques dans lesquels se décompose C ;

Γ associe à chacune de ces suites d'éléments morphématiques un certain ensemble non ordonné S de nouveaux éléments appelés morphèmes ;

Φ indique, pour chacun de ces ensembles de morphèmes, une certaine information $\Phi(S)$;

Π associe à l'information $\Phi(S)$ l'information $f(C)$; dans certains cas particuliers, Π peut être l'application identique.

Pour trouver une manière naturelle de représenter la fonction Φ, il faut chercher quelles restrictions sont imposées au mode de représentation des fonctions Δ, Γ et Π. Comme résultat on obtiendra une classification générale des modalités pratiques de description de la morphologie de la langue.

2. Nature de l'information des mots

Avant de poser le problème en termes précis, nous discuterons de la nature de l'information des mots.

Nous représenterons l'information d'un mot comme un ensemble non vide de certaines informations élémentaires. Dans ce cas, l'information est interprétée comme une réunion d'informations élémentaires. En particulier, l'information peut consister aussi en une seule information élémentaire (dépourvue d'homonymie).

Une information élémentaire consiste en certains traits. Par exemple, si les traits sont le genre, le nombre et le cas, alors au mot russe пути on peut associer les informations élémentaires suivantes : { *masculin*, *singulier*, *génitif* }, ou { *masculin*, *singulier*, *datif* }, ou { *masculin*, *singulier*, *prépositionnel* }, ou { *masculin*, *pluriel*, *nominatif* }, ou { *masculin*, *pluriel*, *accusatif* }. Ici, chaque parenthèse représente une information élémentaire, donc l'information du mot пути est la réunion de ces cinq informations élémentaires. En analysant le mot пути dans le contexte болбщому пути, en vertu de la liaison syntactique entre пути et болбщому, on choisira l'information élémentaire *masculin*, *singulier*, *datif*.

3. Fonction Δ

La fonction Δ associe à chaque mot une décomposition bien déterminée en éléments morphématiques (la décomposition *adéquate*). En parlant de la décomposition d'un mot, en entendra toujours sa décomposition adéquate.

On doit observer que le même élément morphématique peut apparaître plusieurs fois dans la décomposition d'un mot. Ainsi, le mot allemand *jüngerer* a la décomposition suivante : *jüng-er-er*. Le premier *er* a la signification de comparatif de supériorité et le deuxième *er* a la signification casuelle.

4. Fonction Γ

L'introduction des morphèmes a deux buts : premièrement de diminuer le nombre d'éléments à l'aide desquels on représente les mots et deuxièmement de restreindre les possibilités de combiner les éléments morphématiques.

La fonction Γ peut être donnée de la manière suivante. A chaque élément morphématique α on associe un morphème bien déterminé $\mu(\alpha)$. $\Gamma(\Delta(C))$ est défini comme l'ensemble des morphèmes $\mu(\alpha)$ pour lesquels $\alpha \in \Delta(C)$. On doit tenir compte du fait qu'il est possible qu'à plusieurs éléments morphématiques on associe le même morphème. Autrement dit, les morphèmes s'obtiennent comme termes d'une certaine partition de l'ensemble des éléments morphématiques. Faisons remarquer que $\Gamma(\Delta(C))$ est un ensemble non ordonné de morphèmes. Par exemple, pour la langue russe on peut introduire le morphème a, qui correspond à un ensemble formé de deux éléments morphématiques $\{$ ами, ями $\}$, et le morphème r, qui correspond à l'ensemble des bases des substantifs russes. Dans ce cas, on a

$$\Gamma\,(\text{случа-ями}) = \Gamma\,(\text{город-ами}) = \{\, a, r \,\}\,.$$

Nous reviendrons ci-dessous sur les modes de représentation de la fonction Γ.

5. Fonction Φ

Comme résultat de l'application des fonctions Δ et Γ au mot C, on obtient l'ensemble de morphèmes

$$S = \Gamma(\Delta(C))\,.$$

La fonction Φ associe à chacun de ces ensembles de morphèmes une certaine information $\Phi(S)$.

Nous nous proposons de réaliser la représentation (1), telle que la fonction Π soit l'application identique. Nous considérerons le mode de représentation suivant de la fonction Φ. Pour chaque morphème a on définit une certaine information $\varphi(a)$ et on indique la manière d'obtenir $\Phi(S) = f(C)$, lorsqu'on connaît les informations associées aux morphèmes de $S = \Gamma(\Delta(C))$.

Puisqu'on interprète $f(C)$ comme une réunion d'informations élémentaires, il est naturel d'adopter aussi cette interprétation pour les informations associées aux morphèmes. Si C_1, C_2, ..., C_n sont les mots pour lesquels le morphème a a la propriété

$$a \in S_i = \Gamma(\Delta(C_i))\,,$$

alors l'information $\varphi(a)$ sera donnée par

$$\varphi(a) = \bigcup_{i=1}^{n} A(S_i)\,.$$

6. Un exemple

Considérons un exemple. Soient les mots пути, недели, здании avec les décompositions

$$\Delta\,(\text{пути}) = \text{пут-и}\,;$$
$$\Delta\,(\text{недели}) = \text{недел-и}\,;$$
$$\Delta\,(\text{здании}) = \text{здани-и}\,.$$

La fonction Γ fournit les morphèmes r_1, r_2, r_3, a, avec les propriétés

$$S_1 = \Gamma\,(\text{пут-и}) = \{\, r_1, a \,\}, \qquad S_2 = \Gamma\,(\text{недел-и}) = \{\, r_2, a \,\}.$$
$$S_3 = \Gamma\,(\text{здани-и}) = \{\, r_2, a \,\},$$

en d'autres termes, aux bases пут, недел et здани on associe les morphèmes r_1, r_2 et r_3 et à l'affixe и on associe le morphème a.

Soient :

$$\Phi(S_1) = \{\, x_1, x_2, x_3, x_4 \,\}\,;$$
$$\Phi(S_2) = \{\, y_1, y_2 \,\}\,;$$
$$\Phi(S_3) = \{\, z \,\},$$

où $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2$ et z sont interprétés de la manière suivante :

x_1 : *masculin, singulier, génitif* ;
x_2 : *masculin, singulier, datif* ;
x_3 : *masculin, singulier, prépositionnel* ;
x_4 : *masculin, pluriel, nominatif* ;
y_1 : *féminin, singulier, génitif* ;
y_2 : *féminin, pluriel, nominatif* ;
z : *neutre, singulier, prépositionnel.*

Au morphème a on associe, de manière naturelle, l'information

$$\varphi(a) = \Phi(S_1) \cup \Phi(S_2) \cup \Phi(S_3) = \{\, x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, z \,\},$$

en d'autres termes $\varphi(a)$ est la réunion de tous les éléments de $\Phi(S_i)$ ($i = 1, 2, 3$). L'information $\varphi(a)$ peut être exprimée de la manière suivante : Le morphème a, qui est représenté en russe par la terminaison casuelle и, indique le génitif singulier, le datif singulier, le prépositionnel singulier ou le nominatif pluriel, si le substantif en cause est masculin, il indique le génitif singulier ou le nominatif pluriel, si le substantif en cause est féminin et il indique le prépositionnel singulier, si le substantif en cause est neutre.

Une telle formulation est typique de la grammaire habituelle. Ci-dessus, cette formulation a été formalisée.

7. Fonction résoluble et fonction résolvante

D'après le principe énoncé, on construit, pour une fonction Φ donnée, la fonction φ, en définissant pour chaque morphème a l'information

$$\varphi(a) = \bigcup_{a \in S} \Phi(S) . \tag{2}$$

Il semble maintenant naturel de représenter $\Phi(S)$ de la manière suivante, à partir de φ :

$$\Phi(S) = \bigcap_{a \in S} \varphi(a) . \tag{3}$$

(Dans le cas particulier où S consiste en un seul morphème a, on a $\Phi(S) = \varphi(a)$.) Autrement dit, on prend la partie commune des informations des morphèmes contenus en S.

Désignons par K_0 la classe de fonctions Φ pour lesquelles les relations (2) et (3) sont satisfaites pour tout élément S du domaine de définition de Φ.

Considérons deux exemples.

Exemple 1. Soient les morphèmes a_1, a_2, a_3 et la fonction Φ ainsi définie :

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{ a_1 \} ; & \Phi(S_1) &= \{ x_1, x_2, x_3 \} ; \\
S_2 &= \{ a_1, a_2 \} ; & \Phi(S_2) &= \{ x_1, x_2 \} ; \\
S_3 &= \{ a_1, a_2, a_3 \} ; & \Phi(S_3) &= \{ x_1 \} ; \\
S_4 &= \{ a_1, a_3 \} ; & \Phi(S_4) &= \{ x_1, x_3 \} ,
\end{aligned}$$

où x_1, x_2, x_3 sont des informations élémentaires. On construit la fonction φ d'après la règle (2) :

$$\begin{aligned}
\varphi(a_1) &= \Phi(S_1) \cup \Phi(S_2) \cup \Phi(S_3) \cup \Phi(S_4) = \{ x_1, x_2, x_3 \} ; \\
\varphi(a_2) &= \Phi(S_2) \cup \Phi(S_3) = \{ x_1, x_2 \} ; \\
\varphi(a_3) &= \Phi(S_3) \cup \Phi(S_4) = \{ x_1, x_3 \} .
\end{aligned}$$

En vérifiant que la condition (3) est remplie, on constate que

$$\begin{aligned}
&\varphi(a_1) = \{ x_1, x_2, x_3 \} = \Phi(S_1) ; \\
&\varphi(a_1) \cap \varphi(a_2) = \{ x_1, x_2 \} = \Phi(S_2) ; \\
&\varphi(a_1) \cap \varphi(a_2) \cap \varphi(a_3) = \{ x_1 \} = \Phi(S_3) ; \\
&\varphi(a_1) \cap \varphi(a_3) = \{ x_1, x_3 \} = \Phi(S_4) .
\end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction Φ considérée appartient à la classe K_0.

Exemple 2. Définissons la fonction Φ sur le même ensemble que dans l'exemple 1, mais avec d'autres valeurs :

$$\begin{aligned}
\Phi(S_1) &= \{ x_1 \} ; & \Phi(S_2) &= \{ x_1, x_2 \} ; \\
\Phi(S_3) &= \{ x_1, x_3 \} ; & \Phi(S_4) &= \{ x_3 \} .
\end{aligned}$$

On construit la fonction φ d'après la règle (2) :

$$\varphi(a_1) = \{ x_1, x_2, x_3 \} ;$$
$$\varphi(a_2) = \{ x_1, x_2, x_3 \} ;$$
$$\varphi(a_3) = \{ x_1, x_3 \} .$$

En vérifiant que la condition (3) est remplie, on obtient :

$$\varphi(a_1) \neq \Phi(S_1) ; \qquad \varphi(a_1) \cap \varphi(a_2) \neq \Phi(S_2) ;$$
$$\varphi(a_1) \cap \varphi(a_2) \cap \varphi(a_3) = \Phi(S_3) ;$$
$$\varphi(a_1) \cap \varphi(a_3) \neq \Phi(S_4) .$$

Il en résulte que Φ n'appartient pas à la classe K_0.

On dira que la fonction Φ est *résoluble* s'il existe une fonction ψ, définie sur l'ensemble des morphèmes et qui associe à chaque morphème a une certaine information $\psi(a)$, telle que pour tout S du domaine de définition de Φ est satisfaite l'égalité

$$\Phi(S) = \bigcap_{a \in S} \psi(a) . \tag{4}$$

Une fonction ψ qui satisfait la condition (4) sera nommée *fonction résolvante* pour Φ.

8. Un théorème de structure pour la classe des fonctions résolubles

Désignons par K_1 la classe des fonctions Φ résolubles. Il est clair que

$$K_0 \subseteq K_1 .$$

THÉORÈME 1. $K_0 = K_1$.

Démonstration. Montrons que si $\Phi \in K_1$, alors la fonction φ, définie par l'égalité (2), remplit la contidion (3), c'est-à-dire qu'elle est résolvante pour la fonction Φ. Il en résultera l'affirmation de l'énoncé du théorème.

Montrons premièrement que :

α) Si $\Phi \in K_1$ et si ψ est résolvante pour Φ, alors, pour tout morphème a,

$$\varphi(a) \subseteq \psi(a) . \tag{5}$$

En effet, soit $x_0 \in \varphi(a')$; alors, en vertu de (2), il existe un S_0 tel que

$$a' \in S_0 \qquad \text{et} \qquad x_0 \in \Phi(S_0) .$$

En utilisant l'égalité (4), on obtient que

$$x_0 \in \psi(a) \text{ pour tout } a \in S_0 ;$$

en particulier,

$$x_0 \in \psi(a') .$$

Cela étant vrai pour tout $x_0 \in \varphi(a')$, il en résulte l'affirmation qui devait être établie.

On montrera maintenant que :

β) Pour toute fonction Φ et pour tout S du domaine de définition de Φ, on a

$$\Phi(S) \subseteq \bigcap_{a \in S} \varphi(a) , \tag{6}$$

où φ est définie par l'égalité (2).

En effet, cela résulte du fait que, pour tout morphème $a \in S$, on a, en vertu de (2),

$$\Phi(S) \subseteq \varphi(a) .$$

Soit maintenant $\Phi \in K_1$ et soit ψ une fonction résolvante pour Φ. En utilisant les affirmations α) et β), ainsi que l'égalité (4), on obtient :

$$\bigcap_{a \in S} \varphi(a) \subseteq \bigcap_{a \in S} \psi(a) = \Phi(S) \subseteq \bigcap_{a \in S} \varphi(a) ,$$

donc

$$\Phi(S) = \bigcap_{a \in S} \varphi(a)$$

et le théorème 1 est démontré.

Donc, la fonction Φ est résoluble si et seulement si la fonction φ, définie par l'égalité (2), est résolvante pour Φ, autrement dit, si elle satisfait la condition (3).

Pour une fonction Φ arbitraire a lieu l'inclusion (6).

9. Non-unicité de la fonction résolvante

Remarquons que si

$$x_0 \in \bigcap_{a \in S} \varphi(a) \qquad \text{et} \qquad x_0 \notin \Phi(S)$$

(autrement dit si l'inclusion (6) est stricte) alors il existe S_1, S_2, ..., S_k du domaine de définition de Φ, tels que

$$S_i \cap S \neq 0 ;$$

$$x_0 \in \Phi(S_i) \ (i = 1, 2, ..., k) ;$$

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{K} S_i .$$

Pour une fonction résoluble Φ, la fonction résolvante associée n'est pas en général uniquement déterminée. Mais comme le montre l'affirmation α) de la démonstration du théorème 1, φ est une fonction résolvante « minimale » (voir l'inclusion (5)).

Exemple 3. Soient

$$\begin{array}{lll} S_1 = \{ a_1 \}; & \Phi(S_1) = \{ x_1, x_2, x_3 \}; & \varphi(a_1) = \{ x_1, x_2, x_3 \}; \\ S_2 = \{ a_1, a_3 \}; & \Phi(S_2) = \{ x_1, x_3 \}; & \varphi(a_2) = \{ x_3 \}; \\ S_3 = \{ a_2, a_3, a_4 \}; & \Phi(S_3) = \{ x_3 \}; & \varphi(a_3) = \{ x_1, x_3 \}; \\ & & \varphi(a_4) = \{ x_3 \}. \end{array}$$

En dehors de la fonction φ, sont aussi résolvantes les fonctions ψ_1 et ψ_2 définies de la manière suivante :

$$\begin{array}{ll} \psi_1(a_1) = \{ x_1, x_2, x_3 \}; & \psi_2(a_1) = \{ x_1, x_2, x_3 \}; \\ \psi_1(a_2) = \{ x_3 \}; & \psi_2(a_2) = \{ x_2, x_3 \}; \\ \psi_1(a_3) = \{ x_1, x_3 \}; & \psi_2(a_3) = \{ x_1, x_3 \}; \\ \psi_1(a_4) = \{ x_2, x_3 \}; & \psi_2(a_4) = \{ x_2, x_3 \}. \end{array}$$

10. Condition nécessaire pour la résolubilité d'une fonction

On peut donner une condition nécessaire assez simple pour la résolubilité d'une fonction Φ. Supposons que Φ soit résoluble.

Alors, ainsi qu'il résulte de (4), quels que soient S_1 et S_2 du domaine de définition de Φ, si $S_1 \subseteq S_2$, on a $\Phi(S_1) \supseteq \Phi(S_2)$ (condition d'*antimonotonie* de la fonction Φ). Dans l'exemple 2, la condition d'antimonotonie n'est pas satisfaite pour S_1 et S_2.

La condition d'antimonotonie n'est pas suffisante pour la résolubilité de la fonction Φ, ainsi qu'il résulte de l'

Exemple 4.

$$\begin{array}{ll} S_1 = \{ a_1, a_2 \}; & \Phi(S_1) = \{ x_1, x_2 \}; \\ S_2 = \{ a_1, a_3 \}; & \Phi(S_2) = \{ x_1, x_2 \}; \\ S_3 = \{ a_1, a_2, a_3 \}; & \Phi(S_3) = \{ x_2 \}. \end{array}$$

Cette fonction est antimonotone, cependant

$$\varphi(a_1) \cap \varphi(a_2) \cap \varphi(a_3) = \{ x_1, x_2 \} \neq \Phi(S_3).$$

La condition d'antimonotonie est une conséquence non seulement de l'égalité (4), mais aussi de l'égalité (3) ; pour $S_1 \subseteq S_2$ on a

$$\bigcap_{a \in S_2} \varphi(a) \subseteq \bigcap_{a \in S_1} \varphi(a).$$

Dans le cas où dans le domaine de définition de Φ la condition $S_1 \subset S_2$ n'est satisfaite pour aucune paire S_1, S_2, la propriété d'antimonotonie a lieu banalement.

11. Structure de la fonction Γ lorsque Φ est résoluble

La résolubilité de la fonction Φ permet de donner cette fonction par l'intermédiaire de la fonction résolvante. Cela présente un avantage évident dans le cas où le nombre de mots est très grand par rapport au nombre de morphèmes. Ainsi qu'on l'a vu, la nécessité de la résolubilité apparaît comme une conséquence naturelle des considérations logiques générales, liées à l'interprétation logique de l'information fournie par les mots, prise d'habitude implicitement en considération dans la description linguistique de la morphologie de la langue.

Revenons maintenant au problème du mode de représentation d'une fonction f sous la forme (1), tel que Π soit l'application identique et que Φ soit une fonction résoluble. Dans ces conditions, le choix de l'ensemble d'éléments morphématiques et la définition de la fonction Δ pour une fonction f concrète dépendent de la nature de la fonction Γ ; réciproquement, étant données f et Δ, on leur associe certaines fonctions Γ.

Considérons comme donnés l'ensemble des éléments morphématiques et la fonction Δ. Dans ces conditions, pour l'étude des modalités de définition de la fonction f, on peut considérer, au lieu de f, la fonction f^* induite par f de la manière suivante : f^* est définie sur l'ensemble des suites d'éléments morphématiques (les décompositions « adéquates » des mots du domaine de définition de f) et associe à chacune de ces suites une certaine information. En fait, f^* est aussi la fonction f, à la seule différence que les mots ne sont plus écrits avec des lettres, mais avec des éléments morphématiques. Par souci de simplicité, on convient, dans ce qui suit, d'appeler mots les décompositions « adéquates » des mots ; la fonction f^* sera désignée par f.

On considérera la possibilité de représenter la fonction Γ dans le cas où f est donnée sous la forme (7) au moyen d'une fonction Φ résoluble :

$$f(C) = \Phi(\Gamma(C)). \tag{7}$$

Il est clair que toute fonction Γ ne peut être utilisée dans une telle représentation. Dans la représentation (7), la fonction Γ doit satisfaire à la condition suivante :

Si

$$\Gamma(C) = \Gamma(C'), \text{ alors } f(C) = f(C'). \tag{8}$$

En effet, si $\Gamma(C) = \Gamma(C')$, alors

$$f(C) = \Phi(\Gamma(C)) = \Phi(\Gamma(C')) = f(C').$$

12. Notion de fonction simple

Considérons que la fonction f est fixée. Voici une des manières de donner l'ensemble des morphèmes de la fonction Γ. L'ensemble de tous les éléments morphématiques se décompose en sous-ensembles disjoints, chacun de ces sous-ensembles représentant un morphème. Chacune de ces décompositions définit une fonction μ, qui associe à tout élément morphématique α un morphème bien déterminé $\mu(\alpha)$. La fonction Γ est définie à l'aide de la fonction μ, de la manière suivante : si le mot C consiste en des éléments morphématiques $\alpha_1, ..., \alpha_n$, alors

$$\Gamma(C) = \{ \mu(\alpha_1), ..., \mu(\alpha_n) \} .$$

La fonction Γ, ainsi représentée, sera appelée *simple* et l'ensemble de morphèmes définis par la fonction μ sera désigné par $\{ \mu \}$.

Pour éclaircir la possibilité de définir une fonction Γ simple, il faut tenir compte de la restriction (8). Par exemple, si on considère les mots *jüng-er* et *jüng-er-er*, alors, par une fonction Γ simple, leur correspond un même ensemble $S = \{ \mu(\textit{jüng}), \mu(\textit{er}) \}$ et si $f(\textit{jüng-er}) \neq f(\textit{jüng-er-er})$, (ce qui arrive, en fait, en allemand), alors f n'est représentée sous la forme (7) que par des fonctions Γ qui ne sont pas simples. La coïncidence de $\Gamma(C)$ avec $\Gamma(C')$ pour Γ simple peut se produire aussi lorsque C et C' sont formés des mêmes éléments morphématiques, se différenciant seulement par leur ordre. Il en résulte que, pour les langues où l'ordre des éléments morphématiques ou leur apparition répétée dans un mot exprime une information grammaticale essentielle, il n'est pas utile que la fonction Γ soit simple.

13. Représentation par fonctions Γ simples et fonctions Φ résolubles

Les problèmes qui nous préoccuperont maintenant sont les suivants :

1) Quelle est la classe F_0 des fonctions f qui admettent une représentation du type (7) avec une fonction Γ simple et une fonction Φ résoluble ?

2) Si $f \in F_0$, quelle est la classe M_f des fonctions μ qui définissent dans la représentation (7) une fonction Γ simple toutes les fois que Φ est résoluble ?

Définissons la fonction μ_0 comme la décomposition « unité » de l'ensemble d'éléments morphématiques, décomposition où chaque ensemble consiste en un seul élément morphématique : si $a = \mu_0(\alpha)$, alors $\mu_0^{-1}(a) = \{ \alpha \}$. Cette fonction μ_0 définit une fonction simple Γ_0. Soit f représentée sous forme (7), avec $\Gamma = \Gamma_0$ et $\Phi = \Phi_0$. Dans ce cas, la réponse au premier problème est donnée par le théorème suivant :

THÉORÈME 2. *$f \in F_0$ si et seulement si Φ_0 est résoluble.*

Démonstration. Si Φ_0 est résoluble, alors $f \in F_0$. Inversement, si $f \in F_0$, alors il existe μ qui définit Γ et Φ, telles que f admette la représentation (7) et que Φ soit résoluble. Soit ψ une fonction résolvante pour Φ. Définissons sur $\{ \mu_0 \}$ une fonction ψ_0 de la manière suivante :

$$\psi_0(\mu_0(\alpha)) = \psi(\mu(\alpha)) .$$

Si $C = \alpha_1, ..., \alpha_n$, alors

$$f(C) = \bigcap_{i=1}^{n} \psi(\mu(\alpha_i)) = \bigcap_{i=1}^{n} \psi_0(\mu_0(\alpha_i)) ,$$

donc ψ_0 est fonction résolvante pour Φ_0 et le théorème 2 est démontré.

14. Rôle des fonctions antimonotones

Si F_0^* est la classe des fonctions f qui admettent une représentation du type (7) avec une fonction Γ simple et une fonction Φ antimonotone, nous avons alors un théorème analogue :

THÉORÈME 2*. *$f \in F_0$ si et seulement si Φ_0 est antimonotone.*

Démonstration. Soit Γ simple et Φ antimonotone. Alors, si $\Gamma(C) \subset \Gamma(C')$, cela entraîne

$$\Phi(\Gamma(C)) \supseteq \Phi(\Gamma(C')) .$$

Mais, de

$$\Gamma_0(C) \subset \Gamma_0(C')$$

il résulte

$$\Gamma(C) \subseteq \Gamma(C') .$$

Du fait que

$$\Phi(\Gamma(C)) = \Phi_0(\Gamma_0(C)) = f(C)$$

pour tout C, il résulte Φ_0 est antimonotone et le théorème 2* est démontré.

Soit $f \in F_0$ et soit ψ résolvante pour Φ_0. On dira que les éléments morphématiques α et β sont *équivalents par rapport à ψ* si

$$\psi(\mu_0(\alpha)) = \psi(\mu_0(\beta)) .$$

Cette relation d'équivalence décompose l'ensemble d'éléments morphématiques en classes d'équivalence. La décomposition obtenue définit une certaine μ_ψ ; $\mu_\psi(\alpha) = \mu_\psi(\beta)$ si et seulement si

$$\psi(\mu_0(\alpha)) = \psi(\mu_0(\beta)) .$$

Désignons par M_ψ la classe des fonctions μ qui satisfont la condition :

$$\text{si} \quad \mu(\alpha) = \mu(\beta) , \quad \text{alors} \quad \psi(\mu_0(\alpha)) = \psi(\mu_0(\beta)) . \tag{9}$$

Dans la classe M_ψ rentrent toutes les fonctions μ qui définissent des décompositions de l'ensemble d'éléments morphématiques pour lesquelles

$$\mu^{-1}\,\mu(\alpha) \subseteq \mu_\psi^{-1}\,\mu_\psi(\alpha)\,, \tag{10}$$

et seulement de telles fonctions (ici, $\mu_\psi \in M_\psi$).

LEMME. $M_\psi \subseteq M_f$.

Démonstration. Soit $\mu \in M_\psi$ et $C = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$; en vertu du théorème 2, on a

$$f(C) = \bigcap_{i=1}^{n} \psi(\mu_0(\alpha_i))\,.$$

Contruisons la fonction ψ', définie sur $\{\,\mu\,\}$ de la manière suivante :

$$\psi'(\mu(\alpha)) = \psi(\mu_0(\alpha))\,.$$

En vertu de la condition (9), une telle construction est possible et fournit une fonction déterminée ψ'. On a

$$f(C) = \bigcap_{i=1}^{n} \psi'(\mu(\alpha_i))\,,$$

donc la fonction Φ, définie par l'intermédiaire de μ, est résoluble. Il en résulte que $\mu \in M_f$ et le lemme est démontré.

15. Cas où la résolubilité de Φ implique la simplicité de la fonction Γ

THÉORÈME 3. *Si ψ_0 est l'ensemble de toutes les fonctions résolvantes pour Φ_0, alors*

$$M_f = \bigcup_{\psi \in \Psi_0} M_\psi\,.$$

Démonstration. L'inclusion de l'ensemble de droite dans celui de gauche résulte du lemme. Il reste à établir l'autre inclusion. Soit $\mu' \in M_f$; soit Φ' la fonction qui correspond à μ' par (7) et soit ψ' la fonction résolvante pour Φ'. Donnons sur $\{\,\mu_0\,\}$ la fonction ψ définie de la manière suivante :

$$\psi(\mu_0(\alpha)) = \psi'(\mu'(\alpha))\,.$$

Si $C = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, alors

$$f(C) = \bigcap_{i=1}^{n} \psi'(\mu'(\alpha_i)) = \bigcap_{i=1}^{n} \psi(\mu_0(\alpha_i))\,,$$

où ψ est résolvante pour Φ_0 et $\psi \in \Psi_0$. Par la définition même de ψ, l'égalité $\mu'(\alpha) = \mu'(\beta)$ entraîne

$$\psi(\mu_0(\alpha)) = \psi(\mu_0(\beta)),$$

donc $\mu' \in M_\psi$ (voir [6]). Le théorème 3 est ainsi démontré. Il donne la réponse au second problème posé ci-dessus.

16. Relation de quasi-ordre dans l'ensemble des éléments morphématiques

Nous allons maintenant étudier la possibilité de construire, par une méthode simple, des fonctions $\mu \in M_f$, sans recourir aux fonctions résolvantes pour Φ.

Soient α et β deux éléments morphématiques. On écrira $\alpha < \beta$ si pour tout mot C qui contient α (c'est-à-dire pour lequel $\mu_0(\alpha) \in \Gamma_0(C)$) il existe un mot C' qui contient β (c'est-à-dire pour lequel $\mu_0(\beta) \in \Gamma_0(C')$, tel que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

1) $\Gamma_0(C) - \mu_0(\alpha) = \Gamma_0(C') - \mu_0(\beta)$ (par la substitution de α à β dans $\Gamma_0(C')$ on obtient $\Gamma_0(C)$) ;

2) $f(C) = f(C')$.

Par exemple, si f est définie de la manière suivante :

$$\begin{array}{ll} f(\rho_1\,\alpha) = I_1\,; & f(\rho_2\,\beta) = I_2\,; \\ f(\rho_1\,\beta) = I_2\,; & f(\rho_2\,\gamma) = I_3\,; \\ f(\rho_1\,\gamma) = I_3\,; & f(\rho_2\,\delta\delta) = I_2\,; \\ f(\rho_1\,\delta) = I_2\,; & \end{array}$$

où ρ_1, ρ_2, α, β, γ, δ sont des éléments morphématiques et I_1, I_2, I_3 sont des informations, alors $\rho_2 < \rho_1$ et $\delta < \beta$.

Il est évident que $\alpha < \alpha$ et de $\alpha < \beta < \gamma$ il résulte $\alpha < \gamma$, donc la relation $<$ est une relation de quasi-ordre dans l'ensemble des éléments morphématiques. (Toute relation réflexive et transitive est, par définition, une relation de quasi-ordre ([1], chapitre I, § 4)).

17. Quelques exemples tirés dans la langue russe

Pour la langue russe, les bases друг et доцент sont dans la relation

$$\text{друг} < \text{доцент}\,,$$

si f est définie sur l'ensemble des substantifs, avec l'information habituelle (du type « genre, nombre, cas »). En effet, le paradigme de déclinaison de la base друг (друг, друг-а, друг-у, друг-ом, друг-е) se transforme en une partie du paradigme de déclinaison de la base доцент (доцент, доцент-а, доцент-у, доцент-ом, доцент-е, доцент-ы, доцент-ов, доцент-ам, доцент-ами, доцент-ах) en remplaçant друг par доцент) et les informations correspondantes coïncident : f(друг-а) $= f$(доцент-а) et ainsi de suite. Mais, si f est aussi définie pour les mots друг-ой, друг-ого, etc., alors la relation друг $<$ доцент cesse d'être valable.

Un autre exemple. La base люд (considérée avec la forme flexionnelle люд-и) et la base дол (considérée avec la forme flexionnelle дол-а) ne se trouvent ni dans la relation $<$, ni dans la relation $>$, quoique le paradigme de la base люд se transforme en une partie du paradigme de la base дол, en remplaçant люд par дол, car l'information f(люд-и) ne coïncide pas avec l'information f(дол-и). Le mot дол-и est soit une forme de singulier-génitif, soit une forme de pluriel-nominatif tandis que люд-и est seulement une forme de pluriel-nominatif.

18. Relation d'ordre. Ordre partiel et ordre total

Une relation binaire R définie dans un ensemble E est dite *antisymétrique* dans E si pour deux éléments x et y de E, tels que xRy et yRx, on a $x = y$. Toute relation binaire R qui est réflexive, antisymétrique et transitive dans E est, par définition, une relation d'*ordre partiel* ou, simplement, une *relation d'ordre* dans E. On dit que E est un *ensemble partiellement ordonné* ou, simplement, un *ensemble ordonné* par R. Si, en outre, pour deux éléments quelconques x et $y \in E$, on a xRy ou yRx, alors R est un *ordre total* dans E ; l'ensemble E est, dans ce cas, *totalement ordonné* par R, ou encore une *chaîne* par rapport à R.

Toute relation d'ordre est une relation de quasi-ordre, mais la réciproque n'est pas vraie. Toute relation d'équivalence est une relation de quasi-ordre, mais la réciproque n'est pas vraie. Des rapports plus étroits entre ces trois types de relations sont établis dans les paragraphes suivants.

19. Relation d'équivalence associée à une relation de quasi-ordre

PROPOSITION 1. *Soit ρ une relation de quasi-ordre dans l'ensemble E. Soit R la relation binaire définie dans E de la manière suivante : xRy si $x\rho y$* et *$y\rho x$. R est une relation d'équivalence dans E. (On dit que R a été obtenue à partir de ρ par symétrisation).*

Démonstration. En vertu de la réflexivité de ρ, on a xRx, donc R est réflexive. De la définition même de R il s'ensuit que R est symétrique. Supposons maintenant que xRy et yRz ; xRy entraîne $x\rho y$, tandis que yRz entraîne $y\rho z$. En vertu de la transitivité de ρ, on a $x\rho z$. D'autre part, yRz entraîne $z\rho y$, tandis que xRy entraîne $y\rho x$; en utilisant de nouveau la transitivité de ρ, on déduit que $z\rho x$. On a donc à la fois $x\rho z$ et $z\rho x$, c'est-à-dire xRz. La transitivité de R est ainsi établie.

Désignons par K l'ensemble des classes de R-équivalence et par $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux éléments quelconques de K. On a la

PROPOSITION 2. *S'il existe un élément $\xi \in \mathscr{A}$ et un élément $\eta \in \mathscr{B}$ tel que $\xi\rho\eta$, alors pour tout $x \in \mathscr{A}$ et pour tout $y \in \mathscr{B}$ on a $x\rho y$.*

Démonstration. Du fait que $x \in \mathscr{A}$ et $\xi \in \mathscr{A}$ il s'ensuit que $x\rho\xi$; les relations $x\rho\xi$ et $\xi\rho\eta$ entraînent, en vertu de la transitivité de ρ, $x\rho\eta$. D'autre part, du fait que $\eta \in \mathscr{B}$ et $y \in \mathscr{B}$ il s'ensuit que $\eta\rho y$, tandis que les relations $x\rho\eta$ et $\eta\rho y$ entraînent, en vertu de la transitivité de ρ, $x\rho y$.

20. Relation d'ordre associée à une relation de quasi-ordre

Définissons, dans K, une relation binaire ρ' de la manière suivante : pour $\mathscr{A} \in K$, $\mathscr{B} \in K$, on a $\mathscr{A}\rho'\mathscr{B}$ si $x\rho y$ pour tout $x \in \mathscr{A}$ et pour tout $y \in \mathscr{B}$.

PROPOSITION 3. *ρ' est une relation d'ordre dans K.*

Démonstration. Soit $\mathscr{A} \in K$. Pour $a \in \mathscr{A}$, $b \in \mathscr{A}$ on a aRb, donc $a\rho b$, d'où $\mathscr{A}\rho'\mathscr{A}$ (réflexivité de ρ').

Soient maintenant deux éléments $\mathscr{A} \in K$, $\mathscr{B} \in K$ tels que $\mathscr{A}\rho'\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}\rho'\mathscr{A}$. Du fait que $\mathscr{A}\rho'\mathscr{B}$ il s'ensuit que pour tout $x \in \mathscr{A}$ et pour tout $y \in \mathscr{B}$ on a $x\rho y$; d'autre part, la relation $\mathscr{B}\rho'\mathscr{A}$ entraîne $y\rho x$, quels que soient $x \in \mathscr{A}$ et $y \in \mathscr{B}$. On a donc, pour tout $x \in \mathscr{A}$ et pour tout $y \in \mathscr{B}$, xRy ; en vertu du fait que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont des classes de R-équivalence, on déduit que $\mathscr{A} = \mathscr{B}$ (antisymétrie de ρ').

Supposons, enfin, que $\mathscr{A}\rho'\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}\rho'\mathscr{C}(\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C} \in K)$ et soient $x \in \mathscr{A}$, $y \in \mathscr{B}$, $z \in \mathscr{C}$. Du fait que $\mathscr{A}\rho'\mathscr{B}$ il s'ensuit que $x\rho y$, tandis que $\mathscr{B}\rho'\mathscr{C}$ entraîne $y\rho z$. En vertu de la transitivité de ρ, les relations $x\rho y$ et $y\rho z$ entraînent $x\rho z$, donc $\mathscr{A}\rho'\mathscr{C}$ (transitivité de ρ').

Remarque. L'ensemble K est désigné, d'habitude, par E/R et est appelé *l'ensemble quotient* de E par R. On dit encore que l'ensemble K est le résultat de la factorisation de E par R. La proposition 3 devient alors la

PROPOSITION 3'. *ρ' est une relation d'ordre dans E/R.*

On dit que ρ' est la relation d'ordre induite par ρ dans E/R. On a donc la

PROPOSITION 3'. *Si ρ est une relation de quasi-ordre dans E, et si R est la relation d'équivalence obtenue de ρ par symétrisation, alors la relation ρ', induite par ρ dans E/R, est une relation d'ordre dans E/R.*

21. Une relation d'équivalence et une relation d'ordre induite dans l'ensemble des classes d'équivalence

Si $\alpha < \beta$ et $\beta < \alpha$, alors on dira que α est *équivalent* à β ($\alpha \sim \beta$). Ainsi, par exemple, les bases зуб et след sont équivalentes. On observe facilement que toutes les propriétés de la relation d'équivalence sont satisfaites (en vertu de la proposition 1).

La relation $<$ entre deux éléments morphématiques induit (en vertu de la proposition 3), une relation d'ordre entre les classes d'équivalence auxquelles appartiennent ces éléments. Ainsi, l'ensemble des classes d'équivalence définies par $\sim$ devient un ensemble partiellement ordonné. Cet ensemble partiellement ordonné peut être décomposé — en général, non uniquement — en sous-ensembles disjoints, tels qu'à l'intérieur de chacun de ces sous-ensembles les classes d'équivalence peuvent être ordonnées sous forme d'un arbre

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x_i < \dots \\ x_j < \dots \end{array}\right\} < x_k < \cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} < x_r ,$$

22. Décompositions de l'ensemble des éléments morphématiques. Structure de la fonction μ

Supposons que nous avons décomposé l'ensemble des classes d'équivalence en de tels sous-ensembles $X_1, ..., X_m$. Construisons une décomposition de l'ensemble des éléments morphématiques de la manière suivante : α et β appartiennent au même sous-ensemble de la décomposition si et seulement si $\alpha \in x_i$, $\beta \in x_j$ et si les classes d'équivalence x_i et x_j appartiennent au même ensemble X_k. On obtient ainsi une nouvelle décomposition de l'ensemble des éléments morphématiques, décomposition qui définit une certaine fonction μ ; cette décomposition est moins fine que la décomposition correspondante à la fonction μ_e :

$$\mu^{-1}\,\mu(\alpha) \supseteq \mu_e^{-1}\,\mu_e(\alpha)\,.$$

En particulier, si chaque ensemble X_k est formé d'une seule classe d'équivalence, on a $\mu = \mu_e$.

Si f est définie sur l'ensemble des substantifs russes, alors, par la méthode décrite, peut être construite une fonction μ telle que

μ (ошибк) $=$ μ (ошибок) $=$ μ (ручк) $=$ μ (ручек) $=$ μ (берлог)

(pour les bases des mots ошибк-а, ручк-а, ошибок, ручек, берлог-а, берлог et autres) car

$$\left.\begin{array}{l} \text{ошибк} \sim \text{ручк} \\ \text{ошибок} \sim \text{ручек} \end{array}\right\} < \text{берлог}\,.$$

On peut aussi construire une autre fonction μ, telle que

$$\mu\,(\text{ошибк}) = \mu\,(\text{ручк}) = \mu\,(\text{стрел}) \text{ et ошибк} \sim \text{ручк} \sim \text{стрел}\,.$$

Cet exemple démontre la possibilité de construire, par la méthode décrite, différentes fonctions μ pour une seule et même fonction f.

La méthode décrite pour obtenir μ s'applique aussi aux fonctions de la classe F_0^* : si M_f^* est la classe des fonctions μ définies par la représentation (7) de la fonction f, avec Γ simple et Φ antimonotone, alors la méthode considérée conduit à des fonctions $\mu \in M_f^*$.

23. Illustration du lien qui existe entre non-résolubilité, simplicité et antimonotonie

La non-résolubilité de Φ de (7), pour Γ simple, peut être une conséquence du non-accomplissement de la condition d'antimonotonie pour Φ. Par exemple, en russe, les mots стол, стол-а, стол-у, etc. correspondent, habituellement, aux informations suivantes, du type « genre, nombre, cas » :

$$f\,(\text{стол}) = \{\, x_1, x_2 \,\}\,, f\,(\text{стол-а}) = \{\, x_3 \,\}\,, f\,(\text{стол-у}) = \{\, x_4 \,\}\,,$$

où

x_1 : *masculin, singulier, nominatif* ;
x_2 : *masculin, singulier, accusatif* ;
x_3 : *masculin, singulier, génitif* ;
x_4 : *masculin, singulier, datif*,

Quoiqu'on ait

$$\{\, \mu_0\,(\text{стол}) \,\} \subset \{\, \mu_0\,(\text{стол}), \mu_0\,(\text{а}) \,\}\,,$$
$$\{\, \mu_0\,(\text{стол}) \,\} \subset \{\, \mu_0\,(\text{стол}), \mu_0\,(\text{у}) \,\}\,,$$

les inclusions

$$f\,(\text{стол}) \supseteq f\,(\text{стол-а})$$
$$f\,(\text{стол}) \supseteq f\,(\text{стол-у})$$

n'ont pas lieu. Donc, pour cette fonction f il n'est pas possible de construire la représentation (7) telle que Γ soit simple et que Φ soit résoluble.

Dans ces cas on dit que les mots du type стол consistent non pas en un seul morphème, mais en deux morphèmes « habituels », associés à la base стол et en un certain morphème « nul ». L'introduction des morphèmes « nuls » permet d'écarter l'inclusion de Γ (стол) en Γ (стол-а) et en Γ (стол-у) et la condition d'antimonotonie est alors satisfaite, au moins pour ces trois mots.

Il est possible que la propriété d'antimonotonie ne soit pas satisfaite pour des mots qui consistent en au moins deux éléments morphématiques. Par exemple, en russe existent les mots применим et применимый. Si on décompose ces mots en éléments morphématiques, par la méthode habituelle, on obtient применим et примен-им-ый. Toute fonction Γ simple fournit l'inclusion

$$\Gamma\,(\text{примен-им}) \subseteq \Gamma\,(\text{примен-им-ый})\,,$$

et si f(примен-им-ый) n'est pas contenue dans f(примен-им) (ce qui arrive habituellement), alors la fonction Φ correspondante dans la représentation (7) ne sera pas antimonotone, donc elle sera non résoluble.

24. Rôle des morphèmes « nuls »

En tenant compte de ces phénomènes, nous définissons maintenant une classe plus large de fonctions Γ, classe qui nous permettra d'introduire les morphèmes « nuls ».

Donnons-nous une fonction f. Définissons, pour f, une certaine fonction simple Γ', l'ensemble correspondant de morphèmes étant N'. Introduisons l'ensemble N_0 des morphèmes nuls : $a_1^0, \dots, a_n^0$ et posons.

$$N = N' \cup N_0\,.$$

Considérons la fonction Γ qui associe à chaque mot C du domaine de définition de f un certain sous-ensemble de N, de la manière suivante :

$$\Gamma(C) = \Gamma'(C) \cup B_C\,, \tag{11}$$

où $B_C \subseteq N_0$ (l'ensemble B_C pouvant être vide pour certains mots C). On admettra que

$$N_0 = \cup\, B_C\,,$$

où la réunion est prise sur tous les mots C du domaine de définition de la fonction f.

Soit F_i la classe des fonctions f qui admettent une représentation de la forme (7) avec Φ résoluble, avec Γ du type indiqué ci-dessus et pour laquelle le nombre des morphèmes « nuls » (c'est-à-dire le nombre des éléments de l'ensemble N_0) est égal à i. Dans le cas où $i = 0$ on obtient la classe F_0 définie ci-dessus. Il est facile de voir que pour $i > j$ on a $F_i \subset F_j$.

THÉORÈME 4. *Si le domaine de définition de la fonction f consiste en m mots, alors $f \in F_m$.*

Démonstration. Soient $C_1, \dots, C_m$ les mots qui composent le domaine de définition de la fonction f. Construisons, pour f, une fonction simple Γ' (par exemple, on peut prendre $\Gamma' = \Gamma_0^0$) ; introduisons les morphèmes « nuls » $a_1^0, \dots, a_m^0$ et définissons la fonction Γ, en posant

$$\Gamma(C_i) = \Gamma'(C_i) \cup \{\, a_i^0 \,\}\,.$$

Dans ces conditions, la fonction Φ de la représentation (7) est résoluble. Il est facile de voir que la fonction ψ définie ci-dessous est une fonction résolvante pour Φ :

$$\psi(\mu'(\alpha)) = \bigcup_{i=1}^{m} f(C_i),$$

$$\psi(a_i^0) = f(C_i),$$

où μ' correspond à Γ' au sens défini dans ce paragraphe.

Ainsi, les classes F_i épuisent toutes les fonctions représentées sous la forme (7), avec Φ résoluble. Le problème de trouver, pour une fonction f donnée, la valeur minimale de i, telle que $f \in F_i$, présente un intérêt. Le théorème 4 donne seulement une limitation supérieure de cette valeur.

De manière analogue, on peut considérer les classes F_i de fonctions f pour lesquelles ce n'est pas la résolubilité de la fonction Φ de la représentation (7), où Γ a la forme (11), mais seulement l'antimonotonie qui est nécessaire.

25. Ordre des éléments morphématiques

Supposons maintenant que f est définie sur un ensemble de mots avec les propriétés suivantes : chaque mot consiste en au plus deux éléments morphématiques ; aucun mot ne consiste en la répétition du même élément morphématique ; il n'existe pas deux mots qui diffèrent seulement par l'ordre des éléments morphématiques. Si parmi ces mots existent les mots $C = \alpha$ et $C' = \alpha\beta$, avec $f(C) \nsubseteq f(C')$, alors f n'appartient pas à la classe F_0. Un exemple d'une telle fonction est fourni par la fonction f définie sur l'ensemble des substantifs russes (voir paragraphe 20). Toutefois, une fonction f du type décrit appartient à la classe F_1^*. En effet, définissons une fonction Γ de la forme (11) ayant un seul morphème nul a^0, de la manière suivante :

1) si $C = \alpha$, alors $\Gamma(C) = \{ \mu(\alpha_0), a^0 \}$;

2) si $C = \alpha\beta$, alors $\Gamma(C) = \Gamma_0(C)$.

Pour cette fonction Γ, quel que soit C, l'ensemble $\Gamma(C)$ consistera en deux morphèmes et l'inclusion $\Gamma(C) \subseteq \Gamma'(C')$ n'aura lieu pour aucun couple C, C'. Par exemple, Γ (стол) sera égal à $\{ \mu$ (стол), $a^0 \}$.

Dans le cas général, on a le théorème suivant :

THÉORÈME 4*. *Supposons que dans le domaine D de définition de la fonction f il n'existe pas deux mots qui diffèrent seulement par l'ordre des éléments morphématiques. Supposons encore qu'aucun élément morphématique ne se répète dans un même mot en D. Dans ces conditions, si n est le nombre maximum d'éléments morphématiques dont est composé un mot en D, alors* $f \in F_{n-1}^*$. *Il est aussi* *possible de construire une fonction Γ pour laquelle aucune paire de mots C et C' de D ne satisfasse l'inclusion $\Gamma(C) \subset \Gamma(C')$. Remarquons aussi que $F_i \subset F_i^*$ pour tout $i \geqslant 0$.*

Si dans le domaine D de définition de la fonction f il existe des mots qui ne diffèrent l'un de l'autre que par la répétition de certains éléments morphématiques ou par l'ordre de ces éléments, alors la construction d'une fonction Γ de la forme (11), avec Γ' simple et avec Φ résoluble (antimonotone) dans la représentation (7), peut nécessiter l'introduction d'un grand nombre de morphèmes « nuls » ce qui serait irrationnel. Dans ce cas il est commode d'incorporer, à chaque élément morphématique d'un mot, son numéro d'ordre, deux éléments morphématiques devant donc être considérés comme distincts, même s'ils ne diffèrent que par leur position dans le mot.

26. Fonctions presque simples

Donnons-nous une fonction f. A chaque élément morphématique α associons les couples (α, i), $i = 1, 2, \ldots$ et les morphèmes $v_i(\alpha)$. Il existe la possibilité que pour $\alpha \neq \beta$ et $i \neq j$ on ait $v_i(\alpha) = v_i(\beta)$. Si $C = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, alors $\Gamma(C)$ est défini de la manière suivante :

$$\Gamma(C) = \{ v_1(\alpha_1), \ldots, v_n(\alpha_n) \} = \{ v_i(\alpha_i) \}_{i=1}^{n} . \qquad (12)$$

De manière analogue, on peut encore définir une fonction Γ telle que

$$\Gamma(C) = \{ v_n(\alpha_1), \ldots, v_1(\alpha_n) \} = \{ v_{n-i+1}(\alpha_i) \}_{i=1}^{n} . \qquad (13)$$

Une fonction Γ de la forme (12) ou (13) sera appelée *presque simple*. A la différence des fonctions Γ simples, ces fonctions enregistrent aussi la position des éléments morphématiques dans les mots. Par « position » nous entendons ici le numéro d'ordre de l'élément morphématique en question, lorsqu'on compte de gauche à droite (comme dans (12)) ou de droite à gauche (comme dans (13)) les éléments morphématiques du mot considéré.

Définissons, pour la fonction f, une fonction Γ presque simple et soit N' l'ensemble correspondant de morphèmes. Introduisons l'ensemble N_0 des morphèmes « nuls » et définissons la fonction Γ avec l'ensemble correspondant de morphèmes $N = N' \cup N_0$ définie comme à (11) :

$$\Gamma(C) = \Gamma'(C) \cup B_C , \qquad (14)$$

où

$$B_C \subseteq N_0 \quad \text{et} \quad N_0 = \cup B_C .$$

Désignons par $G_i(G_i^*)$ la classe des fonctions f qui admettent la représentation (7) avec une fonction Φ résoluble (antimonotone) et avec une fonction Γ de la forme (14), pour laquelle le nombre des morphèmes « nuls » est égal à i. Il est évident que

$$F_i \subseteq G_i \qquad (F_i^* \subseteq G_i^*) .$$

Dans certains cas, la valeur minimale de i pour laquelle

$$f \in G_i \qquad (f \in G_i^*)$$

peut être effectivement plus petite que la valeur minimale de j pour laquelle

$$f \in F_j \qquad (f \in F_j^*) .$$

27. Structure de la fonction Π

L'introduction d'une fonction Π différente de la fonction identique peut être utile dans le cas où la représentation de la fonction f sous la forme (7), avec Γ de la forme (14) et avec Φ résoluble, est trop compliquée. On peut alors essayer de remplacer la fonction Φ, dans une représentation simple de la fonction f sous la forme (7), par une autre fonction Φ', définie sur le même ensemble d'éléments S que Φ, mais avec d'autres valeurs que Φ, en indiquant ensuite une fonction Π assez simple, qui associe à chaque information $\Phi'(S)$ l'information nécessaire

$$\Pi\big(\Phi'(S)\big) = f(C) ,$$

où $S = \Gamma(C)$.

On considérera une classe assez large de fonctions Φ, qui admettent la représentation

$$\Phi(S) = \Pi\big(\Phi'(S)\big) \tag{15}$$

avec Φ' est Π définies d'une manière simple, comme suit :

Au lieu de l'ensemble X_Φ d'informations élémentaires x, qui figurent dans l'expression de $\Phi(S)$, on introduira un autre ensemble, X'_Φ, d'informations élémentaires ; on définira la fonction Π qui associe à tout $y \in X'_\Phi$ une information élémentaire bien déterminée $x = \Pi(y)$, avec $x \in X_\Phi$ et telle que les ensembles

$$\Pi^{-1}(x) \qquad (x \in X_\Phi)$$

définissent une partition de l'ensemble X_Φ. Si

$$\Phi(S) = \{ x_1, ..., x_n \} ,$$

alors

$$\Phi'(S) = \{ y_1, ..., y_n \} , \qquad \text{où} \qquad y_i \in \Pi^{-1}(x_i) ; \tag{16}$$

si

$$\Phi(S) = \{ y_1, ..., y_n \},$$

alors

$$\Phi(S) = \Pi(\Phi'(S)) = \{ \Pi(y_1), ..., \Pi(y_n) \}. \tag{17}$$

28. Fonctions décomposables

On dira que Φ est *décomposable* s'il existe une fonction Π de la forme indiquée, telle qu'il soit possible que Φ soit donnée sous la forme (15), avec Φ' et Π de la forme (16), respectivement (17), Φ' étant résoluble.

Soit donnée une fonction Φ. Décomposons — si c'est possible — son domaine de définition

$$\Sigma_\Phi = \{ S \}$$

en m ensembles Σ_i disjoints deux à deux, tels que pour chaque $S \in \Sigma_i$, l'existence des éléments

$$S_1 \in \Sigma_{j_1}, \quad S_2 \in \Sigma_{j_2}, ..., S_l \in \Sigma_{j_l} \qquad (i \neq j_k, k = 1, 2, ..., l)$$

et le fait que

$$S \subseteq \bigcup_{k=1}^{l} S_k$$

entraînent

$$\Phi(S) \supseteq \bigcup_{k=1}^{l} \Phi(S_k).$$

S'il existe une partition de l'ensemble Σ_Φ qui ait la propriété mentionnée, on définit sur chaque ensemble Σ_i une fonction Φ_i $(i = 1, 2, ..., m)$ dont les valeurs coïncident, pour $S \in \Sigma_i$, avec les valeurs correspondantes de Φ, c'est-à-dire $\Phi_i(S) = \Phi(S)$ pour $S \in \Sigma_i$ $(i = 1, 2, ..., m)$. La totalité $\{ \Phi_i \}$ des fonctions Φ_i ainsi définies $(i = 1, ..., m)$ s'appelle *décomposition* de la fonction Φ et chaque Φ_i est une *composante* de cette décomposition.

THÉORÈME 5. *S'il existe une décomposition de la fonction Φ dont les composantes sont, toutes, des fonctions résolubles, alors Φ est décomposable.*

Démonstration. Voici la manière de construire les fonctions Φ' et Π. Soit $\{ \Phi_i \}$ une décomposition de Φ et supposons que chacun des Φ_i est résoluble. Numérotons les informations élémentaires de l'ensemble X_Φ : $x_1, x_2, ..., x_n$.

Soit $x_i \in X_\Phi$ et soient

$$\Sigma_{i_1}, \Sigma_{i_2}, ..., \Sigma_{i_{k_i}}$$

les domaines de définition des composantes Φ_j, tels que pour tout $l = 1, ..., k$, il existe

$$S \in \Sigma_{i_l} \qquad \text{et} \qquad x_i \in \Phi(S) .$$

Pour chaque $x_i \in X_\Phi$ on introduit de nouvelles informations élémentaires, distinctes deux à deux,

$$y_{i_1}, ..., y_{i_{k_i}},$$

et on définit

$$X'_\Phi = \{ y_{i_j} \} \qquad (i = 1, ..., n ; \;\; j = 1, ..., k_i) .$$

La fonction Π sera donnée par :

$$\Pi^{-1}(x_i) = \{ y_{i_1}, ..., y_{i_{k_i}} \} .$$

Pour chaque $S \in \Sigma_{i_j}$ remplaçons $x_i \in \Phi(S)$ par

$$y_{i_j} (i = 1, ..., n ; \;\; j = 1, ..., k_i) .$$

Comme résultat, on obtient une nouvelle fonction Φ', définie sur Σ_Φ et dont les valeurs contiennent des informations élémentaires de X'_Φ. En vertu de l'observation faite au début du paragraphe 12, on peut montrer qu'une fonction ainsi obtenue est résoluble.

Supposons qu'on peut définir un sous-ensemble R de l'ensemble d'éléments morphématiques qui interviennent dans la décomposition des mots du domaine de définition de la fonction f, tel qu'on ait la propriété suivante : tout mot contient un élément morphématique $\rho \in R$ et un seul. Abstraction faite des mots composés (qui — dans certaines langues, par exemple en allemand — sont très nombreux), pour jouer le rôle de l'ensemble R on peut prendre l'ensemble des bases. Pour une fonction Γ de la forme (14) (avec Γ' presque simple), l'ensemble

$$\Gamma(R) = \{ r \}, \qquad \text{où} \qquad r = v_i(\rho),$$

aura la propriété suivante : si $S \in \Gamma(C)$, alors S contient un morphème $r \in \Gamma(R)$ et un seul.

L'ensemble Σ_i qui est intervenu dans la définition de la décomposition de Φ, peut être défini dans ce cas, comme l'ensemble des éléments S contenant un seul et même morphème $r_i \in \Gamma(R)$. L'ensemble Σ_i sera le « paradigme » du morphème r_i, associé au « paradigme » de la base correspondante

$$\rho \in \bigcup_k c^{-1}(r_i) .$$

Il faut maintenant chercher la manière de choisir les éléments morphématiques, pour pouvoir définir la fonction Γ de la forme (14), avec des composantes Φ_i résolubles, définies sur ces « paradigmes ».

En utilisant le procédé décrit dans la démonstration du théorème 5, on décompose les éléments d'information x_i en

$$y_{i_1}, \dots, y_{i_{k_i}},$$

où chaque y_{i_j} correspond à l'information

$$x_i \text{ et le morphème } r_{i_j}.$$

29. Représentation de la fonction f à l'aide d'un tableau

Nous avons spécifié, au début de ce chapitre, que la manière la plus simple de donner la fonction f consiste à indiquer, à l'aide d'un tableau, ses valeurs.

Dans ce qui suit, en développant cette observation, nous allons faire l'analyse de la méthode suivante pour construire une morphologie formelle. Donnons-nous les mots d'une langue et pour chaque mot l'information grammaticale correspondante. Il existe un algorithme à l'aide duquel chaque mot se décompose de manière unique en éléments morphématiques. A chaque élément morphématique de cette décomposition on associe une information grammaticale, telle qu'une information grammaticale associée à un mot soit justement l'intersection des informations grammaticales des éléments morphématiques qui entrent dans la décomposition du mot.

Nous allons étudier les conditions dans lesquelles se réalise une correspondance semblable à celle que nous venons de décrire. (Pour l'interprétation linguistique, le lecteur se référera aux considérations développées aux paragraphes précédents.) Du point de vue mathématique, le problème est le suivant :

Considérons comme donnés :

a) un ensemble fini $A = \{ a \}$ (l'ensemble des éléments morphématiques) et un ensemble fini $B = \{ b \}$ (l'ensemble des informations grammaticales élémentaires) ;

b) une famille $\mathscr{A} = \{ S \}$ de sous-ensembles non vides de A (donc $S \subseteq A$) (l'ensemble des mots) ; la famille $\mathscr{D} = \{ T \}$ de tous les sous-ensembles non vides de l'ensemble B (donc $T \subseteq B$) (l'ensemble des informations grammaticales) ;

c) une application f de l'ensemble $\mathscr{A}$ dans l'ensemble $\mathscr{D}$.

Dans ce qui suit, nous discuterons différentes propriétés du tableau $\{ S, f(S) \}$.

30. Fonction résolvante associée à un tableau résoluble

Rappelons d'abord quelques définitions. Le tableau $\{ S, f(S) \}$ est dit *résoluble* s'il existe une application ψ de l'ensemble A dans l'ensemble $\mathscr{D}$, telle que

$$f(S) = \bigcap_{a \in S} \psi(a)\,, \tag{18}$$

quel que soit $S \in \mathscr{A}$.

Une fonction ψ pour laquelle on a la relation (18) est dite *fonction résolvante* du tableau $\{S, f(S)\}$.

On définit une fonction φ de la manière suivante :

$$\varphi(a) = \bigcup_{a \in S} f(S)\,.$$

On peut, maintenant, formuler deux lemmes et un théorème relatifs aux propriétés de la fonction φ (leur démonstration a été donnée ci-dessus).

LEMME 2. *Si le tableau $\{S, f(S)\}$ est résoluble et si ψ est une fonction résolvante du tableau, alors*

$$\varphi(a) \leqslant \psi(a) \qquad \text{pour tout} \qquad a \in A\,.$$

LEMME 3. *Pour tout tableau et pour tout $S_0 \in \mathscr{A}$ on a l'inclusion*

$$f(S_0) \subseteq \bigcap_{a \in S_0} \varphi(a)\,.$$

THÉORÈME 6. *Si le tableau est résoluble, alors φ est la fonction résolvante correspondante.*

Le théorème 6 permet de réduire le problème d'existence de la fonction résolvante du tableau $\{S, f(S)\}$ à l'étude de la fonction φ. En effet, pour que le tableau soit résoluble, il est nécessaire et suffisant que la fonction φ soit sa fonction résolvante. Toutefois, il est facile de montrer qu'il existe des tableaux non résolubles. Considérons, par exemple, le tableau suivant :

$$\begin{aligned} A = \{a, b, c\}\,; \qquad & B = \{x, y, z\}\,; \\ f(a, b) = (x, y)\,; & \\ f(a, c) = (x, z)\,; & \\ f(b, c) = (y, z)\,. & \end{aligned} \tag{19}$$

Construisons pour ce tableau, la fonction φ correspondante :

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= (x, y, z)\,; \\ \varphi(b) &= (x, y, z)\,; \\ \varphi(c) &= (x, y, z)\,. \end{aligned}$$

Donc, le tableau (19) est non résoluble, car, par exemple,

$$\varphi(a) \cap \varphi(b) = (x, y, z) \neq f(a, b)\,.$$

31. Complétion d'un tableau

Nous étudierons maintenant des conditions nécessaires et suffisantes de résolubilité du tableau, conditions qui n'exigent pas la construction de la fonction φ.

DÉFINITION. *On appellera complétion du tableau* $\{S, f(S)\}$ *un tableau* $\{S^*, f(S^*)\}$, *défini sur les ensembles A et B, de la manière suivante* :

1) si $S \in \mathscr{A}$, alors $S \in \mathscr{A}^*$ et $f^*(S) = f(S)$;
2) si $S_1, S_2, ..., S_k \in \mathscr{A}$, alors

$$\bigcup_{i=1}^{k} S_i \in \mathscr{A}^*$$

et

$$f^*\left(\bigcup_{i=1}^{k} S_i\right) = \bigcap_{i=1}^{k} f(S_i).$$

Si pour $S_1, S_2, ..., S_j \in \mathscr{A}$, $S'_1, S'_2, ..., S'_k \in \mathscr{A}$, tels que

$$\bigcup_{i=1}^{j} S_i = \bigcup_{i=1}^{k} S'_i,$$

on a

$$f^*\left(\bigcup_{i=1}^{j} S_i\right) = f^*\left(\bigcup_{i=1}^{k} S'_i\right),$$

alors la complétion $\{S^*, f^*(S^*)\}$ est uniquement déterminée. Dans le cas contraire, la complétion n'est pas uniquement déterminée.

32. Caractérisation des tableaux résolubles

THÉORÈME 7. *Une condition nécessaire et suffisante pour que le tableau* $\{S, f(S)\}$ *soit résoluble est que la complétion* $\{S^*, f^*(S^*)\}$ *soit uniquement déterminée.*

Démonstration. La condition est nécessaire. Supposons que le tableau est résoluble et soient

$$S_1, S_2, ..., S_j \in \mathscr{A},$$

$$S'_1, S'_2, ..., S'_k \in \mathscr{A},$$

tels que

$$\bigcup_{i=1}^{j} S_i = \bigcup_{i=1}^{k} S'_i = S^*.$$

Dans ces conditions, on a

$$f^*\left(\bigcup_{i=1}^{j} S_i\right) = \bigcap_{i=1}^{j} f(S_i) = \bigcap_{i=1}^{j} \bigcap_{a \in S_i} \varphi(a) = \bigcap_{a \in S^*} \varphi(a) .$$

De manière analogue, on a

$$f^*\left(\bigcup_{i=1}^{k} S_i'\right) = \bigcap_{a \in S^*} \varphi(a) ,$$

donc

$$f^*\left(\bigcup_{i=1}^{j} S_i\right) = f^*\left(\bigcup_{i=1}^{k} S_i'\right) ,$$

et la nécessité de la condition est établie.

La condition est suffisante. Procédons par réduction à l'absurde. Supposons que le tableau admet une complétion uniquement déterminée et que cependant il est non résoluble. Cela signifie qu'il existe un $S_0 \in \mathscr{A}$, tel que, pour tout $b_0 \in B$,

$$b_0 \in \bigcap_{a \in S_0} \varphi(a) , \qquad \text{mais} \qquad b_0 \notin f(S_0) .$$

Dans ces conditions il existe, pour chaque $a_i \in S_0$, un $S_i \in \mathscr{A}$, tel que $S_i \neq S_0$, $a_i \in S_i$ et $b_0 \in f(S_i)$. On obtient des éléments de $\mathscr{A}$: $S_1, S_2, ..., S_n$, où n est le nombre des éléments de S_0.

Posons

$$S^* = \bigcup_{i=1}^{n} S_i .$$

Il est évident que

$$S^* \in \mathscr{A}^*$$

et

$$b_0 \in f^*(S^*) .$$

Posons

$$S'^* = \left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) \cup S_0 .$$

Puisque

$$S_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S_i ,$$

on a

$$S^* = S'^* .$$

Mais

$$b_0 \notin f^*(S'^*) .$$

Donc, la complétion n'est pas uniquement déterminée, ce qui contredit l'hypothèse. Nous avons ainsi démontré que la condition est suffisante.

33. L'antimonotonie des tableaux résolubles

COROLLAIRE. *Si le tableau est résoluble, alors il est antimonotone* (c'est-à-dire, si $S_0 \in \mathscr{A}$, $S_1 \in \mathscr{A}$ et $S_0 \subset S_1$, alors $f(S_1) \subseteq f(S_0)$).

Démonstration. Supposons, par réduction à l'absurde, que le tableau est résoluble, mais qu'il n'est pas antimonotone. Cela signifie qu'il existe $S_0 \in \mathscr{A}$ et $S_1 \in \mathscr{A}$ tels que

$$S_0 \subset S_1 \qquad \text{et} \qquad f(S_1) \nsubseteq f(S_0) .$$

Posons

$$S^* = S_0 \cup S_1 .$$

Il est évident que $S^* = S_1$, mais

$$f^*(S^*) = f(S_1) \cap f(S_0) \neq f^*(S_1) .$$

Donc, la complétion du tableau n'est pas uniquement déterminée. En vertu du théorème 7, le tableau n'est pas résoluble. Mais cela contredit l'hypothèse. Le corollaire est ainsi démontré.

L'utilisation du théorème 7 est assez incommode, à cause de la difficulté de construire la complétion d'un tableau. Le théorème qui suit donne une autre caractérisation des tableaux résolubles, caractérisation qui n'utilise plus la notion de complétion.

Désignons par Φ l'application suivante de l'ensemble B sur l'ensemble de toutes les parties de l'ensemble A :

$$\Phi(b) = \bigcup_{f(S) \ni b} S , \qquad S \in \mathscr{A} .$$

34. Caractérisation des tableaux résolubles, sans utiliser la notion de complétion

THÉORÈME 8. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un tableau soit résoluble est que pour tout $S_0 \in \mathscr{A}$, l'inclusion $S_0 \subseteq \Phi(b)$ implique*

$$b \in f(S_0) . \tag{20}$$

Démonstration. La condition est nécessaire. — Si $S_0 \subset \Phi(b_0)$ et $a_0 \in S_0$, alors $b_0 \in \varphi(a_0)$. Donc, si

$$b_0 \notin f(S_0),$$

alors

$$f(S_0) \neq \bigcap_{a \in S_0} \varphi(a).$$

Vu que b_0 et S_0 sont arbitraires, cela entraîne la nécessité de la condition.

La condition est suffisante. — Supposons, par réduction à l'absurde, qu'il existe un tableau qui satisfait la condition (20) et qui cependant n'est pas résoluble. Cela signifie qu'il existe S_0 tel que

$$f(S_0') \subset \bigcap_{a' \in S_0} \bigcup_{S' \ni a'} f(S').$$

Donc, il existe $b_0 \in B$, tel que

$$b_0 \in \bigcap_{a' \in S_0} \bigcup_{S' \ni a'} f(S') \qquad \text{et} \qquad b_0 \notin f(S_0).$$

Soit $S_0 = (a_1, a_2, ..., a_n)$; pour tout $a_i \in S_0$ on a

$$b_0 \in \bigcup_{S' \quad a_i} f(S'),$$

c'est-à-dire qu'il existe S_i', $i = 1, 2, ..., n$, tel que

$$a_i \in S_i' \qquad \text{et} \qquad b_0 \in f(S_i').$$

Mais alors

$$S_0 \subseteq \Phi(b_0)$$

et, puisque

$$b_0 \notin f(S_0),$$

on obtient une contradiction. Nous avons ainsi démontré que la condition est suffisante.

35. Illustration des deux manières de vérifier la résolubilité d'un tableau

En utilisant le théorème 8, la résolubilité du tableau peut être vérifiée de la manière suivante : décomposons l'ensemble $\mathscr{A}$ en chaînes du type :

$$S_0' \supset S_1' \supset \cdots \supset S_{k_1}' ;$$

$$S_0^2 \supset S_1^2 \supset \cdots \supset S_{k_2}^2 ;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_0^n \supset S_1^n \supset \cdots \supset S_{k_n}^n .$$

On vérifie, pour chaque chaîne, l'antimonotonie, c'est-à-dire les inclusions

$$f(S'_0) \subseteq f(S'_1) \subseteq \cdots \subseteq f(S'_{k_1})\,;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(S^n_0) \subseteq f(S^n_1) \subseteq \cdots \subseteq f(S^n_{k_n})\,.$$

Si pour au moins une chaîne la condition d'antimonotonie n'est pas vérifiée, alors, en vertu du corollaire du théorème 7, le tableau n'est pas résoluble. Mais si la condition d'antimonotonie est satisfaite pour toutes les chaînes, alors, pour chaque $b \in B$, on choisit dans chaque chaîne le premier sous-ensemble de gauche, qui entre en $\Phi(b)$. Si cet ensemble a été trouvé, on vérifie pour lui la condition (20). Pour les autres sous-ensembles des chaînes, la condition (20) sera satisfaite automatiquement. Cette méthode permet non seulement de contrôler la résolubilité du tableau, mais aussi de trouver, pour tout $S_0 \in \mathscr{A}$, l'intersection $\bigcap_{a \in S_0} \varphi(a)$, sans avoir besoin de construire la fonction φ.

La méthode présentée est commode surtout lorsque le tableau peut être décomposé en un nombre pas trop grand de chaînes.

Donnons un exemple qui illustre l'application des théorèmes 7 et 8.

Nous nous proposons de déterminer si le tableau suivant est ou non résoluble :

$$\begin{aligned} f(a, b) &= (x, y)\,; \\ f(a, c) &= (x, z)\,; \\ f(b, c) &= (y, z)\,; \\ f(a, b, d) &= (x)\,; \\ f(a, c, e) &= (z)\,. \end{aligned}$$

Construisons les complétions de ce tableau :

$$f^*[(a, b) \cup (a, c)] = f^*(a, b, c) = (x)\,;$$
$$f^*[(a, b) \cup (b, c)] = f^*(a, b, c) = (y)\,.$$

Donc, en vertu du théorème 7, le tableau n'est pas résoluble, car la complétion n'est pas unique.

Pour vérifier le même fait à l'aide du théorème 8, décomposons l'ensemble $\mathscr{A}$ dans les chaînes suivantes :

$$(a, b, d)\,;\,(a, b)\,;$$
$$(a, c, e)\,;\,(a, c)\,;$$
$$(b, c)\,.$$

On obtient la fonction Φ donnée par :

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= (a, b, c, d)\,; \\ \Phi(y) &= (a, b, c)\,; \\ \Phi(z) &= (a, b, c, e)\,. \end{aligned}$$

La condition d'antimonotonie pour des chaînes est satisfaite. Cependant, quoique $(a, b) \subset \Phi(z)$, on a

$$z \notin f(a, b) .$$

Donc, en vertu du théorème 8, le tableau n'est pas résoluble.

36. Propriétés des tableaux résolubles. Ensembles admis

Dans ce paragraphe nous étudions certaines propriétés des tableaux résolubles.

Considérons d'abord le problème de la possibilité d'écarter certains éléments de l'ensemble A.

Soit donné un sous-ensemble $Q \subset A$. Posons $A' = A - Q$. Pour chacun des sous-ensembles $S \subset A$ construisons l'ensemble $S' \subset A'$, de la manière suivante : $S' = A' \cap S$. Si chacun des S' diffère de l'ensemble vide, on obtient un nouveau tableau, défini sur les ensembles A et B : $\{ S', f(S') \}$, qui différera du tableau initial par l'ensemble $\mathscr{A}'$.

L'ensemble $A' = A - Q$ est dit *admis*, si l'on peut construire le tableau $\{ S', f(S') \}$ et si ce tableau est résoluble.

Pour pouvoir énoncer un critère d'admissibilité, on introduira deux fonctions qui appliquent le système des sous-ensembles non vides de l'ensemble A dans l'ensemble $\mathscr{D}$.

Soit un sous-ensemble $Q \subset A$. Posons

$$1)\ \xi(Q) = \begin{cases} B - \bigcap\limits_{a \in Q} \varphi(a), & \text{s'il existe } S_0 \in \mathscr{A}, \text{ tel que } S_0 \subseteq Q ; \\ \bigcup\limits_{S \cap Q \neq 0} \Big(\bigcap\limits_{a \in S - Q} \varphi(a) - \bigcap\limits_{a \in S} \varphi(a) \Big) ; \end{cases}$$

$$2)\ \eta(Q) = B - \xi(Q).$$

Voici quelques propriétés évidentes des fonctions ξ et η :

a) $\xi(Q) \cap \Big(\bigcap\limits_{a \in Q} \varphi(a) \Big) = 0$;

b) si $Q' \subset Q$, alors $\xi(Q') \subseteq \xi(Q)$, c'est-à-dire la fonction ξ est monotone ;

c) $\bigcap\limits_{a \in Q} \varphi(a) \subseteq \eta(Q)$;

d) Si $Q' \subset Q$, alors $\eta(Q) \subseteq \eta(Q')$, c'est-à-dire que la fonction η est antimonotone.

37. Manière de trouver les ensembles admis

THÉORÈME 9. *L'ensemble $A' = A - Q$ est admis si et seulement si $\xi(Q) = 0$ et si on peut construire le tableau $\{ S', f(S') \}$.*

Démonstration. Si $\xi(Q) = 0$, alors

$$\bigcap_{a \in S-Q} \varphi(a) = \bigcap_{a \in S} \varphi(a)$$

pour tous les ensembles S pour lesquels $S \cap Q \neq 0$. Cela signifie, en outre, que le tableau $\{ S', f(S') \}$ est résoluble.

Si la condition $\xi(Q) = 0$ n'est pas satisfaite, alors il existe un $S_0 \in \mathscr{A}$, pour lequel

$$\bigcap_{a \in S_0 - Q} \varphi(a) \supset \bigcap_{a \in S_0} \varphi(a) = f(S_0)\,.$$

Donc, dans ce cas, le tableau $\{ S' f(S') \}$ n'est pas résoluble.

En partant du théorème 9 et de la propriété *b*) de la fonction ξ, on peut proposer le procédé suivant pour trouver les ensembles admis.

On isole les éléments $a \in A$ pour lesquels $\xi(a) = 0$. On sépare, parmi les éléments isolés $a_1, a_2, \ldots, a_n$, les couples (a_i, a_j), pour lesquelles $\xi(a_i, a_j) = 0$. Ensuite, de la même manière on sépare des triplets (a_i, a_j, a_k). Ce processus continue jusqu'à ce qu'on ne puisse plus rien séparer. Le système Q d'éléments séparés, comme on l'a montré, est formé exactement par les sous-ensembles de A qui sont permis, au sens de la définition ci-dessus.

Pour donner un exemple, on se propose d'étudier la résolubilité du tableau :

$$\begin{aligned} &f(a, b, c, d) = (t)\,; \\ &f(a, c, e) = (t, z)\,; \\ &f(a, e) = (t, x, y, z)\,; \\ &f(b, c, d) = (s, t)\,. \end{aligned}$$

La fonction φ correspondante est donnée par :

$$\begin{aligned} &\varphi(a) = (t, x, y, z)\,; \\ &\varphi(b) = (s, t)\,; \\ &\varphi(c) = (s, t, z)\,; \\ &\varphi(d) = (s, t)\,; \\ &\varphi(e) = (t, x, y, z)\,. \end{aligned}$$

Trouvons les ensembles admis de ce tableau. On a :

$$\begin{array}{ll} \xi(a) = (S)\,; & \xi(b, d) = (z)\,; \\ \xi(b) = 0\,; & \xi(b, e) = 0\,; \\ \xi(c) = (x, y)\,; & \xi(d, e) = 0\,. \\ \xi(d) = 0\,; & \\ \xi(e) = 0\,; & \end{array}$$

On sépare les sous-ensembles suivants : $Q_1 = (b)$, $Q_2 = (d)$, $Q_3 = (e)$, $Q_4 = (b, c)$, $Q_5 = (d, e)$. Les ensembles $A - Q_i$, où $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sont permis. Par exemple, pour la différence $A - Q_4$ on obtient le tableau résoluble suivant :

$$\begin{aligned} f(a, c, d) &= (t)\,; \\ f(a, c) &= (t, z)\,; \\ f(a) &= (t, x, y, z)\,; \\ f(c, d) &= (s, t)\,. \end{aligned}$$

38. Extension d'un tableau. Résolubilité d'une extension

Considérons maintenant le problème de l'extension du tableau $\{S, f(S)\}$. Supposons qu'il faut ajouter au tableau la ligne S_0, T_0, ($S_0 \in \mathscr{A}$). On obtient un nouveau tableau $\{S', f'(S')\}$, où

$$\mathscr{A}' = \mathscr{A} \cup S_0\,, \quad f'(S) = f(S)\,, \quad \text{si } S \in \mathscr{A}$$
$$f'(S_0) = T_0\,.$$

Dans quelles conditions le tableau $\{S', f'(S')\}$ est-il résoluble ? Une réponse est donnée par le

THÉORÈME 10. *Une condition nécessaire et suffisante pour que le tableau* $\{S', f'(S')\}$ *soit résoluble est*

$$\bigcap_{a \in S_0} \varphi(a) \subseteq f'(S_0) \subseteq \eta(S_0)\,,$$

où φ *et* η *sont des fonctions du tableau résoluble initial* $\{S, f(S)\}$.

Démonstration. La condition est nécessaire. On montrera que si une au moins des inclusions ci-dessus n'a pas lieu, le tableau $\{S', f'(S')\}$ n'est pas résoluble. Soit

$$\bigcap_{a \in S_0} \varphi(a) \nsubseteq f'(S_0)\,.$$

Dans ce cas, la non-résolubilité du tableau résulte de l'inclusion

$$\bigcap_{a \in S_0} \varphi(a) \subseteq \bigcap_{a \in S_0} \varphi'(a)\,,$$

où φ' est la fonction construite pour un nouveau tableau $\{S', f'(S')\}$. Soit maintenant

$$f'(S_0) \nsubseteq \eta(S_0)\,;$$

Dans ce cas, il existe un élément $b_0 \in f'(S_0)$ pour lequel

$$b_0 \notin \eta(S_0)\,.$$

Donc, $b_0 \in \xi(S_0)$ et il existe un S_1 pour lequel

$$b_0 \notin f(S_1) \qquad \text{et} \qquad b_0 \in \bigcap_{a \in S_1 - S_0} \varphi(a)\,.$$

Dans ces conditions, puisque pour $a \in S_0$ on a $b_0 \in \varphi'(a)$, il en résulte l'inclusion suivante :

$$\Big[\bigcap_{a \in S_1 - S_0} \varphi(a)\Big] \cap \Big[\bigcap_{a \in S_0} \varphi'(a)\Big] \subseteq \bigcap_{a \in S_1} \varphi'(a)\,.$$

Toutefois, on a

$$b_0 \in \bigcap_{a \in S_1} \varphi'(a)$$

et la non-résolubilité du tableau $\{ S', f'(S') \}$ est ainsi démontrée.

La condition est suffisante. Si

$$f'(S_0) = \bigcap_{a \in S_0} \varphi(a)\,,$$

alors la résolubilité du tableau $\{ S', f'(S') \}$ est évidente. Observons que s'il existe $S_1 \in \mathscr{A}$ pour lequel $S_1 \subset S_0$, alors

$$\eta(S_0) = \bigcap_{a \in S_0} \varphi(a)\,.$$

Supposons maintenant que pour tout $S \in \mathscr{A}$ on a $S \subseteq S_0$ et

$$\bigcap_{a \in S_0} \varphi(a) \subset f'(S_0) \subseteq \eta(S_0)\,.$$

Choisissons un élément b_0 tel que

$$b_0 \in f'(S_0) - \bigcap_{a \in S_0} \varphi(a)\,.$$

On a, évidemment,

$$b_0 \notin \xi(S_0)\,.$$

Donc, si

$$b_0 \notin \bigcap_{a \in S_1} \varphi(a)\,,$$

alors

$$b_0 \notin \bigcap_{a \in S_1 - S_0} \varphi(a)\,,$$

quel que soit $S_1 \in \mathscr{A}$. Vu que

$$\bigcap_{a \in S_0} \varphi'(a) \subseteq \bigcap_{a \in S_1 - S_0} \varphi(a)\,,$$

il en résulte

$$b_0 \notin \bigcap_{a \in S_0} \varphi'(a)$$

et la résolubilité du tableau $\{ S', f'(S') \}$ est démontrée.

39. Décomposition des tableaux non résolubles

Soit le tableau $\{ S, f(S) \}$. On dira que le tableau $\{ S, f'(S) \}$ est une *décomposition* du tableau initial par rapport à l'élément $b_0 \in B$, s'il est défini sur les ensembles

$$A \text{ et } (B - \{ b_0 \}) \cup \{ b'_0 \} \cup \{ b^2_0 \} \cup \cdots \cup \{ b^n_0 \}$$

de la manière suivante :

1) $\mathscr{A} = \mathscr{A}'$,
2) si $b_0 \notin f(S)$, alors $f'(S) = f(S)$;
3) si $b_0 \in f(S)$, alors

$$f'(S) = (f(S) - b_0) \cup \left(\bigcup_{i_k} b_0^{i_k} \right) .$$

où $k \leqslant n$ et i_k prend des valeurs parmi les nombres 1, 2, ..., n.

De manière analogue on définit une décomposition du tableau initial par rapport à un ensemble d'éléments de B.

Le problème de l'existence d'une décomposition résoluble d'un tableau non résoluble est intéressant. Dans cet ordre d'idées, on a le

THÉORÈME 11. *Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une décomposition résoluble du tableau* $\{ S, f(S) \}$ *est l'antimonotonie du tableau* $\{ S, f(S) \}$.

Démonstration. La nécessité de la condition est évidente. Il faut démontrer qu'elle est suffisante.

Soit un élément $b_0 \in B$ tel que pour tout $S_0 \in \mathscr{A}$ on ait

$$b_0 \in \bigcap_{a \in S_0} \varphi(a) \qquad \text{et} \qquad b_0 \notin f(S_0) .$$

Séparons dans $\mathscr{A}$ une famille $\{ S_i \}$, $i = 1, 2, ..., n$, telle que pour tout S_i on ait $b_0 \in f(S_i)$ et pour tout $S \in \mathscr{A} - (S_i)$ on ait $b_0 \notin f(S)$. De la famille $\{ S_i \}$ on sépare une sous-famille $\{ S_{i_k} \}$, telle qu'aucun ensemble S_{i_k} ne soit contenu dans un autre ensemble S_i de la famille $\{ S_i \}$. Remplaçons, dans chaque $f(S_{i_k})$ l'élément b_0 par $b_0^{j_k}$, où l'indice j_k prend des valeurs différentes pour des S_{i_k} différents. Pour les autres ensembles S_i de la famille $\{ S_i \}$, on définira $f'(S_i)$ de la manière suivante : $b_0^{j_k} \in f'(S_i)$ si et seulement si $S_i \subseteq S_{i_k}$. On construit ainsi une décomposition du tableau initial par rapport à l'élément b_0. Evidemment, dans la décomposition obtenue, de l'appartenance

$$b_0^{j_k} \in \bigcap_{a \in S_i} \varphi'(a)$$

il résulte

$$b_0^{j_k} \in f'(S_i) .$$

On démontrera que, pour tout $S_1 \in \mathscr{A}$, la non-appartenance

$$b_0^{j_k} \notin f'(S_1)$$

entraîne la non-appartenance

$$b_0^{j_k} \notin \bigcap_{a \in S_1} \varphi'(a) .$$

En effet, étant donné que le tableau initial est antimonotone, on a

$$S_1 \nsubseteq S_{i_k} ,$$

ce qui signifie que

$$b_0^{j_k} \notin \bigcap_{a \in S_1} \varphi'(a) .$$

De manière analogue on construit une décomposition du tableau initial par rapport à chaque élément $b \in B$ pour lequel il existe, dans le tableau initial, un $S_0 \in \mathscr{A}$ tel que

$$b \notin f(S_0) \qquad \text{et} \qquad b \in \bigcap_{a \in S_0} \varphi(a) .$$

Une telle décomposition est, évidemment, résoluble.

Pour une discussion ultérieure voir [3]. Pour certaines questions connexes ou applications à la traduction automatique, voir [4], [11] et [12].

En conclusion, observons que les considérations exposées ci-dessus montrent qu'il est possible de construire une morphologie formelle, par la méthode des tableaux résolubles, pour une large classe de langues.

40. Informations morphologiques et vecteurs de Boole

Dans un travail récent [13], Dénes Varga expose un processus à l'aide duquel l'analyse morphologique et, partiellement, l'analyse syntaxique, peuvent être effectuées par une méthode assez simple et rapide, quelle que soit la langue, à condition que cette langue soit à flexion riche (par exemple, la langue russe). Le procédé de Varga utilise la multiplication des chiffres binaires : le produit logique de deux nombres contient le chiffre 1 dans chaque position où, dans la représentation binaire de ces deux nombres, on a le chiffre 1. A l'opération de produit logique correspond l'opération qui consiste à prendre la partie commune de deux ensembles — donc d'établir la compatibilité de deux propriétés. A chaque cellule du calculateur électronique on associe une catégorie grammaticale : par exemple, le nominatif singulier correspond à la cellule 1, l'accusatif singulier correspond à la cellule 2, le génitif singulier correspond à la cellule 3, etc. A chaque mot on associe un vecteur de Boole (c'est-à-dire, un système fini et ordonné de chiffres binaires – 0 et 1) de la façon suivante. Fixons d'abord un code :

La cellule 1 : nominatif singulier N ; 2 : accusatif singulier A ; 3 : génitif singulier G ; 4 : datif singulier D ; 5 : instrumental singulier I ; 6 : prépositionnel singulier P ; 7 : nominatif pluriel N_1 ; 8 : accusatif pluriel A_1 ; 9 : génitif pluriel G_1 ; 10 : datif pluriel D_1 ; 11 : instrumental pluriel I_1 ; 12 ; prépositionnel pluriel P_1.

A la préposition russe с correspond le vecteur de Boole,

$$\varphi_1 = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0) .$$

Par exemple, le chiffre 3 en position 3 montre que le génitif singulier est compatible avec с ; le chiffre 0 en position 6 montre que le prépositionnel singulier n'est pas compatible avec с, etc.

Prenons, comme autre exemple, le mot russe нашей ; on lui associe le vecteur de Boole $\varphi_2 = (0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Par multiplication logique des vecteurs φ_1 et φ_2 on obtient le vecteur $\varphi_1 \wedge \varphi_2 = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, où une composante est égale à 1 si et seulement si φ_1 et φ_2 ont, dans la position respective, le chiffre 1. On constate ainsi que с et нашей ne sont compatibles, dans un même syntagme nominal, qu'au génitif singulier et à l'instrumental singulier.

L'exemple ci-dessus est significatif en ce qui concerne le mode spécifique utilisé par D. Varga pour exprimer l'information grammaticale des mots. Il n'est pas difficile d'observer une certaine liaison entre la méthode de Varga et celle développée par Fitjalov et Bratčikov et exposée ci-dessus.

Des recherches en quelque sorte apparentées à celles que nous venons d'exposer ont été faites dans [5], [9], [10] et [11]. Voici, par exemple, un problème étudié par B. Dömölki et F. Kiefer. On considère un alphabet

$$A = \{ a_1, a_2, ..., a_n \} ,$$

où chaque a_i est un *symbole*. Une suite $S = a_{s_1} a_{s_2} ... a_{s_q}$, où $1 \leqslant s_i \leqslant n$ pour $1 \leqslant i \leqslant q$, est, par définition, un *mot de longueur* q. On désigne par $S(A)$ l'ensemble des mots sur l'alphabet A et par

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1p} \\ t_{2i} & t_{22} & \dots & t_{2p} \\ \vdots & & & \\ t_{h_1 1} & t_{h_2 2} & \dots & t_{h_p p} \end{pmatrix}$$

un tableau formé des symboles de A, tableau qui a p colonnes et, sur la colonne j, h_j éléments. Le nombre p est *la longueur du tableau* T. La colonne de rang j sera désignée par t_j ; on a donc

$$t_j = \bigcup_{k=1}^{h_j} \{ t_{j_k} \} \qquad \text{pour} \qquad 1 \leqslant j \leqslant p .$$

On dit qu'un mot

$$X = x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_p \in S(A)$$

se trouve dans le tableau T, si

$$x_j \in t_j \qquad \text{pour} \qquad 1 \leqslant j \leqslant p .$$

On désigne par $\widetilde{T}$ l'ensemble des mots qui se trouvent dans T. On dit que $Y \in S(A)$ est un *mot du type* T, s'il existe un mot $X \in \widetilde{T}$ et deux mots quelconques E et F (E ou F peut aussi être le mot vide), tels que

$$Y = EXF .$$

On trouve dans [5] une condition nécessaire et suffisante pour qu'un mot soit du type T.

OUVRAGES CITÉS

[1] Birkhoff, G., *Lattice Theory* (Revised Edition), New York, 1948.

[2] Bratčikov, I. L., « Nekotorye teoremy formalnoi morfologii ». *Doklady Konferencii po obrabotke informacii, mašinnomu perevodu i avtomatičeskomu čteniju teksta* (Moskva, 1961).

[3] Bratčikov, I. L., « O nekotoryh sposobah sokrasčenija informationnyh tablic ». *Metody vycislenii*, vol. II, 1963 (Leningrad), p. 139-156.

[4] Bratčikov, I. L., Fitialov S. J., Ceitin, G. S., « O struktura informacii dlja mašinnogo perevoda ». *Doklady na konferencia po obrabotke informacii, mašinnomu perevodu i avtomatičeskomu čteniju teksta*, Moskva, 1961.

[5] Dömölki, Kiefer, F., « Algorithmus für die Identifizierung von Symbolfolgen ». *Computational Linguistics* (Budapest), vol. 1, 1963, p. 259-267.

[6] Fitialov, S. I., « O postroenii formalnoi morfologii v sviazi s mašinnym perevodom ». *Doklady na Konferencii po obrabotke informacii, mašinnomu perevodu i avtomatičeskomu čteniju teksta*, Moskva, 1961.

[7] Hjelmslev, L., « Essai d'une théorie des morphèmes ». *Actes du IV^e Congrès international des linguistes*. Copenhague, 1938, p. 140-151.

[8] Hockett, Ch., « A formal statement of morphemic analysis. » *Language. Studies in Linguistics*, vol. 10, 1952, p. 27-39.

[9] Kiefer, F., « Algorithmus und Programm für das Aufsuchen eines Wortes im Speicher ». *Computational Linguistics* (Budapest), vol. 1, 1963, p. 189-201.

[10] Kiefer, F., « Algorithmus für die Analyse von Endungen ». *Computational Linguistics* (Budapest), vol. 1, 1963, p. 203-221.

[11] Melčuk, I. A., « Morfologičeskii analiz pri mašinnom perevode ». *Problemy kibernetiki*, vol. 6, 1961.

[12] Revzin, I., « Strukturalnaja lingvistika, semantika i problemy izučenija slova. » *Voprosy jazykoznanija*, vol. 6, 1957, N° 2, p. 1291-1294.

[13] Varga, D., « Morphological Analysis by Help of the Method of Successive Delimitation ». *Computational Linguistics*, vol. 1, 1963, p. 223-255.

CHAPITRE V

HOMONYMIE MORPHOLOGIQUE ET CATÉGORIES GRAMMATICALES

1. L'homonymie morphologique, source d'ambiguïtés

C'est un fait bien connu que les difficultés principales qui surgissent dans l'étude des catégories de nombre, de cas, de genre, de temps, de modes, etc. sont dues au phénomène appelé d'habitude *homonymie morphologique*. Si chaque catégorie grammaticale avait une marque spécifique, uniquement déterminée, si à chaque forme flexionnelle on pouvait associer sans ambiguïté certaines valeurs grammaticales (morphèmes au sens de Hjelmslev), alors tout serait résolu par une simple correspondance biunivoque. C'est approximativement le cas des langues appelées agglutinantes (par exemple le hongrois ou le turc), bien qu'il n'existe pas de langue naturelle parfaitement agglutinante. Une situation tout à fait différente nous confronte dans des langues telles que le français, le roumain et le russe. Prenons, par exemple, l'adjectif français *mince*. La coïncidence entre sa forme de singulier masculin et sa forme de singulier féminin est un phénomène d'homonymie morphologique qui introduit une ambiguïté dont la solution ne peut être trouvée que dans l'étude du contexte (voir, par exemple, [25]). Résoudre l'homonymie morphologique de *mince*, c'est considérer des contextes tels que (*feuille*, 0) et (*cahier*, 0), dont le premier entraîne la valeur de féminin tandis que le deuxième entraîne la valeur de masculin. La situation n'est pas la même lorsqu'on considère l'adjectif *grand* ; ici, le singulier-masculin et le singulier-féminin ont leurs marques spécifiques et il ne faut plus recourir au contexte. Mais il n'y a aucune situation inverse ; il n'est pas possible qu'on ait une forme ambiguë de *grand*, telle que la forme correspondante de *mince* ne présente pas la même ambiguïté. On dit, dans ce cas, que l'homonymie morphologique de *grand* est inférieure à l'homonymie morphologique de *mince*. (Pour diverses manières de mesurer d'une façon exacte l'homonymie morphologique, à l'aide de la correspondance entre le plan du contenu et le plan de l'expression, voir [18], [32] et [35].) Ce fait se traduit ici par un phénomène purement contextuel : dans toute phrase correcte contenant le mot *grand*, le remplacement de *grand* par *mince* conduit à une phrase correcte ; mais il existe une phrase correcte contenant le mot *mince* et telle que le remplacement de *mince* par *grand* conduit à une phrase qui n'est plus correcte (voir les phrases *je possède une feuille mince* et *je possède une feuille grand*).

2. Aspects de l'homonymie morphologique en roumain et en russe

Considérons maintenant quelques exemples roumains. On constate que l'homonymie morphologique de *munceşte* est inférieure à l'homonymie morphologique de *lucrează*, car ce dernier présente l'ambiguïté singulier-pluriel, tandis que cette ambiguïté est absente pour *munceşte*. Le mot *lucrează* peut remplacer le mot *munceşte* dans toute phrase correcte, sans que celle-ci cesse d'être correcte. Une situation semblable se présente pour les adjectifs roumains *integru* et *subţire* ; l'homonymie morphologique du premier est inférieure à l'homonymie morphologique du second.

Passons maintenant à quelques exemples russes. R. L. Dobrušin considère dans [7] des substantifs tels que окно, солнце, весле, лето, d'une part, et des substantifs tels que метро, пальто, d'autre part. Chacun des substantifs du premier groupe présente une homonymie morphologique inférieure à celle des substantifs du deuxième groupe. Par exemple, on peut toujours remplacer, dans une phrase correcte, окно par метро ; la phrase obtenue sera elle aussi correcte.

D'une manière analogue on constate que l'homonymie morphologique de мразь est inférieure à l'homonymie morphologique de печь, tandis que l'homonymie morphologique de пускать est-elle aussi inférieure à l'homonymie morphologique de печь, sans être comparable à l'homonymie morphologique de мразь. Ces exemples (tirés de [28], p. 106-107) cachent l'appartenance de печь à deux parties différentes du discours (substantif et verbe).

3. Domination et familles

C'est R. L. Dobrušin qui a remarqué la nature formelle de l'homonymie morphologique [7], [8]. Considérons un langage Φ sur le vocabulaire Γ. Les phrases appartenant à Φ sont appelées *repérées* ou *marquées*. Si $x \in \Gamma$ et $y \in \Gamma$, on dira que x *domine* y et on écrira $x \to y$ si, quelles que soient les phrases u et v, l'appartenance $uxv \in \Phi$ entraîne l'appartenance $uyv \in \Phi$. On a donc *grand* → *petit* et *grand* → *mince* en français, *munceşte* → *trăieşte* et *munceşte* → *lucrează* en roumain, окно → солнце, окно → метро et окну → метро en russe, etc.

Soient deux mots x et y. Si $x \to y$ mais non $y \to x$, l'homonymie morphologique de x est inférieure à celle de y. (Exemple : x = *grand*, y = *mince*). Si $x \rightarrow y$ et $y \rightarrow x$, l'homonymie morphologique de x est égale à celle de

y (x = *grand*, y = *petit*) .

Si $x \rightarrow y$, l'homonymie morphologique de x est inférieure ou égale à celle de y. Si on n'a ni $x \rightarrow y$, ni $y \rightarrow x$, l'homonymie morphologique de x n'est pas comparable à celle de y (x = *mince*, y = *jaloux*).

On peut définir la relation de domination non seulement entre les mots, mais aussi entre les phrases. Par exemple, si f et g sont deux phrases sur le vocabulaire Γ, on dira que f domine g et on écrira $f \rightarrow g$ si quel que soit le contexte $\{ u, v \}$ sur Γ, l'appartenance $ufv \in \Phi$ entraîne l'appartenance $ugv \in \Phi$.

Soit x une phrase sur Γ. Considérons l'ensemble de toutes les phrases y, telles que $x \rightarrow y$ et $y \rightarrow x$ (ce qu'on peut écrire en abrégé : $x \leftrightarrow y$). Il est aisé de voir que cet ensemble coïncide avec ce que nous avons appelé, au paragraphe 29 du chapitre I, la classe de distribution au sens large de x, désignée par $F(x)$. On appelle encore l'ensemble $F(x)$ la *famille au sens large* de x. Si $a \in \Gamma$, l'ensemble des mots b tels que $b \rightarrow a$ et $a \rightarrow b$ (ce qu'on peut écrire en abrégé : $a \leftrightarrow b$) coïncide avec ce que nous avons appelé au paragraphe 29 du chapitre I la classe de distribution de a, désignée par $S(a)$. Suivant la terminologie de O. S. Kulagina [17], qui a introduit cette notion par une méthode tout à fait différente, l'ensemble $S(a)$ est appelé aussi la *famille* de a.

Il est aisé de voir que la relation de domination est réflexive et transitive dans Γ ; c'est donc une relation de quasi-ordre dans Γ. D'autre part, puisque les relations $x \rightarrow y$ et $y \rightarrow x$ n'entraînent pas $x = y$, il en résulte que $\rightarrow$ n'est pas, en général, une relation d'ordre dans Γ. Pour que $\rightarrow$ soit une relation d'ordre dans Γ il faut et il suffit que chaque famille se réduise à un seul mot.

On sait qu'à toute relation de quasi-ordre on associe une certaine relation d'équivalence (paragraphe 19 du chapitre IV). La relation d'équivalence associée à $\rightarrow$ est justement la relation de domination réciproque $\leftrightarrow$. Les classes d'équivalence correspondantes sont justement les familles.

Intuitivement, la relation de domination est souvent assimilée à la relation binaire R, définie dans Γ de la manière suivante : x et y sont en relation R (ce qu'on écrit : xRy) si pour toute phrase $f \in \Phi$, contenant le mot x, le remplacement de chaque occurrence x par y conduit à une phrase appartenant à Φ.

Il est aisé de voir que la relation $x \rightarrow y$ entraîne xRy ; toutefois, il est important de remarquer que la réciproque n'est pas vraie. En effet, soient $\Gamma = \{ x, y \}$, $\Phi = \{ xxx, yyy \}$. On a, évidemment, xRy, tandis qu'on n'a pas $x \rightarrow y$, car pour $f_1 = x, f_2 = x$, la phrase $f_1 x f_2$ est repérée, tandis que la phrase $f_1 y f_2$ ne l'est pas.

Remarquons enfin que la relation de domination est très voisine de la relation de substitution unidirectionnelle, utilisée par Harris dans [10] (cette fois, au niveau morphématique de la langue).

4. Atome grammatical

Considérons une phrase x quelconque. Dans toute recherche de caractère distributionnel il faut associer à x certains ensembles de phrases qui caractérisent la situation de x du point de vue contextuel. Le plus important et, en même temps, le plus simple, est l'ensemble $F(x)$, considéré au paragraphe 3. La relation de domination permet d'introduire encore deux ensembles de phrases. Posons $A(x) = \{ y ; y \rightarrow x \}$ et $B(x) = \{ z ; x \rightarrow z \}$. On a, évidemment, $F(x) = A(x) \cap B(x)$. L'appartenance de deux phrases à la même famille au sens large est une propriété très restrictive, si Φ est une langue naturelle. Pour déceler des situations plus fines et, en même temps, plus fréquentes, il faut raisonner aussi sur les ensembles $A(x)$ et $B(x)$. On peut même considérer, au lieu de x, un certain ensemble $\mathscr{F}$ de phrases. Par définition, $A(\mathscr{F}) = \{ y ; y \rightarrow x$ pour toute phrase $x \in \mathscr{F} \}$, $B(\mathscr{F}) = \{ z ; x \rightarrow z$ pour toute phrase $x \in \mathscr{F} \}$.

Un cas particulier extrêmement important est celui où $A(\mathscr{F}) \subseteq \mathscr{F}$; on dira alors que $\mathscr{F}$ est un ensemble initial.

Pour comprendre la signification de ces notions, considérons le cas où $\mathscr{F}$ est la famille $S(x)$ d'un mot $x \in \Gamma$ et envisageons la restriction de $\rightarrow$ à l'ensemble Γ.

Tous les éléments de $S(x)$ ont les mêmes valeurs grammaticales que x ; par exemple, en français, si $x =$ *pur* et $y \in S(x)$, alors y sera, comme *pur*, une forme adjectivale au singulier-masculin. Mais il y a des formes adjectivales qui, tout en étant au singulier-masculin, n'appartiennent pas à $S(x)$; telle est, par exemple, la forme *mince*. Une question se pose alors : quelle est l'opération formelle permettant d'obtenir l'ensemble de *toutes* les formes adjectivales au singulier-masculin ? La réponse est immédiate : c'est le passage de S (*pur*) à $B(S\,(pur))$. Mais cette réponse découle du fait que $A(S\,(pur)) \subseteq S\,(pur)$ (ici on a même l'égalité), c'est-à-dire du fait que S (*pur*) est un ensemble initial de mots. Par exemple, $B(S\,(mince))$ ne contient plus *toutes* les formes adjectivales au singulier-masculin ; mais S (*mince*) n'est pas un ensemble initial de mots.

Du point de vue linguistique, la propriété de $S(x)$ d'être un ensemble initial consiste en ce que, parmi les formes flexionnelles de x, l'homonymie morphologique a un caractère minimal par rapport aux autres mots y de la même partie du discours que x. En d'autres termes, il n'y a aucun mot y dont les formes flexionnelles manifestent une homonymie morphologique plus pauvre que celle qui se manifeste parmi les formes flexionnelles de x. Mais on peut avoir des mots non comparables à x, du point de vue de l'homonymie morphologique ; par exemple, les formes *pur* et *pure* ne sont pas comparables.

Ces considérations nous montrent qu'il est nécessaire d'étudier, pour chaque famille initiale $S(x)$, la réunion $S(x) \cup B(S(x)) = B(S(x))$. Cette réunion est formée par tous les mots appartenant à la même partie du discours que x

et ayant toutes les valeurs grammaticales de x ; c'est ce que nous allons appeler, dans ce chapitre, la catégorie grammaticale élémentaire engendrée par $S(x)$. Cette notion est le correspondant, dans le plan de l'expression, d'une combinaison de morphèmes au sens de Hjelmslev [15]. Une telle combinaison est parfois appelée un grammatème ([28], p. 77) et représente, pour ainsi dire, l'atome grammatical. En effet, toute catégorie grammaticale au sens de la grammaire traditionnelle est une réunion de catégories grammaticales élémentaires. Comme nous allons le voir, une telle réunion a, du point de vue mathématique, une expression de la forme $E \cup B(E)$, où E est un certain ensemble initial de mots. Cette étude, commencée par Dobrušin [7], [8] a été aussi développée, d'une façon indépendante et assez indirecte, par A. Sestier [31].

Le modèle que nous étudions dans ce chapitre éclaire les notions de syncrétisme et de neutralisation [24], [26]. L'hypothèse de Hjelmslev, suivant laquelle la neutralisation en phonologie et le syncrétisme en grammaire sont des manifestations d'un même phénomène est confirmée par l'étude de ce modèle. D'autre part, la généralisation donnée par B. Trnka à la notion de neutralisation [34] est aussi retrouvée par cette méthode. Pour tous ces faits, voir [28], paragraphe 33.

La plupart des catégories grammaticales habituelles sont des cas particuliers de ce qui sera appelé, dans la suite, une catégorie grammaticale normale. Mais nous allons envisager aussi des catégories grammaticales qui ne sont pas normales, pour pouvoir étudier certaines situations d'exception et pour donner aux considérations la généralité exigée par une étude mathématique. Un problème fondamental sera celui d'établir des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux ensembles initiaux engendrent la même catégorie grammaticale.

La dernière partie du chapitre V sera consacrée aux catégories grammaticales engendrées par des ensembles non initiaux ou relatifs à une partie de l'ensemble des phrases repérées.

Enfin, il faut remarquer que les modèles étudiés dans ce chapitre concernent plutôt le concept de catégorie grammaticale, donc ce qui est commun à toutes les catégories grammaticales, que ce qui est spécifique à une catégorie grammaticale. Le chapitre suivant, dont l'objet est la catégorie du cas, constitue un exemple d'étude de ce qui est spécifique à une certaine catégorie grammaticale.

5. Propriétés de la relation $\rightarrow$

Dans ce qui suit, nous allons présenter quelques propriétés de la relation $\rightarrow$ définie ci-dessus, et des ensembles initiaux ; nous établirons aussi le rapport entre ces notions et celle de famille. Il est aisé de voir que deux familles différentes sont toujours disjointes ; les familles fournissent une partition de Γ et l'appartenance de deux mots à la même famille définit une relation d'équivalence. Ce fait, signalé aussi dans [17], sera utilisé dans la suite.

PROPOSITION 1. *Si* $X \to Y$, $Z \subseteq X$ et $V \subseteq Y$, *alors* $Z \to V$.

PROPOSITION 2. *Si* $X_\alpha \to Y$ *pour tout* $\alpha \in J$, *alors*

$$\bigcup_{\alpha \in J} X_\alpha \to Y.$$

PROPOSITION 3. *Si* $X \to Y_\alpha$ *pour tout* $\alpha \in J$, *alors*

$$X \to \bigcup_{\alpha \in J} Y_\alpha.$$

PROPOSITION 4. $X \to X$ *si et seulement si il existe une famille* F *telle que* $X \subseteq F$.

PROPOSITION 5. *Si* $x \to y$, *alors* $F(x) \to F(y)$.

PROPOSITION 6. *Si* $X \subseteq F$, $Y \subseteq F$ *et* F *est une famille, alors* $X \to Y$ *et* $Y \to X$.

PROPOSITION 7. *Si* $X \to Y$, $Y \to X$, $X \neq 0$ *et* $Y \neq 0$, *alors il existe une famille* F *telle que* $X \subseteq F$ et $Y \subseteq F$.

Remarque. Le cas particulier suivant de la proposition 7 a été donné par R. L. Dobrušin dans [8] p. 56 : Si F_1 et F_2 sont des familles et si $F_1 \to F_2$ et $F_2 \to F_1$, alors $F_1 = F_2$.

PROPOSITION 8. *Pour que* F *soit une famille, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient remplies* : *a*) $F \to F$;

b) *si* $H \to H$ *et* $H \supseteq F$, *alors* $H = F$.

PROPOSITION 9. *Si* A *est un ensemble initial et* $B \supseteq A$, *alors* B *est aussi un ensemble initial.*

Les propositions 1, 2 et 3 sont des conséquences immédiates de la définition de la relation $\to$. Pour établir la proposition 4, considérons deux mots $x \in X$, $y \in X$. De l'hypothèse $X \to X$ on déduit $x \to y$ et $y \to x$, donc $y \in F(x)$ pour tout $y \in X$, c'est-à-dire que $X \subseteq F(x)$ et $F(x)$ est la famille cherchée. Réciproquement, soit $X \subseteq F$ où F est une famille. On a donc, pour $x \in X$, $y \in X$, les relations d'appartenance $x \in F$, $y \in F$, donc $x \to y$ et $y \to x$. Il s'ensuit que $X \to X$, et la proposition 4 est établie.

La proposition 5 est une conséquence du fait que la relation $\to$ est transitive dans Γ. La proposition 6 est une conséquence des définitions de la relation $\to$ et de la notion de famille.

Pour établir la proposition 7, remarquons qu'on a, par hypothèse, $x \to y$ et $y \to x$ pour $x \in X$, $y \in Y$, donc $Y \subseteq F(x)$; d'autre part, pour $x' \in X$, on a $y \to x'$, et $x' \to y$ donc, en vertu de la transitivité de la relation $\to$, on a $x \to x'$ et $x' \to x$ et, par conséquent, $X \subseteq F(x)$. La proposition 7 est ainsi démontrée, en posant $F = F(x)$.

Comme conséquence des propositions 6 et 7 on peut retrouver la proposition 4.

Des propositions 5 et 7 ci-dessus on déduit la propriété suivante, établie par R. L. Dobrušin dans [8], p. 56 :

Etant données deux familles distinctes F_1 et F_2, on a une des trois situations suivantes : 1° pour tout $x \in F_1$ et pour tout $y \in F_2$, on a $x \to y$; 2° pour tout $x \in F_1$ et pour tout $y \in F_2$ on a $y \to x$; 3° quels que soient $x \in F_1$ et $y \in F_2$, on n'a ni $x \to y$, ni $y \to x$.

La proposition 8 est une conséquence de la définition de la notion de famille et de la proposition 4.

6. Ensembles initiaux, ensembles productifs et produit saturé

La proposition 9 résulte de la définition de l'ensemble initial ; cette proposition suggère l'introduction de la notion suivante :

Un ensemble initial A est, par définition, un *ensemble initial minimal* si A ne contient aucun ensemble initial autre que A lui-même.

Il faut remarquer, d'autre part, qu'un ensemble initial A est, en quelque sorte, dépourvu d'intérêt, s'il n'existe aucun élément y tel que $A \to y$. On arrive ainsi à introduire la notion suivante :

Un ensemble $X \subseteq \Gamma$ est *productif* s'il existe un mot ξ tel que $X \to \xi$.

Comme conséquence de la proposition 9, on constate que les ensembles initiaux contenus dans Γ forment, par rapport à l'opération de réunion, un demi-groupe commutatif.

Les propositions suivantes sont évidentes :

PROPOSITION 10. *Tout ensemble contenu dans une famille est un ensemble productif ; en particulier, tout ensemble formé d'un seul mot est productif.*

PROPOSITION 11. *Si X est un ensemble productif et si $Y \subseteq X$, alors Y est aussi un ensemble productif.*

Parmi les ensembles initiaux, seuls ceux qui sont productifs sont intéressants. Les ensembles initiaux, qui sont à la fois minima et productifs, exigent une attention spéciale.

Etant donnés deux ensembles X et A, $X \subseteq \Gamma \supseteq A$, on dira que *$X$ est productif par rapport à A si $X \to A$* ; on dira aussi que *l'ensemble A est produit par X*. Si, en outre, il n'y a aucun ensemble $B \supseteq A$, $B \neq A$, tel que X soit productif par rapport à B, on dira que *A est le produit saturé de X* et on désignera A par X_1.

On vérifie aisément les propositions suivantes :

PROPOSITION 12. *Le produit saturé d'un ensemble E est la réunion de tous* *les ensembles produits par E ; donc le produit saturé d'un ensemble est uniquement déterminé.*

PROPOSITION 13. *Le produit saturé d'un ensemble est une réunion de familles.*

Remarques. Pour obtenir la proposition 12, on tient compte de la proposition 3. Pour obtenir la proposition 13, on utilise les propositions 5 et 3.

On dira que l'ensemble X est *complètement productif* par rapport à A si $X = \{ x ; x \to A \}$.

PROPOSITION 14. *Pour chaque ensemble $A \subseteq \Gamma$ il existe un ensemble X, uniquement déterminé, qui est complètement productif par rapport à A ; à savoir, X est la réunion de tous les ensembles productifs par rapport à A.*

PROPOSITION 15. *L'ensemble complètement productif par rapport à un ensemble A est une réunion de famille.*

Remarques. Pour obtenir la proposition 14 on tient compte de la proposition 2. Pour obtenir la proposition 15 on tient compte des propositions 2 et 5.

7. Catégories grammaticales et catégories grammaticales élémentaires

Considérons un ensemble initial A et désignons par $\mathscr{G}(A)$ la réunion de A avec le produit saturé de A. $\mathscr{G}(A)$ est, par définition, la *catégorie grammaticale engendrée par A* (ou la c. g. *engendrée par A*). Dans le cas particulier où A est une famille, $\mathscr{G}(A)$ est, par définition, une catégorie grammaticale élémentaire (une c. g. é.), c'est la c. g. é. engendrée par A.

On vérifie aisément les propositions suivantes :

PROPOSITION 16. *Pour qu'une famille initiale F soit une c. g. é., il faut et il suffit que F soit le produit saturé de F.*

PROPOSITION 17. *Si la famille F est un ensemble initial, alors l'ensemble B est le produit saturé de F si et seulement si B est la c. g. é. engendrée par F.*

8. Catégories grammaticales élémentaires des adjectifs qualificatifs de la langue roumaine

Nous utiliserons les résultats du paragraphe 32 du chapitre I. De même que jusqu'ici, pour montrer que tout mot de l'ensemble A domine tout mot de l'ensemble E, nous écrirons $A \to E$. Nous avons :

S (*frumos*) $\to$ S (*frumos*), S (*frumos*) $\to$ S (*vechi*), S (*frumos*) $\to$ S (*precoce*), S (*frumos*) $\to$ S (*dibaci*), S (*frumos*) $\to$ S (*subțire*), S (*frumos*) $\to$ S (*june*), S (*frumos*) $\to$ S (*maro*).

Nous avons ainsi épuisé les mots dominés par S (*frumos*), donc, en tenant compte du fait que S (*frumos*) est une famille initiale, nous pouvons former la catégorie grammaticale élémentaire engendrée par S (*frumos*). On a

$$\mathscr{G}(S(\textit{frumos})) = S(\textit{frumos}) \cup S(\textit{vechi}) \cup S(\textit{precoce}) \cup S(\textit{dibaci}) \cup \cup S(\textit{subţire}) \cup S(\textit{june}) \cup S(\textit{maro}).$$

On observe qu'on obtient par une *méthode formelle*, ce qui, du point de vue sémantique, correspond à la totalité des adjectifs qualificatifs sans article à la forme nominatif, singulier, masculin degré positif.

Nous allons maintenant déterminer les mots dominés par la famille initiale S (*frumoasă*). On a :

$$S(\textit{frumoasă}) \rightarrow S(\textit{frumoasă}),\ S(\textit{frumoasă}) \rightarrow S(\textit{precoce}),\ S(\textit{frumoasă}) \rightarrow \rightarrow S(\textit{subţire}),\ S(\textit{frumoasă}) \rightarrow S(\textit{greoaie}),\ S(\textit{frumoasă}) \rightarrow S(\textit{maro}).$$

Nous avons ainsi épuisé les mots dominés par S (*frumoasă*), nous pouvons donc former la catégorie grammaticale élémentaire engendrée par S (*frumoasă*). Nous avons

$$\mathscr{G}(S(\textit{frumoasă})) = S(\textit{frumoasă}) \cup S(\textit{precoce}) \cup S(\textit{subţire}) \cup \cup S(\textit{greoaie}) \cup S(\textit{maro}).$$

On observe qu'on a obtenu, par une méthode formelle, ce qui, du point de vue sémantique, correspond à la totalité des adjectifs qualificatifs sans article à la forme du nominatif, singulier, féminin, degré positif.

Nous allons déterminer, maintenant, les mots dominés par la famille initiale S (*frumoşi*). On a

$$S(\textit{frumoşi}) \rightarrow S(\textit{frumoşi}),\ S(\textit{frumoşi}) \rightarrow S(\textit{vechi}),\ S(\textit{frumoşi}) \rightarrow S(\textit{dibaci}),\ S(\textit{frumoşi}) \rightarrow S(\textit{subţiri}),\ S(\textit{frumoşi}) \rightarrow S(\textit{maro}).$$

Nous avons ainsi épuisé les mots dominés par S (*frumoşi*). Nous avons donc

$$\mathscr{G}(S(\textit{frumoşi})) = S(\textit{frumoşi}) \cup S(\textit{vechi}) \cup S(\textit{dibaci}) \cup S(\textit{subţiri}) \cup S(\textit{maro}).$$

On observe qu'on a obtenu, par une méthode *formelle*, ce qui, du point de vue sémantique, correspond à la totalité des adjectifs qualificatifs sans article, qui se trouvent à la forme de nominatif, pluriel, masculin, degré positif.

Déterminons maintenant les mots dominés par la famille initiale S (*frumoase*). On a :

$$S(\textit{frumoase}) \rightarrow S(\textit{frumoase}),\ S(\textit{frumoase}) \rightarrow S(\textit{vechi}),\ S(\textit{frumoase}) \rightarrow S(\textit{precoce}),\ S(\textit{frumoase}) \rightarrow S(\textit{greoaie}),\ S(\textit{frumoase}) \rightarrow S(\textit{subţiri}),\ S(\textit{frumoase}) \rightarrow S(\textit{maro}),\ S(\textit{frumoase}) \rightarrow S(\textit{june}).$$

Nous avons ainsi épuisé les mots dominés par S (*frumoase*) et nous avons :

$$\mathscr{G}(S(\textit{frumoase})) = S(\textit{frumoase}) \cup S(\textit{vechi}) \cup S(\textit{precoce}) \cup S(\textit{greoaie}) \cup \cup S(\textit{subţiri}) \cup S(\textit{june}) \cup S(\textit{maro}).$$

On observe qu'on a obtenu, par une *méthode formelle*, ce qui, du point de vue sémantique, correspond à la totalité des adjectifs qualificatifs sans article, qui se trouvent à la forme nominatif, pluriel, féminin, degré positif.

Nous avons ainsi épuisé les catégories grammaticales élémentaires des adjectifs qualificatifs sans article, car parmi les douze classes de distribution établies au paragraphe 32 du chapitre I, seules les quatres premières sont des classes initiales de distribution.

Observation de nature méthodologique. Pour établir, par exemple, la catégorie grammaticale élémentaire engendrée par S (*frumos*), on n'a pas eu besoin de vérifier pour chaque adjectif séparément s'il est ou non dominé par S (*frumos*) ; pour cela il aurait fallu un travail immense. On s'est basé sur une propriété simple, mais importante, de la relation de domination (proposition 5 du paragraphe 5 à savoir : si $x \to y$, alors $S(x) \to S(y)$. De cette manière, ayant l'inventaire des classes de distribution des adjectifs qualificatifs sans article, il nous a suffit de vérifier la relation de domination douze fois ; nous avons choisi au hasard un mot de chacune des douze classes de distribution et nous avons vérifié s'il est dominé ou non par le mot « frumos ». En pratique, cela revient à constater que les relations :

frumos → *frumos*, *frumos* → *vechi*, *frumos* → *precoce*, *frumos* → *dibaci*, *frumos* → *subţire*, *frumos* → *june*, *frumos* → *maro* sont vraies,

tandis que les relations :

frumos → *frumoasă*, *frumos* → *frumoşi*, *frumos* → *frumoase*, *frumos* → *greoaie*, *frumos* → *subţiri* sont fausses.

Nous avons procédé de manière analogue pour former les trois autres catégories grammaticales élémentaires.

9. Catégories grammaticales non élémentaires des adjectifs qualificatifs de la langue roumaine

Essayons de réunir deux des catégories grammaticales élémentaires établies ci-dessus. Considérons, par exemple, la réunion

$$H_1 = \mathcal{G}(S(\textit{frumos})) \cup \mathcal{G}(S(\textit{frumoasă}))\,.$$

Conformément à la proposition 9 du paragraphe 5, H_1 est un ensemble initial, il engendre donc une catégorie grammaticale. Nous avons $H_1 \to S$ (*maro*) et nous avons ainsi épuisé les mots dominés par H_1. Mais la classe de distribution S (*maro*) est contenue dans l'ensemble H_1, donc

$$\mathcal{G}(H_1) = H_1\,.$$

Nous avons ainsi démontré que H_1 est une catégorie grammaticale (bien entendu, non élémentaire). On observe qu'on a obtenu, par une *méthode formelle*, ce qui, du point de vue sémantique, correspond à la totalité des adjectifs qualificatifs sans article qui se trouvent à une forme de nominatif, singulier, degré positif.

D'une manière analogue on établit que l'ensemble

$$H_2 = \mathcal{G}(S(\textit{frumos})) \cup \mathcal{G}(S(\textit{frumoşi}))$$

est une catégorie grammaticale qui correspond, du point de vue sémantique, à la totalité des adjectifs qualificatifs sans article, qui se trouvent à une forme de nominatif, masculin, degré positif.

L'ensemble

$$H_3 = \mathcal{G}(S(\textit{frumoasă})) \cup \mathcal{G}(S(\textit{frumoase}))$$

est une catégorie grammaticale qui correspond, du point de vue sémantique, à la totalité des adjectifs qualificatifs sans article, qui se trouvent à une forme de nominatif, féminin, degré positif.

L'ensemble

$$H_4 = \mathcal{G}(S(\textit{frumoşi})) \cup \mathcal{G}(S(\textit{frumoase}))$$

est une catégorie grammaticale qui correspond, du point de vue sémantique, à la totalité des adjectifs qualificatifs sans article, qui se trouvent à une forme de nominatif, pluriel, degré positif.

Soit, maintenant, la réunion $H_{14} = H_1 \cup H_4$. Conformément à la proposition 9 du paragraphe 5, H_{14} est un ensemble initial, il engendre donc une catégorie grammaticale. On a $H_{14} \rightarrow S(\textit{maro})$ et nous avons ainsi épuisé les mots dominés par H_{14}. Mais $S(\textit{maro})$ est contenue dans H_{14}, donc

$$\mathcal{G}(H_{14}) = H_{14}\,.$$

Nous avons ainsi démontré que H_{14} est une catégorie grammaticale (non élémentaire). On observe qu'on a obtenu, par une *méthode formelle*, ce qui du point de vue sémantique, correspond à la totalité des adjectifs qualificatifs sans article, qui se trouvent à une forme de nominatif, degré positif.

De manière analogue, on établit que l'ensemble $H_{23} = H_2 \cup H_3$ est une catégorie grammaticale et on a $H_{14} = H_{23}$.

Jusqu'à présent nous avons envisagé seulement les catégories grammaticales engendrées par des réunions de classes de distribution. Nous les appellerons désormais *catégories grammaticales normales*. D'après le théorème 9 ci-dessous, une catégorie grammaticale est normale si et seulement si elle est une réunion de familles. Nous allons illustrer ce phénomène par l'exemple des adjectifs.

Soit $A = S(\textit{frumos}) \cup S(\textit{vechi}) \cup S(\textit{precoce}) \cup S(\textit{dibaci}) \cup S(\textit{subţire}) \cup$
$\cup\, S(\textit{june}) \cup \{\textit{gri}\}$,

où $\{gri\}$ désigne l'ensemble formé par l'unique mot « *gri* ». Soit

$$B = S(\textit{frumos}) \cup S(\textit{vechi}) \cup S(\textit{precoce}) \cup S(\textit{dibaci}) \cup S(\textit{subţire}) \cup \cup S(\textit{june}) \cup (S(\textit{gri}) - \{\textit{gri}\}).$$

Conformément à la proposition 9 du paragraphe 5, A et B sont des ensembles initiaux et, d'autre part, aucun d'eux n'est contenu dans l'autre. On a $A \to S(gri)$, $B \to S(gri)$ et avec cela on a épuisé les mots dominés par les ensembles A et B ; donc

$$\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B) = \mathscr{G}(S(\textit{frumos}))\,.$$

On observe qu'il existe une classe de distribution et une seule, à savoir $S(gri)$, avec la propriété

$$A \cup B \to S(\textit{gri})\,,$$

et $S(gri)$ contient tous les mots de A qui ne sont pas dans B et tous les mots de B qui ne sont pas dans A. Ce fait, aisément vérifiable, est la conséquence d'un théorème général (théorème 1 du paragraphe 12). On peut ainsi, grâce à certains théorèmes obtenus dans le cadre d'une théorie purement déductive, distinguer les prémisses logiques qui assurent une certaine propriété des faits qui apparaissent accidentellement ensemble. Les propriétés de la classe de distribution $S(gri)$, en ce qui concerne les ensembles initiaux A et B sont un reflet d'un phénomène plus profond, qui illustre la liaison organique entre la notion de classe de distribution d'une part, et la notion de catégorie grammaticale d'autre part ; cela, dans le cas même où la catégorie grammaticale n'est pas engendrée par une classe de distribution.

10. Mesure de l'homonymie morphologique : partie commune de certaines catégories grammaticales élémentaires

Considérons de nouveau les quatre catégories grammaticales élémentaires obtenues au paragraphe 8. Observons que certains mots appartiennent à plusieurs catégories grammaticales élémentaires. De ce point de vue, les adjectifs qualificatifs sans article se répartissent en quatre classes, de la manière suivante :

1) Adjectifs qui rentrent dans une seule catégorie grammaticale élémentaire et qu'on appellera *adjectifs d'indice un* ; ici rentrent les adjectifs de S (*frumos*), S (*frumoasă*), S (*frumoşi*), S (*frumoase*).

2) Adjectifs qui rentrent dans deux catégories grammaticales élémentaires et qu'on appellera *adjectifs d'indice deux* ; ici rentrent les adjectifs de S (*dibaci*), S (*subţire*), S (*june*), S (*greoaie*), S (*subţiri*).

3) Adjectifs qui rentrent dans trois catégories grammaticales élémentaires et qu'on appellera *adjectifs d'indice trois* ; ici rentrent les adjectifs de S (*vechi*) et S (*precoce*).

4) Adjectifs qui rentrent dans quatre catégories grammaticales élémentaires et qu'on appellera *adjectifs d'indice quatre* ; ici rentrent les adjectifs de S (*gri*).

L'indice d'un adjectif représente une mesure de l'homonymie morphologique qui se manifeste dans le paradigme de l'adjectif en question ; plus cet indice est grand, plus le nombre des formes homonymiques du mot en question est grand. C'est pourquoi, l'indice défini ci-dessus peut être considéré comme un *indice de l'homonymie morphologique*. Pour l'étude d'un autre point de vue de ce problème, voir [18].

On établit d'une manière plus simple l'indice d'homonymie à l'aide de l'observation suivante : tout mot de $S(x)$ a le même indice d'homonymie que x.

Il est naturel, à la suite des constatations faites, d'appeler *interférence homonymique* la partie commune de certaines catégories grammaticales élémentaires. On peut montrer que l'interférence homonymique de deux catégories grammaticales élémentaires, $\mathcal{G}(A)$ et $\mathcal{G}(B)$, est

$$\mathcal{G}(A \cup B) - (A \cup B)\,,$$

d'où il résulte que l'interférence homonymique des catégories grammaticales élémentaires $\mathcal{G}(S\,(\textit{frumos}))$ et $\mathcal{G}(S\,(\textit{frumoasă}))$ est

$$\mathcal{G}(S\,(\textit{frumos}) \cup S\,(\textit{frumoasă})) - (S\,(\textit{frumos}) \cup S\,(\textit{frumoasă}))\,.$$

On peut aussi donner une expression analogue pour les autres interférences homonymiques.

11. Catégories grammaticales des adjectifs qualificatifs français

En utilisant la répartition des adjectifs qualificatifs en classes de distribution (voir le § 31 du chapitre I), on trouve quatre c. g. é. :

1° $\mathcal{G}(S\,(\textit{différent})) = S\,(\textit{différent}) \cup S\,(\textit{heureux}) \cup S\,(\textit{analytique}) \cup S\,(\textit{kaki})$;

2° $\mathcal{G}(S\,(\textit{différente})) = S\,(\textit{différente}) \cup S\,(\textit{analytique}) \cup S\,(\textit{kaki})$;

3° $\mathcal{G}(S\,(\textit{différents})) = S\,(\textit{différents}) \cup S\,(\textit{heureux}) \cup S\,(\textit{aualytiques}) \cup$ $\cup\ S\,(\textit{kaki})$;

4° $\mathcal{G}(S\,(\textit{difiérentes})) = S\,(\textit{différentes}) \cup S\,(\textit{analytiques}) \cup S\,(\textit{kaki})$.

La réunion des c. g. é. 1° et 2° est une c. g. contenant toutes les formes du singulier des adjectifs qualificatifs français, tandis que la réunion des c. g. é. 3° et 4° est une c. g. contenant toutes les formes du pluriel de ces mêmes adjectifs. La réunion des c. g. é. 1° et 3° est une c. g. contenant toutes les formes du masculin, tandis que la réunion des c. g. é. 2° et 4° est une c. g. contenant toutes les formes du féminin.

L'indice d'homonymie morphologique de *différent*, *différents*, *différente* et *différentes* est égal à 1 ; l'indice d'homonymie morphologique de *heureux*, *analytique* et *analytiques* est égal à 2. Il n'y a aucune forme adjectivale dont l'indice d'homonymie morphologique soit supérieur à 2. Donc l'homonymie morphologique des adjectifs français est de beaucoup inférieure à celle des adjectifs roumains.

12. Conditions nécessaires pour que deux ensembles initiaux engendrent la même catégorie grammaticale

Chaque ensemble initial engendre une c. g., donc à chaque ensemble initial correspond une c. g. bien déterminée. Il se pose alors le problème de savoir si la réciproque de cette affirmation est aussi vraie, c'est-à-dire qu'il faut déterminer dans quelles conditions deux ensembles initiaux engendrent la même c. g. Pour répondre à cette question, nous allons utiliser la notion de *différence symétrique* de deux ensembles A et B, notée $A \triangle B$ et définie, comme on le sait, par $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$. On a alors le

THÉORÈME 1. *Si deux ensembles initiaux A et B engendrent la même c. g., et si $A - B \neq 0 \neq B - A$, alors il existe une famille F telle que $F \supseteq A \triangle B$ et $A \cup B \rightarrow F$.*

Démonstration. Supposons que A et B engendrent la même c. g. Nous avons donc

$$A \cup A_1 = B \cup B_1 .$$

où A_1 est le produit saturé de A et B_1 le produit saturé de B. Il s'ensuit que

$$A - B \subseteq B_1 \tag{1}$$
$$B - A \subseteq A_1 , \tag{2}$$

Mais nous avons, par définition,

$$B \rightarrow B_1 , \tag{3}$$

donc, en vertu de la proposition 1 et de (1), nous avons

$$B \rightarrow A - B . \tag{4}$$

Par définition, nous avons

$$A \rightarrow A_1 , \tag{5}$$

donc, en vertu de la proposition 1 et de (2), nous avons

$$A \rightarrow B - A . \tag{6}$$

De (4) et de la proposition 1 nous déduisons

$$B - A \rightarrow A - B . \tag{7}$$

De (6) et de la proposition 1 nous déduisons

$$A - B \rightarrow B - A . \tag{8}$$

En tenant compte de la proposition 7, et du fait que $A - B \neq 0 \neq B - A$, nous déduisons de (7) et de (8) l'existence d'une famille F telle que

$$A \triangle B \subseteq F. \tag{9}$$

De (9) et de la proposition 6 nous déduisons que $A - B \rightarrow F$. En tenant compte de (4), en vertu de la transitivité de $\rightarrow$, nous aurons

$$B \rightarrow F. \tag{10}$$

En utilisant de nouveau la relation (9) et la proposition 6, nous déduisons $B - A \rightarrow F$. Compte tenu de (6) et de la transitivité de $\rightarrow$, nous avons alors, en vertu du fait que $B - A \neq 0$,

$$A \rightarrow F. \tag{11}$$

De (10) et (11) il s'ensuit, en vertu de la proposition 2,

$$A \cup B \rightarrow F. \tag{12}$$

Remarque. La famille F, dont l'existence est assurée par le théorème 1, est uniquement déterminée. En effet, en vertu des hypothèses on a $A \triangle B \neq 0$. Mais on a aussi $A \triangle B \subseteq F$ et on sait qu'un mot appartient à une seule famille.

La réciproque du théorème 1 n'est pas vraie, comme il résulte de la proposition suivante :

Il existe deux ensembles initiaux A et B tels que $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B)$ et une famille F telle que $A \cup B \rightarrow F$ et $A \triangle B \subseteq F$, mais $B - A = 0$.

En effet, soient $\Gamma = \{ a, b, c \}$, $\Phi = \{ abc, acc \}$, $A = \{ b, c \}$, $B = \{ b \}$. A et B sont des ensembles initiaux et on a $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B) = \{ b, c \}$. Nous avons aussi $S(c) = \{ c \}$, $A \triangle B = \{ c \}$ et $B - A = 0$. En prenant $F = S(c)$, toutes les conditions de l'énoncé sont satisfaites.

Nous allons montrer maintenant que l'hypothèse $A - B \neq 0 \neq B - A$ ne peut pas être écartée de l'énoncé du théorème 1. En effet, on la proposition suivante :

On peut construire deux ensembles initiaux A et B, tels que $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B)$ et tels qu'il n'existe aucune famille F avec la propriété $A \triangle B \subseteq F$.

Démonstration. Soient $\Gamma = \{ a, b, c, d \}$, $\Phi = \{ ab, bc, cc, dd, cd, db, cb \}$, $A = \{ a \}$, $B = \{ a, c, d \}$. A et B sont initiaux et on a $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B) = \{ a, c, d \}$. D'autre part, $A \triangle B = B - A = \{ c, d \}$. S'il existait une famille F telle que $\{ c, d \} \subseteq F$, alors on aurait $d \in S(c)$, ce qui est impossible, car c ne domine pas d.

COROLLAIRE 1. *Si A et B sont deux ensembles initiaux disjoints, alors ils engendrent des c. g. différentes.*

Démonstration. Supposons, pour raisonner par l'absurde, que A et B engendrent la même c. g. Dans ce cas, en vertu du théorème 1, il y a une famille F telle que $A \triangle B \subseteq F$. Mais A et B étant disjoints, on a $A \triangle B = A \cup B$, donc $A \cup B \subseteq F$ et, à plus forte raison, $A \subseteq F \supseteq B$. Puisque A et B sont des ensembles initiaux, on déduit $A = F = B$, en contradiction avec le fait que $A \cap B = 0$.

La réciproque du corollaire 1 n'est pas vraie ; en effet, on a la proposition suivante :

Il existe deux ensembles initiaux A et B tels que $A \cap B \neq 0$ et $\mathcal{G}(A) \neq \mathcal{G}(B)$.

En effet, soient $\Gamma = \{ a, b, c \}$, $\Phi = \{ abc, acc, aac \}$, $A = \{ b, c \}$, $B = \{ b \}$. A et B sont initiaux et nous avons $\mathcal{G}(A) = \{ b, c \}$, $\mathcal{G}(B) = \{ a, b, c \}$, donc toutes les conditions de l'énoncé sont remplies.

PROPOSITION 18. *Une condition nécessaire pour que deux ensembles initiaux A et B engendrent la même c. g. est que $A \cap B \rightarrow A \triangle B$.*

Démonstration. On a, par hypothèse, $A \cup A_1 = B \cup B_1$, donc $A - B \subseteq B_1$ et $B - A \subseteq A_1$. On déduit que $B \rightarrow A - B$ et $A \rightarrow B - A$, d'où on obtient, en utilisant la proposition 1, la condition désirée.

Remarque. La condition $A \cap B \rightarrow A \triangle B$ n'est pas suffisante pour avoir $\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}(B)$. En effet, soient $\Gamma = \{ a, b, c \}$, $\Phi = \{ abc, acc, aac \}$, $A = \{ b, c \}$, $B = \{ b \}$. A et B sont initiaux ; $A \cap B = \{ b \}$, $A \triangle B = \{ c \}$ et, puisque $b \rightarrow c$, on a $A \cap B \rightarrow A \triangle B$. Toutefois,

$$\mathcal{G}(A) = \{ b, c \} \neq \{ a, b, c \} = \mathcal{G}(B) .$$

13. Conditions suffisantes pour que deux ensembles initiaux engendrent la même catégorie grammaticale

THÉORÈME 2. *Soient A et B deux ensembles initiaux tels que $A - B \neq 0$ et $B - A \neq 0$. S'il existe une famille F telle que $A \cap B \rightarrow F \supseteq A \triangle B$, alors $\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}(B)$ et $A_1 = B_1$.*

Démonstration. En tenant compte du fait que les hypothèses sont symétriques par rapport à A et B, il suffit de prouver que $\mathcal{G}(A) \subseteq \mathcal{G}(B)$ et $A_1 \subseteq B_1$. La première inclusion correspond à $A \cup A_1 \subseteq B \cup B_1$. On doit d'abord montrer que $A - B \subseteq B_1$, c'est-à-dire que $B \rightarrow A - B$. Mais on a, par hypothèse et en tenant compte de la proposition 1, $A \cap B \rightarrow A - B$. On a aussi, en vertu de la proposition 6 et de l'hypothèse, $B - A \rightarrow A - B$. En utilisant la proposition 2, on en déduit $B \rightarrow A - B$.

Maintenant nous allons montrer que $A_1 \subseteq B_1$. En effet, soit un mot x tel que $x \in A_1$, donc $A \rightarrow x$. On a, en vertu de la proposition 1, $A - B \rightarrow x$ et

$A \cap B \to x$. De ce que $B - A \to A - B$ et en vertu de la transitivité de $\to$ dans $2^{\Gamma} - \{0\}$, on déduit $B - A \to x$, et puisqu'on a aussi $A \cap B \to x$, on obtient, en vertu de la proposition 2, $B \to x$ et le théorème 2 est démontré.

Le théorème 2 devient faux si l'on écarte l'hypothèse $A - B \neq 0 \neq B = A$. En effet, on a la proposition suivante :

Il existe deux ensembles initiaux A et B et une famille F telle que

$$A \cap B \to F \supseteq A \triangle B ,$$

mais $\mathscr{G}(A) \neq \mathscr{G}(B)$.

Démonstration. Posons $\Gamma = \{a, b, c\}$, $\Phi = \{abc, acc, aac\}$, $A = \{b, c\}$, $B = \{b\}$. A et B sont initiaux et il est aisé de voir que $S(c) = \{c\}$. Posons $F = S(c)$. On a $b \to c$ et $A \cap B = \{b\}$, donc $A \cap B \to F$. On a aussi $A \triangle B = \{c\}$, donc $A \triangle B \subseteq F$. D'autre part, $\mathscr{G}(A) = \{b, c\}$,

$$\mathscr{G}(B) = \{a, b, c\}, \qquad \text{donc} \qquad \mathscr{G}(A) \neq \mathscr{G}(B) .$$

En ce qui concerne le théorème 2, il est à remarquer qu'on a aussi la proposition suivante :

Si A et B sont deux ensembles initiaux, tels que $A_1 = B_1$ et $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B)$, alors il existe une famille F telle que $A \cup B \to F$ et $A \triangle B \subseteq F$.

Démonstration. Remarquons d'abord que si $A - B \neq 0 \neq B - A$, alors ce résultat est connu (voir le théorème 1). Soit donc $A \subseteq B$. On a $A \cup A_1 = B \cup B_1$, donc $B - A \subseteq A_1$, ce qui correspond à $A \to B - A$. Mais $A_1 = B_1$, donc $B \to B - A$ et, à plus forte raison, $B - A \to B - A$. En vertu de la proposition 4, il y a une famille F telle que $B - A \subseteq F$. D'autre part, on a $A \triangle B = B - A$, donc $A \triangle B \subseteq F$. Du fait que, en vertu de la proposition 2, on a $A \cup B \to B - A$, on déduit les relations de l'énoncé.

14. Conditions nécessaires et suffisantes pour que $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B)$ lorsque $A - B \neq 0 \neq B - A$

THÉORÈME 3. *Chacune des deux conditions suivantes est à la fois nécessaire et suffisante pour que deux ensembles initiaux A et B, tels que*

$$A - B \neq 0 \neq B - A$$

engendrent la même c. g. :

I. *Il existe une famille F telle que*

$$A \cap B \to F \qquad \text{et} \qquad F \supseteq A \triangle B ;$$

II. *Il existe une famille F telle que*

$$A \cup B \to F \qquad \text{et} \qquad F \supseteq A \triangle B .$$

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 1 et des théorèmes 1 et 2.

Remarque. Dans le cas où les ensembles initiaux A et B sont non productifs, on a $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B)$ si et seulement si $A = B$. En effet, dans ce cas on a $A = \mathscr{G}(A)$ et $B = \mathscr{G}(B)$.

Comme illustration des faits établis jusqu'ici, considérons l'interprétation suivante. Γ = le lexique du français, Φ = l'ensemble des phrases françaises correctes, $A = S$ (*beau*) $\cup$ { *mince* }, $B = S$ (*beau*) $\cup$ { *maigre* }. Posons $F = S$ (*maigre*). On a $A \cap B = S$ (*beau*), $A \triangle B =$ { *mince*, *maigre* }, $A \cap B \to F$, $A \cup B = S$ (*beau*) $\cup$ { *maigre*, *mince* }, $A \cup B \to F$.

15. Conditions suffisantes pour que $\mathscr{G}(A) \subseteq \mathscr{G}(B)$

THÉORÈME 4. *Soient A et B deux ensembles initiaux tels que $A - B \neq 0$. Si $B \to A - B$ alors $\mathscr{G}(B) \supseteq \mathscr{G}(A)$ et $B_1 \supseteq A_1$.*

Démonstration. On a $\mathscr{G}(B) = B \cup B_1$, $\mathscr{G}(A) = A \cup A_1$ et il faut montrer que

$$A \cup A_1 \subseteq B \cup B_1 \,, \tag{13}$$

$$A_1 \subseteq B_1 \,. \tag{14}$$

Montrons d'abord la deuxième inclusion. Pour $x \in A_1$ on a $A \to x$ donc, en vertu de la proposition 1, on a

$$A - B \to x \,. \tag{15}$$

En vertu de la transitivité de $\to$ et du fait que, par hypothèse, $B \to A - B$ et $A - B \neq 0$, on déduit de (15) que

$$B \to x \,,$$

donc $x \in B_1$, et l'inclusion (14) est établie.

Pour établir l'inclusion (13), il suffit maintenant de montrer que

$$A \subseteq B \cup B_1 \,; \tag{16}$$

or, on a en effet, pour $x \in A$, ou bien $x \in B$, donc $x \in B \cup B_1$, ou bien $x \in A - B$, donc, en vertu de l'hypothèse $B \to A - B$, on a $B \to x$, c'est-à-dire que $x \in B_1$ et on a l'inclusion (16).

Sans l'hypothèse $A - B \neq 0$, le théorème 4 n'est plus vrai, comme il s'ensuit de la proposition suivante :

Il existe deux ensembles initiaux A et B, tels que $B \to A - B$, $\mathscr{G}(B) \subset \mathscr{G}(A)$ et $B_1 \subset A_1$.

Pour démonstration, soit $\Gamma = \{ a, b, c \}$, $\Phi = \{ abc, acc, aac \}$, $A = \{ b \}$, $B = \{ b, c \}$. Il est aisé de voir que A et B sont initiaux. On a $A - B = 0$ donc $B \to A - B$. On a aussi $\mathscr{G}(A) = \{ a, b, c \}$, $\mathscr{G}(B) = \{ b, c \}$, $A_1 = \{ a, b, c \}$, $B_1 = \{ c \}$ donc toutes les conditions de l'énoncé sont remplies.

16. Conditions nécessaires pour que $\mathscr{G}(A) \subseteq \mathscr{G}(B)$

THÉORÈME 5. *Soient A et B deux ensembles initiaux tels que $A - B \neq 0$. Si $\mathscr{G}(A) \subseteq \mathscr{G}(B)$, alors*

$$B \to A - B \tag{17}$$

et

$$A_1 \subseteq B_1 . \tag{18}$$

Démonstration. En vertu du théorème 4, l'inclusion (18) est une conséquence de l'inclusion (17), il suffit donc de prouver cette dernière propriété. Or, on a par hypothèse l'inclusion (13), donc, pour $x \in A - B$, on a $x \in B_1$, c'est-à-dire que $B \to x$. Mais x est un mot arbitraire de $A - B$; on a donc l'inclusion (17), et le théorème 5 est ainsi établi.

Le théorème 4 cesse d'être vrai si l'on écarte l'hypothèse $A - B \neq 0$. En effet, on a la proposition suivante :

Il existe deux ensembles initiaux A et B tels que $\mathscr{G}(A) \subset \mathscr{G}(B)$, $B \to A - B$ et $A_1 - B_1 \neq 0$.

Démonstration. Soit $\Gamma = \{ a, b \}$, $\Phi = \{ ab \}$, $A = \{ a \}$, $B = \{ a, b \}$. A et B sont des ensembles initiaux et on a $\mathscr{G}(A) = A$, $\mathscr{G}(B) = B$, $A - B = 0$. Donc $B \to A - B$ et $\mathscr{G}(A) \subset \mathscr{G}(B)$. D'autre part, on a $A_1 = \{ a \}$, $B_1 = 0$, donc $A_1 - B_1 = \{ a \} \neq 0$ et la proposition est établie.

Les théorèmes 4 et 5 sont illustrés par l'exemple suivant :

$A = S$ (*beau*) $\cup$ S (*mince*), $B = S$ (*beau*). A et B sont initiaux, $B \subset A$, $B \to A - B$ et $\mathscr{G}(A) \subset \mathscr{G}(B)$, car *faux* $\in \mathscr{G}(B) - \mathscr{G}(A)$.

17. Nouvelle caractérisation des ensembles initiaux qui engendrent la même catégorie grammaticale

THÉORÈME 6. *Soient A et B deux ensembles initiaux tels que $A - B \neq 0$. Chacune des deux conditions suivantes est à la fois nécessaire et suffisante pour qu'on ait $\mathscr{G}(A) \subseteq \mathscr{G}(B)$:*

1. $B \to A - B$;
2. $B \to A - B$ *et* $A_1 \subseteq B_1$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des théorèmes 4 et 5.

COROLLAIRE 2. *Soient A et B deux ensembles initiaux tels que*

$$A - B \neq 0 \neq B - A .$$

Pour que $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B)$ il faut et il suffit que

$$A \cup B \rightarrow A \triangle B \qquad \text{et} \qquad A_1 = B_1 .$$

Démonstration. Soit $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B)$. On a $\mathscr{G}(A) \subseteq \mathscr{G}(B)$ et, en tenant compte du fait que par hypothèse $A - B \neq 0$, on déduit que la condition 2 du théorème 6 est remplie. Mais on a aussi $\mathscr{G}(B) \subseteq \mathscr{G}(A)$, donc, vu que $B - A \neq 0$, il s'ensuit, toujours en vertu du théorème 6, que $A \rightarrow B - A$ et $B_1 \subseteq A_1$. Donc

$$B \rightarrow A - B, \qquad A \rightarrow B - A \qquad \text{et} \qquad A_1 = B_1 .$$

Il s'ensuit que $A \rightarrow A - B$ et $B \rightarrow B - A$. En vertu des propositions 2 et 3, on obtient $A \cup B \rightarrow A \triangle B$ et le corollaire 2 est démontré.

Remarques. Le corollaire 2 cesse d'être valable si l'on supprime de son énoncé l'hypothèse $A - B \neq 0 \neq B - A$. En effet, on a la proposition suivante :

Il existe deux ensembles initiaux A et B tels que

$$\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B), \qquad A \cup B \rightarrow A \triangle B \qquad \text{et} \qquad A_1 \neq B_1 .$$

En effet, soient $\Gamma = \{ a, b, c \}$, $\Phi = \{ abc, acc \}$, $A = \{ b, c \}$, $B = \{ b \}$. A et B sont des ensembles initiaux et $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B) = \{ b, c \}$. On a $A \cup B = \{b, c\}$, $A \triangle B = \{ c \}$ et, vu que $b \rightarrow c$, il s'ensuit que $A \cup B \rightarrow A \triangle B$. Enfin, on a $A_1 = \{ c \}$, $B_1 = \{ b, c \}$, donc $A_1 \neq B_1$.

COROLLAIRE 3. *Une condition nécessaire et suffisante pour que deux ensembles initiaux A et B, tels que $A - B \neq 0 \neq B - A$, engendrent la même catégorie grammaticale, est que $A \cup B \rightarrow A \triangle B$.*

Démonstration. La condition est nécessaire selon le théorème 1 ou selon le corollaire 2 ; elle est suffisante d'après le théorème 4, appliqué d'abord aux ensembles A et B, ensuite aux ensembles B et A.

Remarque. Il est aisé de voir, grâce aux exemples envisagés jusqu'ici, que lorsqu'on supprime la condition $A - B \neq 0 \neq B - A$, la relation

$$A \cup B \rightarrow A \triangle B$$

n'est ni nécessaire, ni suffisante pour qu'on ait $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B)$.

Les théorèmes 1, 2 et 3, la proposition 18 et les corollaires 2 et 3 conduisent au résultat suivant :

Soient A et B deux ensembles initiaux, tels que $A - B \neq 0 \neq B - A$. Chacune des conditions suivantes est à la fois nécessaire et suffisante pour qu'on ait $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B)$:

α) $A \cup B \to A \triangle B$;
β) *il existe une famille* F *telle que* $A \cup B \to F$ et $A \triangle B \subseteq F$;
γ) *il existe une famille* F *telle que* $A \cap B \to F \supseteq A \triangle B$;
δ) $A \cup B \to A \triangle B$ et $A_1 = B_1$;
ε) *il existe une famille* F *telle que* $A \cap B \to F \supseteq A \triangle B$ et $A_1 = B_1$;
ζ) $A_1 = B_1$ *et il existe une famille* F *telle que* $A \cup B \to F \supseteq A \triangle B$.

18. Conditions pour que $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B)$ lorsque $A \subseteq B$

PROPOSITION 19. *Soient* A *et* B *deux ensembles initiaux tels que* $A \subseteq B$. *Pour que* $\mathscr{G}(A) \subseteq \mathscr{G}(B)$ *il faut et il suffit que* $(A_1 - B_1) \subseteq B$ (par A_1 (B_1) on désigne toujours le produit saturé de $A(B)$).

Démonstration. $A \subseteq B$ entraîne, en vertu de la proposition 1, $B_1 \subseteq A_1$. Pour avoir $A \cup A_1 \subseteq B \cup B_1$ il est donc nécessaire qu'on ait $A_1 - B_1 \subseteq B$. Réciproquement, de $A \subseteq B$ et de $A_1 - B_1 \subseteq B$ il découle que $A \cup A_1 \subseteq B \cup B_1$.

COROLLAIRE 4. *Soient* A *et* B *deux ensembles initiaux tels que* $A \subseteq B$. *Pour avoir* $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B)$ *il faut et il suffit que* $A \to (B - A)$ *et* $A_1 - B_1 \subseteq B$.

Démonstration. Les conditions sont nécessaires. — Soient $A \subseteq B$ et

$$\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B) .$$

En vertu de la proposition 19, nous avons $A_1 - B_1 \subseteq B$. Mais

$$A \cup A_1 = B \cup B_1 .$$

donc $B - A \subseteq A_1$, c'est-à-dire $A \to B - A$ et la nécessité des conditions est établie.

Les conditions sont suffisantes. — On a $A \subseteq B$, $A \to B - A$, $A_1 - B_1 \subseteq B$ et il faut montrer que $A \cup A_1 = B \cup B_1$. L'inclusion $A \cup A_1 \subseteq B \cup B_1$ résulte des hypothèses $A \subseteq B$ et $A_1 - B_1 \subseteq B$. L'inclusion $B \cup B_1 \subseteq A \cup A_1$ résulte des faits suivants : 1° par hypothèse, $A \to B - A$, donc $B - A \subseteq A_1$; 2° de l'hypothèse $A \subseteq B$ on déduit que $B_1 \subseteq A_1$.

Le corollaire 4 est ainsi démontré.

Comme illustration du corollaire 4, soit Γ = le lexique du roumain, Φ = l'ensemble des phrases correctes du roumain, $A = S$ (*precoce*), $B = A \cup S$ (*cumsecade*). On a

$$A_1 = B , \qquad B_1 = S\,(\textit{cumsecade}) , \qquad \mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B) = B ,$$

$$A_1 - B_1 \subset B .$$

19. Ensembles initiaux équivalents. Relation ρ_F

Nous dirons que deux ensembles initiaux se trouvent dans la relation ρ s'ils engendrent la même c. g. Il est évident que ρ est une relation d'équivalence. Si A et B sont dans la relation ρ, on écrit $A\rho B$.

Nous dirons que deux ensembles initiaux A et B se trouvent dans la relation ρ_F si F est une famille et si

$$(A \cap B) \to F \supseteq (A \triangle B) .$$

On écrit, dans ce cas, $A\rho_F\, B$.

En vertu du théorème 2, $A\rho_F\, B$ a pour conséquence $A\rho B$ dès lors que

$$A - B \neq 0 \neq B - A ;$$

dans ce cas, en vertu du théorème 3, il y a équivalence entre $A\rho_F\, B$ et

$$(A \cup B) \to F \supseteq (A \triangle B) .$$

Ces propriétés seront souvent utilisées dans la suite.

Lemme 1. *Considérons trois ensembles initiaux A, B et C, dont aucun n'est contenu dans un autre. Si F_1 et F_2 sont deux familles telles que*

$$A\rho_{F_1} B \qquad \text{et} \qquad B\rho_{F_2} C ,$$

alors

$$A \cap C \to F_1 \cup F_2 \supseteq A \triangle C . \tag{19}$$

Démonstration. Des hypothèses on déduit, en vertu du théorème 3,

$$A \cup B \to F_1 \supseteq A \triangle B ,$$
$$B \cup C \to F_2 \supseteq B \triangle C .$$

On a donc

$$A - C \subseteq (A - B) \cup (B - C) \subseteq F_1 \cup F_2 , \tag{20}$$
$$C - A \subseteq (C - B) \cup (B - A) \subseteq F_2 \cup F_1 .$$

De (20) on déduit que

$$A \triangle C \subseteq F_1 \cup F_2 . \tag{21}$$

De $A\rho_{F_1} C$ on déduit $A \to F_1$; de $B\rho_{F_2} C$ on déduit $C \to F_2$, donc, en utilisant les propositions 1 et 3, on obtient

$$A \cap C \to F_1 \cup F_2 . \tag{22}$$

Les relations (21) et (22) prouvent le lemme 1.

Dans ce qui suit, nous allons représenter la condition (19) par

$$A\rho_{F_1 \cup F_2} C . \tag{23}$$

Remarques. La condition (19) ne diffère de la condition I du théorème 3 que par le fait qu'au lieu d'une famille F on a, dans (19), la réunion de deux familles F_1 et F_2. D'autre part, de $A\rho_{F_1} B$ on déduit $A\rho B$, et de $B\rho_{F_2} C$ on déduit $B\rho C$; en vertu de la transitivité de ρ on a alors $A\rho C$, donc, en utilisant le théorème 3, on déduit, d'après $A - C \neq 0 \neq C - A$, l'existence d'une famille F

telle que $A\rho_F C$. C'est-à-dire que, dans les hypothèses du lemme 1, on n'a pas seulement (23), mais aussi une famille F telle que $A\rho_F C$. Il est donc naturel de se demander quelle est la relation entre la famille F ainsi obtenue et les familles F_1 et F_2. Pour cela, nous allons établir le

LEMME 2. *Considérons trois ensembles initiaux A, B et C, dont aucun n'est contenu dans un autre. Si $A\rho_{F_1} B$ et $B\rho_{F_2} C$, on a une des deux possibilités suivantes :*

I. $\quad A\rho_{F_1} C \quad$ *et* $\quad A \triangle C \subseteq A \triangle B$;

II. $\quad A\rho_{F_2} C \quad$ *et* $\quad A \triangle C \subseteq B \triangle C$.

Démonstration. En vertu du lemme 1, on a (19). En vertu des hypothèses on a $A\rho C$; on déduit, à l'aide du théorème 3, l'existence d'une famille F telle que

$$A \cup C \to F \quad \text{et} \quad A \triangle C \subseteq F . \tag{24}$$

Mais, en vertu des hypothèses, on a aussi (21), donc, en tenant compte du fait que deux familles distinctes sont toujours disjointes, on déduit de (24) et de (21) que $F = F_1$ ou $F = F_2$. Si $F = F_1$, on déduit de (24) et de (20) et en utilisant les hypothèses, que $A - C \subseteq A - B$, $C - A \subseteq B - A$, donc $A \triangle C \subseteq A \triangle B$, c'est-à-dire que l'on a la situation I.

Si $F = F_2$, on déduit de la même manière que

$$A - C \subseteq B - C \quad \text{et} \quad C - A \subseteq C - B ,$$

donc $A \triangle C \subseteq B \triangle C$, c'est-à-dire que l'on a la situation II. Le lemme 2 est ainsi démontré.

20. Symétrie et transitivité de la relation ρ_F

LEMME 3. *Soient A, B et C trois ensembles initiaux dont aucun n'est contenu dans un autre. Si $A\rho_F B$, alors $B\rho_F A$. Si $A\rho_F B$ et $B\rho_F C$, alors $A\rho_F C$.*

Démonstration. De $A\rho_F B$ on déduit

$$A \cap B \to F \supseteq A \triangle B . \tag{25}$$

Mais on a $A \cap B = B \cap A$ et $A \triangle B = B \triangle A$, donc

$$B \cap A \to F \supseteq B \triangle A ,$$

c'est-à-dire que $B\rho_F A$.

Supposons maintenant $A\rho_F B$ et $B\rho_F C$. On a donc (25) et

$$B \cap C \to F \supseteq B \triangle C . \tag{26}$$

Mais (25) équivaut, comme on le sait, à

$$A \cup B \to F \supseteq A \triangle B , \tag{27}$$

tandis que (26) équivaut à

$$B \cup C \to F \supseteq B \triangle C. \tag{28}$$

De (27) et (28) on déduit, en vertu de la proposition 2,

$$A \cup C \to F. \tag{29}$$

On a, d'autre part, en vertu des relations (20),

$$A \triangle C \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$$

donc, en tenant compte de (27) et (28), on déduit que

$$A \triangle C \subseteq F. \tag{30}$$

De (29) et (30) on déduit la relation $A\rho_F\, C$. Le lemme 3 est ainsi établi.

21. Familles associées à certaines classes d'ensembles initiaux équivalents

THÉORÈME 7. *Soit $\mathscr{G}$ une catégorie grammaticale. Supposons qu'il existe une classe K d'ensembles initiaux tels que, si $A \in K$ et $B \in K$, alors*

$$\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B) = \mathscr{G} \qquad \textit{et} \qquad A - B \neq 0 \neq B - A.$$

Dans ces conditions, il existe une famille F_K, uniquement déterminée par K, telle que si $A \in K$ et $B \in K$ ($A \neq B$), alors $A\rho_{F_K}\, B$.

Démonstration. Si K est formée seulement de deux ensembles initiaux, le théorème 7 est démontré, en vertu du théorème 1 ; supposons donc que la classe K contient au moins trois ensembles initiaux. Considérons quatre ensembles $A \in K$, $B \in K$, $C \in K$, $D \in K$, parmi lesquels trois au moins sont distincts deux à deux. (Si K contient seulement trois ensembles initiaux, alors deux des ensembles envisagés seront identiques.) Nous allons montrer l'existence d'une famille F telle que $A\rho_F\, B$ et $C\rho_F\, D$.

Deux cas se présentent :

1) $C = D$. Ici, on a trois ensembles initiaux distincts A, B et C.
En vertu des hypothèses et du théorème 1, il y a deux familles F_1 et F_2 elles que $A\rho_{F_1}\, B$ et $B\rho_{F_2}\, C$. Supposons, par réduction à l'absurde, que $F_1 \neq F_2$. En vertu du lemme 2, on a

$$A\rho_{F_1}\, C \tag{31}$$

ou bien

$$A\rho_{F_2}\, C. \tag{32}$$

Si l'on a (31), alors, en vertu du lemme 3, on déduit $C\rho_{F_1}\, A$ et, en faisant de nouveau usage du lemme 3, on obtient $C\rho_{F_1} B$, donc $B\rho_{F_1} C$, ce qui est en contradiction avec $B\rho_{F_2} C$.

Si l'on a (32), alors, en vertu du lemme 3, on déduit $C\rho_{F_2} A$ et, en recourant derechef au lemme 3, on obtient $B\rho_{F_2} A$, donc $A\rho_{F_2} B$, ce qui est en contradiction avec $A\rho_{F_1} B$.

On a donc $F_1 = F_2$.

Supposons que $F = F_1 = F_2$. On a donc $A\rho_F B$ et $B\rho_F C$. Mais

$$A \triangle C \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle C) \subseteq F \qquad \text{et} \qquad A \cup B \cup C \to F,$$

donc :

$$A \cup C \to F \supseteq A \triangle C \qquad \text{et} \qquad A\rho_F C.$$

2) Les ensembles A, B, C et D sont distincts deux à deux. En vertu du raisonnement développé en 1), il existe une famille F telle que $A\rho_F B$, $B\rho_F C$ et $A\rho_F C$. Il reste à montrer que $D\rho_F C$. Il existe, en tout cas, en vertu du théorème 1, une famille F' telle que $D\rho_{F'} C$. En considérant les ensembles A, C et D et en leur appliquant le raisonnement développé en 1), on trouve $F' = F$. D'une manière analogue on établit que $D\rho_F A$ et $D\rho_F B$.

Le théorème 7 est ainsi démontré.

Remarques. Le théorème 7 montre que, dans certaines hypothèses, la famille F ne dépend pas des ensembles A et B choisis dans une certaine classe K d'ensembles initiaux ρ-équivalents, mais seulement de cette classe K. Donc, s'il existe une classe K maximale, uniquement déterminée par la c. g. envisagée, alors la famille F, associée à K par le théorème 7, a une signification intrinsèque linguistique, intimement liée à la c. g. considérée.

22. Familles principales et leur illustration linguistique

On a défini ainsi une loi qui associe à chaque couple $(\mathcal{G}, K)$ (où $\mathcal{G}$ et K ont les mêmes significations que dans l'énoncé du théorème 7), une famille $F(\mathcal{G}, K)$ uniquement déterminée, famille que nous appelons *la famille principale* de la catégorie grammaticale $\mathcal{G}$ et de la classe K.

Pour illustrer la notion de famille principale, considérons l'exemple suivant tiré du français (exemple qui, partiellement, a déjà été utilisé). Soient :

$$A = S\,(\textit{beau}) \cup \{\textit{ mince }\},\ B = S\,(\textit{beau}) \cup \{\textit{ maigre }\},\ C = S\,(\textit{beau}) \cup \{\textit{ triste }\}.$$

A, B et C sont des ensembles initiaux et on a $\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}(B) = \mathcal{G}(C)$, car *mince*, *maigre* et *triste* entrent dans la même famille et cette famille est dominée par la famille S (*beau*). D'autre part, on a

$$A - B \neq 0 \neq B - A, \quad B - C \neq 0 \neq C - B, \quad A - C \neq 0 \neq C - A,$$

donc les ensembles A, B et C forment une classe K du type figurant dans l'énoncé du théorème 7. Du fait que $A \triangle B = \{ \textit{mince, maigre} \}$, il s'ensuit immédiatement que la famille principale associée au couple $(\mathscr{G}(A), K)$ est S (*mince*). Cela se vérifie immédiatement : on a

$$B \triangle C = \{ \textit{maigre, triste} \},\ A \triangle C = \{ \textit{mince, triste} \},\ A \cup B = S\,(\textit{beau}) \cup \cup \{ \textit{mince, maigre} \}, B \cup C = S\,(\textit{beau}) \cup \{ \textit{maigre, triste} \}, A \cup C = S\,(\textit{beau}) \cup \{ \textit{mince, triste} \},$$

donc, pour $F = S\,(\textit{mince})$, en remarquant que $\textit{maigre} \in S\,(\textit{mince})$, $\textit{triste} \in S\,(\textit{mince})$, on obtient

$$A \cup B \to F \supseteq A \triangle B\,,\ B \cup C \to F \supseteq B \triangle C \text{ et } A \cup C \to F \supseteq A \triangle C\,.$$

23. Exemples de familles principales, tirés du roumain

Considérons maintenant un exemple tiré du roumain. Soient :

$$A = S\,(\textit{mic}) \cup \{ \textit{subţire} \},\ B = S\,(\textit{mic}) \cup \{ \textit{moale} \},\ C = S\,(\textit{mic}) \cup \{ \textit{verde} \}.$$

A, B et C sont des ensembles initiaux tels qu'aucun d'entre eux n'est contenu dans un autre. On a

$$\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B) = \mathscr{G}(C) = S\,(\textit{mic}) \cup S\,(\textit{subţire}) \cup S\,(\textit{precoce}) \cup S\,(\textit{maro})\,.$$

On peut considérer une suite d'ensembles initiaux $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ du type suivant : chaque ensemble A_n est de la forme $S\,(\textit{mic}) \cup \{ \alpha_n \}$, où $\alpha_n \in S\,(\textit{subţire})$ et $\alpha_n \neq \alpha_m$ pour $n \neq m$. Les ensembles $A_1, A_2, A_3, \ldots$ forment une classe K du type figurant dans l'énoncé du théorème 7. En désignant par $\mathscr{G}$ la catégorie grammaticale engendrée par chaque A_n, on associe au couple $(\mathscr{G}, K)$ une famille principale $F(\mathscr{G}, K)$. Il est aisé de voir que $F(\mathscr{G}, K) = S\,(\textit{subţire})$. On constate aussi qu'il n'existe aucune classe K telle que $F(\mathscr{G}, K) = S\,(\textit{mic})$. En effet, $S\,(\textit{mic})$ est contenue dans tout ensemble initial qui engendre $\mathscr{G}$, donc si $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B) = \mathscr{G}$ et $A - B \neq 0 \neq B - A$, alors $S\,(\textit{mic}) \subseteq A \cap B$, mais $S\,(\textit{mic})$ ne contient pas l'ensemble $A \triangle B$.

En revanche, il existe une classe K d'ensembles initiaux tels que $F(\mathscr{G}, K) = S\,(\textit{precoce})$. En effet, définissons la classe K de la façon suivante : $A \in K$ si $A = S\,(\textit{mic}) \cup S\,(\textit{subţire}) \cup \{ \alpha \}$, où $\alpha \in S\,(\textit{precoce})$ et pour $A_1 \in K$, $A_2 \in K$ les mots α_1 et α_2 correspondants sont différents. La classe K vérifie toutes les conditions de l'énoncé du théorème 7. Toutefois, il est aisé de voir que pour $A \in K$ on a $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}$. La famille principale associée $F(\mathscr{G}, K)$ est $S\,(\textit{precoce})$.

Enfin, on peut construire une classe K telle que $F(\mathscr{G}, K) = S\,(\textit{maro})$. Il suffit de poser $A \in K$ si et seulement si $A = S\,(\textit{mic}) \cup S\,(\textit{subţire}) \cup S\,(\textit{precoce}) \cup \{ \alpha \}$, où $\alpha \in S\,(\textit{maro})$, tandis que pour $A_1 \in K$, $A_2 \in K$ les mots α_1 et α_2 associés sont différents. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier ces affirmations.

24. Enveloppes et catégories grammaticales induites

Etant donné un ensemble quelconque $E \subseteq F$, existe-t-il une c. g. contenant E ? La réponse est affirmative, car Γ est un ensemble initial, donc $E \subseteq \mathscr{G}(\Gamma)$. Mais on a une propriété plus forte : Tout ensemble non initial est contenu dans le produit saturé d'un certain ensemble initial. En effet, si E n'est pas un ensemble initial, alors il existe au moins un mot $a \notin E$ tel que $a \to E$. Posons $A = \{ x \,;\, x \in \Gamma,\ x \to E \}$. Par définition, A est l'*enveloppe* de l'ensemble E. L'enveloppe de E coïncide avec l'ensemble complètement productif par rapport à E. En vertu de la proposition 2, on a $A \to E$. D'autre part, A est un ensemble initial. En effet, dans le cas contraire il existerait un mot $y \notin A$ tel que $y \to A$, donc, en vertu de la transitivité de la relation $\to$, on aurait aussi $y \to E$, en contradiction avec la définition de A comme enveloppe.

Du fait que A est un ensemble initial, il résulte qu'il engendre une c. g. $\mathscr{G}(A)$ et on a $E \subseteq \mathscr{G}(A)$. On dira que $\mathscr{G}(A)$ est la *catégorie grammaticale induite* par A.

PROPOSITION 20. *Si E est un ensemble non initial, contenu dans Γ, alors les ensembles productifs par rapport à E forment une algèbre de Boole dont l'élément maximal est l'enveloppe de E.*

Comme démonstration, il suffit d'utiliser les proprositions 1 et 2.

PROPOSITION 21. *Toute enveloppe est une réunion de familles.*

Comme démonstration, il suffit d'utiliser la proposition 5.

25. Enveloppes des ensembles qui induisent la même catégorie grammaticale

Si deux ensembles non initiaux X et Y ont la même enveloppe, alors ils induisent la même c. g.

Il est naturel de poser le problème réciproque : Le fait que X et Y induisent la même c. g. entraîne-t-il que X et Y ont la même enveloppe ? La réponse est négative ; les deux enveloppes peuvent être différentes, mais obligatoirement dans une relation d'inclusion.

En effet, on a le

THÉORÈME 8. *Si A est l'enveloppe de X et B l'enveloppe de Y, et si*

$$\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B)\,,$$

alors $A \subseteq B$ ou bien $B \subseteq A$.

Démonstration. On a

$$A \to B - A \to Y,$$
$$B \to A - B \to X.$$

Supposons, par réduction à l'absurde, que $B - A \neq 0 \neq A - B$; dans ce cas, en vertu de la transitivité de $\to$ dans $2^{\Gamma} - \{0\}$, on obtient

$$A \to Y, \tag{33}$$
$$B \to X. \tag{34}$$

B étant l'enveloppe de Y, on déduit de (33) que

$$A \subseteq B; \tag{35}$$

A étant l'enveloppe de X, on déduit de (34) que

$$B \subseteq A. \tag{36}$$

De (35) et (36) il s'ensuit $A = B$, contrairement à la supposition que $B - A \neq 0 \neq A - B$, donc une au moins de ces deux différences est vide. On a $B \subseteq A$ si $B - A = 0$; on a $A \subseteq B$ si $A - B = 0$. Le théorème 8 est ainsi démontré.

26. Quelques exemples d'enveloppes tirés du roumain

Pour illustrer la notion d'enveloppe, nous allons considérer le cas suivant, qui se présente en roumain. Soient $X = S$(*subţire*), $Y = S$(*vechi*). Les ensembles X et Y ne sont pas initiaux, car on a *mic* $\to Y$, *mic* $\to X$, *mic* $\notin X$ et *mic* $\notin Y$. Déterminons les enveloppes des ensembles X et Y. L'enveloppe A de X est S(*mic*) $\cup$ S(*subţire*) $\cup$ S(*frumoasă*), car, parmi les douze familles d'adjectifs qualificatifs sans article, seules S(*mic*), S(*frumoasă*) et S(*subţire*) dominent la famille S(*subţire*). L'enveloppe B de Y s'obtient par réunion des familles qui dominent l'ensemble Y. On obtient

$B = S$ (*mic*) $\cup$ S(*frumoşi*) $\cup$ S (*înalte*) $\cup$ S (*vechi*) $\cup$ S (*dibaci*) $\cup$ S (*subţiri*) $\cup$ $\cup$ S(*june*). On obtient
$\mathscr{G}(A) = S$ (*mic*) $\cup$ S (*subţire*) $\cup$ S (*frumoasă*) $\cup$ S (*precoce*) $\cup$ S (*maro*),
$\mathscr{G}(B) = S$ (*mic*) $\cup$ S (*frumoşi*) $\cup$ S (*înalte*) $\cup$ S (*vechi*) $\cup$ S (*dibaci*) $\cup$ S (*subţiri*) $\cup$ S (*june*) $\cup$ S (*maro*).

$\mathscr{G}(A)$ est la c. g. induite par X, tandis que $\mathscr{G}(B)$ est la c. g. induite par Y.

27. Catégorie grammaticale normale. Couverture. Interprétation topologique

Un ensemble de mots est, par définition, *normal*, s'il est une réunion de familles. Une c. g. qui peut être engendrée par un ensemble initial normal est, par définition, une c. g. *normale*.

Soit A un ensemble de mots. Posons

$$\overline{A} = \bigcup_{x \in A} S(x) .$$

Par définition, l'ensemble $\overline{A}$ est la *couverture* de A.

Il est aisé de voir que, si A est initial, alors $\overline{A}$ est un ensemble initial normal.

Remarques. La notion de couverture d'un ensemble a une interprétation topologique. La couverture $\overline{A}$ de A est justement la fermeture topologique de A, dans la topologie dont les ensembles ouverts sont, par définition, les réunions de familles. Γ devient ainsi un espace topologique non séparé, chaque fois qu'il existe au moins une famille ne se réduisant pas à un seul élément.

La topologie ainsi obtenue présente la particularité suivante : non seulement une intersection finie, mais toute intersection d'ensembles ouverts est encore un ensemble ouvert. Une telle topologie est, par définition, une topologie totale [13], [14], [33].

Comme illustration de la notion de couverture, considérons l'exemple suivant tiré du français. Soit $A = \{$ *beau*, *mince* $\}$. On a $\overline{A} = S(\textit{beau}) \cup S(\textit{mince})$.

28. Structure de la couverture d'un produit saturé

Soit A un ensemble initial. Désignons par $(\overline{A})_1$ le produit saturé de la couverture de A ; désignons par $(\overline{A_1})$ la couverture du produit saturé de A. On a la

PROPOSITION 22. *On a*

$$(\overline{A})_1 = (\overline{A_1}) .$$

Démonstration. Nous allons procéder par étapes.

1) Montrons que $(\overline{A_1}) = A_1$. En effet, pour tout ensemble A le produit saturé de A est un ensemble normal, tandis qu'un ensemble normal coïncide, évidemment, avec sa propre couverture.

2) Montrons que $(\overline{A})_1 \subseteq (\overline{A_1})$. En effet, si $x \in (\overline{A})_1$, alors $\overline{A} \rightarrow x$, donc, en vertu de la proposition 1, on a $A \rightarrow x$, ce qui revient à $x \in A_1$; donc $x \in (\overline{A_1})$.

3) Montrons que $A_1 \subseteq (\overline{A})_1$. En effet, du fait que $x \in A_1$ on déduit que $A \rightarrow x$. D'autre part, pour $y \in \overline{A}$ il existe une famille F telle que $F \cap A = 0$ et $y \in F$. Soit $z \in F \cap A$. On a $z \rightarrow x$ et $y \rightarrow z$, donc, en vertu de la transitivité de la relation $\rightarrow$, on déduit $y \rightarrow x$, donc $\overline{A} \rightarrow x$, ce qui revient à $x \in (\overline{A})_1$.

Les résultats obtenus en 1), 2) et 3) conduisent immédiatement à la proposition 22.

Remarque. En vertu de la proposition 22, on peut adopter la notation unique $\overline{A_1} = (\bar{A})_1 = (\overline{\bar{A}_1})$.

29. Structure des catégories grammaticales normales

LEMME 4. *Quel que soit l'ensemble initial A, on a $\mathscr{G}(A) \subseteq \mathscr{G}(\bar{A})$.*

Démonstration. On a, évidemment, $A \subseteq \bar{A}$; il reste donc à démontrer que $A_1 \subseteq \bar{A} \cup \overline{A_1}$. Soit $x \in A_1$. En vertu de la proposition 22, on peut interpréter $\overline{A_1}$ comme $(\overline{\bar{A}_1})$, donc

$$A_1 \subseteq (\overline{\bar{A}_1}) \subseteq \bar{A} \cup \bar{A}_1 \, .$$

Le lemme 4 est ainsi démontré.

Remarque. Il y a des cas où l'inclusion affirmée par le lemme 4 est stricte. On a la proposition suivante :

Il existe un ensemble initial A tel que $\mathscr{G}(A) \neq \mathscr{G}(\bar{A})$.

En effet, $\bar{A}$ est une réunion de familles, donc $\mathscr{G}(\bar{A})$ est une c. g. normale. D'autre part, en vertu du théorème 9 ci-dessous, $\mathscr{G}(\bar{A})$ est une c. g. normale si et seulement si $\mathscr{G}(A)$ est un ensemble normal. Il suffit donc de choisir l'ensemble A tel que $\mathscr{G}(A)$ ne soit pas un ensemble normal. On aura, dans ce cas,

$$\mathscr{G}(A) \neq \mathscr{G}(\bar{A}) \, .$$

Illustration linguistique tirée du roumain : Soit $A = \{$*frumos*$\} \cup \{$*frumoasă*$\}$. A est un ensemble initial, tandis que $\mathscr{G}(A)$ n'est pas un ensemble normal, car l'intersection $\mathscr{G}(A) \cup S$ (*frumos*) contient seulement le mot *frumos*. On a donc ici $\mathscr{G}(A) \subset \mathscr{G}(\bar{A})$.

THÉORÈME 9. *Une catégorie grammaticale $\mathscr{G}$ est normale si et seulement si $\mathscr{G}$ est un ensemble normal. Si $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}$, alors $\mathscr{G}(\bar{A}) = \mathscr{G}$.*

Démonstration. Soit $\mathscr{G}$ une c. g. normale. Il existe donc un ensemble initial normal A tel que $\mathscr{G} = A \cup A_1$. L'ensemble A_1, comme produit saturé de A, est un ensemble normal. La réunion de deux ensembles normaux est encore un ensemble normal, donc $\mathscr{G}$ est un ensemble normal.

Réciproquement, soit $\mathscr{G}$ une c. g. qui est un ensemble normal. On a donc, pour $x \in \mathscr{G}$, $S(x) \subseteq \mathscr{G}$. Soit A un ensemble initial tel que $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}$. On a $\mathscr{G} = A \cup A_1$. Si nous arrivons à montrer que

$$A \cup A_1 = \bar{A} \cup \overline{A_1} \, ,$$

alors le théorème 9 sera démontré, car on aura $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(\bar{A})$, tandis que

$\mathscr{G}(\overline{A})$ est évidemment une c. g. normale. En vertu du lemme 4, il ne reste plus à établir que l'inclusion

$$\overline{A} \cup \overline{A_1} \subseteq A \cup A_1 \,. \tag{37}$$

En vertu de l'étape 1) de la démonstration de la proposition 22, on a $(\overline{A_1}) = A_1$; il reste donc à démontrer que $\overline{A} \subseteq A \cup A_1$. Soit, pour cela, $x \in \overline{A}$. Par la définition même de la couverture, il existe un $y \in A$ tel que $x \in S(y)$. Mais, par hypothèse, $A \cup A_1$ est un ensemble normal, donc il contient, avec y, la famille $S(y)$; il s'ensuit que $x \in A \cup A_1$ et l'inclusion (37) est ainsi démontrée.

Le théorème 9 est établi.

30. Structure de certaines classes d'ensembles initiaux équivalents

Proposition 23. *Si A est un ensemble initial normal et si B est un ensemble initial ρ-équivalent à A, alors $B - B_1$ est un ensemble normal et on a $\overline{B}\rho B$.*

Démonstration. B_1, comme tout produit saturé, est un ensemble normal. Du fait que A est normal, on déduit que $\mathscr{G}(A)$ est une c. g. normale. Puisque $B \cup B_1 = A \cup A_1 = \mathscr{G}(A)$ et en tenant compte du fait que la différence de deux ensembles normaux est aussi un ensemble normal, il s'ensuit que $B - B_1$ est un ensemble normal. En vertu du théorème 9, on déduit que $B\rho\overline{B}$.

Proposition 24. *Si A est une famille initiale et si B est un ensemble initial ρ-équivalent à A, alors $A \subseteq B$.*

Démonstration. Du fait que A est une famille, on déduit que $A \subseteq A_1$, donc $\mathscr{G}(A) = A_1$. Nous avons donc $B \cup B_1 = A_1$, ce qui implique $B \subseteq A_1$, c'est-à-dire $A \rightarrow B$. Mais, B étant initial, on doit avoir $A \subseteq B$.

Remarque. De la proposition 24 on déduit qu'une classe de ρ-équivalence contient une famille au plus.

Un ensemble A sera, par définition, *héréditairement initial* si toute partie non vide de A est un ensemble initial ; autrement dit, A est héréditairement initial si tout mot de A est un ensemble initial.

Une illustration de la notion d'ensemble héréditairement initial est donnée par l'ensemble suivant de mots français : { *je*, *lui*, *ne* }.

Proposition 25. *Si A est héréditairement initial et si B est un ensemble initial ρ-équivalent à A, alors $A \subseteq B$.*

Démonstration. En vertu de la proposition 18, on a $A \cap B \rightarrow A \triangle B$, donc, de la proposition 1, on déduit $A \cap B \rightarrow A - B$. Mais $(A - B) \cap (A \cap B) = 0$, donc, s'il existait $x \in A - B$, alors l'ensemble $\{ x \}$ ne serait pas initial. Cela contredit l'hypothèse selon laquelle A est héréditairement initial. Donc $A - B = 0$ et la proposition 25 est démontrée.

COROLLAIRE 5. *Une classe de ρ-équivalence ne peut pas contenir deux ensembles distincts, héréditairement initiaux.*

Un ensemble initial A est, par définition, *autoproductif* si $A \subseteq A_1$.

PROPOSITION 26. *L'ensemble initial A est autoproductif si et seulement si A est une famille initiale.*

Démonstration. Si A est une famille, alors $A \to A$, donc A est autoproductif. Si $A \subseteq A_1$, alors, en vertu de la proposition 1, on a $A \to A$, donc, du fait que A est initial, on déduit que A est une famille.

Des propositions 24 et 26 on déduit immédiatement la

PROPOSITION 27. *Si A est initial et autoproductif, alors il n'existe aucun ensemble initial B tel que $B\rho A$ et $A - B = 0$.*

31. Opérations sur les ensembles initiaux équivalents

THÉORÈME 10. *Si A et B sont deux ensembles initiaux, alors $A \cup B$ est aussi un ensemble initial et*

$$\mathcal{G}(A \cup B) = \left[\mathcal{G}(A) \cap \mathcal{G}(B)\right] \cup [A \cup B]\,.$$

Démonstration. Désignons par D le deuxième membre de l'égalité. Soit $x \in \mathcal{G}(A \cup B)$. Si $x \in A \cup B$, alors on a, évidemment, $x \in D$. Si $x \in (A \cup B)_1$, alors, en vertu de l'égalité $(A \cup B)_1 = A_1 \cap B_1$, on déduit que $x \in \mathcal{G}(A) \cap \mathcal{G}(B)$, donc $x \in D$ et $\mathcal{G}(A \cup B) \subseteq D$.

Soit maintenant $y \in D$. Si $y \in A \cup B$, alors, évidemment, $y \in \mathcal{G}(A \cup B)$. Si $y \in \mathcal{G}(A) \cap \mathcal{G}(B)$, alors, en vertu de l'égalité

$$\mathcal{G}(A) \cap \mathcal{G}(B) = (A \cap B) \cup (A_1 \cap B) \cup (A \cap B_1) \cup (A_1 \cap B_1)\,,$$

on a à distinguer les quatre cas suivants :

1) $y \in A \cap B$; dans ce cas on a $y \in A \cup B$, donc $y \in \mathcal{G}(A \cup B)$;
2) $y \in A_1 \cap B$; on a $y \in B$, donc $y \in A \cup B$, et $y \in \mathcal{G}(A \cup B)$;
3) $y \in A \cap B_1$; on a $y \in A \cup B$, donc $y \in \mathcal{G}(A \cup B)$;
4) $y \in A_1 \cap B_1$;

en vertu de l'égalité $A_1 \cap B_1 = (A \cup B)_1$ il s'ensuit que $y \in (A \cup B)_1$, donc on a de nouveau $y \in \mathcal{G}(A \cup B)$. On a démontré ainsi que $D \subseteq \mathcal{G}(A \cup B)$ et le théorème 10 est établi.

THÉORÈME 11. *Si A et B sont deux ensembles initiaux ρ-équivalents, alors* 1) *$A \cup B$ est ρ-équivalent à A et à B* ; 2) *$A \cap B$ est un ensemble initial* ; 3) *$\mathcal{G}(A) \subseteq \mathcal{G}(A \cap B)$.*

Démonstration. Si, dans le théorème 10, on suppose, en outre, que $A\rho B$, donc que $\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B)$, alors en vertu des inclusions $A \subseteq \mathscr{G}(A)$ et $B \subseteq \mathscr{G}(B)$, on obtient l'égalité

$$\mathscr{G}(A \cup B) = [\mathscr{G}(A) \cap \mathscr{G}(A)] \cup (A \cup B) = \mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(B)$$

et le point 1) est établi.

Pour établir le point 2), supposons, pour raisonner par l'absurde, qu'il existe un mot $x \notin A \cap B$, tel que $x \to A \cap B$. On peut admettre que

$$A - B \neq 0 \neq B - A\,,$$

car dans le cas contraire on aurait $A \cap B = A$ ou $A \cap B = B$ et l'affirmation 2) serait évidente. Mais alors, en vertu du théorème 1, il existe une famille F telle que $A \cap B \to F \supseteq A \triangle B$. Du corollaire 1, on déduit que $A \cap B \neq 0$. La transitivité de la relation $\to$ dans $2^{\Gamma} - \{0\}$ entraîne que $x \to F$. En utilisant la proposition 6, on montre que $x \to A \triangle B$. De cette relation et du fait que $x \to A \cap B$ on déduit, en vertu de la proposition 3, que $x \to A \cup B$. Mais on a $x \notin A \cap B$, donc on a l'une au moins des relations $x \notin A$ et $x \notin B$. Si $x \notin A$, il en résulte alors que A n'est pas initial ; si $x \notin B$, il en résulte que B n'est pas initial. Chacune de ces deux conclusions est contraire à l'hypothèse, donc $A \cap B$ est un ensemble initial.

Pour établir le point 3), remarquons d'abord que le seul cas intéressant est celui où $A - B \neq 0 \neq B - A$. Nous allons utiliser le théorème 4. On a $A - (A \cap B) \neq 0$ et, en vertu du théorème 1, on a aussi $A \cap B \to A - (A \cap B)$. Il s'ensuit que toutes les hypothèses du théorème 4 sont remplies et on a donc $\mathscr{G}(A) \subseteq \mathscr{G}(A \cap B)$.

Remarques. Il y a encore deux méthodes pour établir le point 3) du théorème 11. Il y a d'abord la méthode directe, qui revient à montrer qu'un mot quelconque de $\mathscr{G}(A)$ appartient à $\mathscr{G}(A \cap B)$. La deuxième méthode utilise, d'une part, le fait que, dans le cas $A - B \neq 0 \neq B - A$, on a

$$(A \cap B) \cup (A \cap B)_1 = (A \cup B) \cup (A \cap B)_1$$

(égalité qui résulte du théorème 3) et, d'autre part, le fait que, pour $X \subseteq Y$, on a l'inclusion $Y_1 \subseteq X_1$. En vertu de ces remarques et en tenant compte du point 1) du théorème 11, on obtient :

$$\mathscr{G}(A) = \mathscr{G}(A \cup B) = (A \cup B) \cup (A \cup B)_1 \subseteq (A \cup B) \cup (A \cap B)_1 =$$
$$= (A \cap B) \cup (A \cap B)_1 = \mathscr{G}(A \cap B)\,.$$

Il est naturel de se demander si l'inclusion posée par le point 3) du théorème 11 peut être aussi une inclusion stricte. La réponse est affirmative ; on a, en effet, le

THÉORÈME 12. *Il existe deux ensembles initiaux ρ-équivalents A et B, tels que* $\mathscr{G}(A \cap B) \neq \mathscr{G}(B)$.

Démonstration. Soient $\Gamma = \{ a, b, c, d, e, f \}$, $\Phi = \{ ebf, ecf, bef, eaf, edf, cef, efd, efb, efc \}$, $A = \{ a, b \}$, $B = \{ a, c \}$. Il est aisé de voir que A et B sont des ensembles initiaux ; en effet, l'ensemble $\{ a \}$ est initial et on a $\{ a \} \subseteq A \cap B$. On a $A_1 = \{ b, c \}$, $B_1 = \{ b, c \}$, donc $\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}(B) = \{ a, b, c \}$. D'autre part, $A \cap B = \{ a \}$ et $\mathcal{G}(\{ a \}) = \{ a, b, c, d \}$, donc $\mathcal{G}(A \cap B) \neq \mathcal{G}(B)$. Le théorème 12 est démontré.

Remarque. L'exemple suivant tiré du roumain est une illustration du théorème 12. Soient $A = S\,(frumos) \cup \{ cumsecade \}$, $B = S\,(frumos) \cup \{ maro \}$. Les ensembles A et B sont initiaux et on a $\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}(B) = S\,(frumos) \cup \cup\, S\,(maro)$. Mais $A \cap B = S\,(frumos)$, donc $\mathcal{G}(A \cap B) \neq \mathcal{G}(A)$, car *subțire* $\in \in \mathcal{G}(A \cap B) - \mathcal{G}(A)$.

Par induction complète, on obtient le

Corollaire 6. *Si $A', A'', \ldots, A^{(n)}$ sont des ensembles initiaux ρ-équivalents deux à deux, alors*

$$A = \bigcup_{p=1}^{n} A^{(p)} \qquad et \qquad B = \bigcap_{p=1}^{n} A^{(p)}$$

sont des ensembles initiaux ; A est ρ-équivalent à $A^{(p)}$ $(p = 1,2, \ldots, n)$.

Maintenant, on obtient immédiatement le

Corollaire 7. *Les ensembles initiaux qui engendrent la même catégorie grammaticale forment un demi-groupe par rapport à l'opération de réunion.*

32. Catégorie grammaticale engendrée par une catégorie grammaticale

A sera, par définition, un ensemble initial *minimal* (resp. *maximal*) par rapport à la c. g. $\mathcal{G}$ si, pour tout ensemble initial B tel que $\mathcal{G} = \mathcal{G}(B)$, on a $A \subseteq B$ (resp. $B \subseteq A$). Un ensemble initial qui est minimal ou maximal par rapport à la c. g. $\mathcal{G}$ sera, par définition, un *ensemble initial extrémal par rapport à* $\mathcal{G}$.

Du fait que $A \subseteq \mathcal{G}(A)$, on déduit que toute c. g. est un ensemble initial, donc il engendre, à son tour, une c. g., que nous désignons par $\mathcal{G}(\mathcal{G}(A))$. On a le

Théorème 13. $\mathcal{G}(\mathcal{G}(A)) = \mathcal{G}(A)$.

Démonstration. On a à montrer que

$$A \cup A_1 = (A \cup A_1) \cup (A \cup A_1)_1\,, \tag{38}$$

ce qui revient à l'inclusion $(A \cup A_1)_1 \subseteq A \cup A_1$. Soit, pour cela, $x \in (A \cup A_1)_1$. On a donc $A \cup A_1 \to x$ et, en vertu de la proposition 1, $A \to x$, c'est-à-dire $x \in A_1$. L'inclusion (38) est ainsi établie et le théorème 13 est démontré.

Corollaire 8. *Si A est un ensemble initial, alors $\mathcal{G}(A)$ est l'ensemble initial maximal par rapport à $\mathcal{G}(A)$.*

33. Ensembles involutifs

Un ensemble initial A est, par définition, involutif, si $A_1 \subseteq A$.

PROPOSITION 28. *Si A est involutif et si $B \rho A$ ($B \neq A$), alors $B \subseteq A$ et B n'est pas un ensemble involutif.*

Démonstration. Du fait que $A_1 \subseteq A$ et $B \rho A$, on déduit que $A = B \cup B_1$, donc $B \subseteq A$. Si l'on avait $B_1 \subseteq B$, alors on aurait aussi $A = B$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse ; donc B n'est pas involutif.

Remarque. Il est aisé de voir qu'un ensemble initial A est involutif si et seulement si $A = \mathcal{G}(A)$. *Donc la notion d'ensemble initial involutif coïncide avec la notion de catégorie grammaticale* (voir, en ce sens, le théorème 13).

THÉORÈME 14. *La réunion de deux ensembles initiaux involutifs A et B est aussi un ensemble involutif.*

Démonstration. En vertu de la proposition 9, $A \cup B$ est un ensemble initial. On a $(A \cup B)_1 = A_1 \cap B_1$. Mais, par hypothèse, $A_1 \subseteq A$ et $B_1 \subseteq B$, donc $A_1 \cap B_1 \subseteq A \cap B$ et $(A \cup B)_1 \subseteq A \cap B$. Du fait que $A \cap B \subseteq A \cup B$ il s'ensuit alors que $(A \cup B)_1 \subseteq A \cup B$ et le théorème 14 est établi.

Remarque. En vertu de la remarque faite après la proposition 28, le théorème 14 peut être énoncé aussi sous la forme suivante :

THÉORÈME 14′. *La réunion de deux catégories grammaticales est encore une catégorie grammaticale.*

L'opération d'intersection ne conserve pas la qualité d'être une c. g., mais a une signification linguistique intéressante, liée à l'homonymie morphologique. Voir, à ce propos, le paragraphe 10.

34. Une classification des catégories grammaticales

On peut maintenant classer les c. g. de la façon suivante. On a d'abord deux grandes classes de c. g. : productives et non productives. Une c. g. est dite *productive* si elle peut être engendrée par un ensemble initial productif, c'est-à-dire par un ensemble initial dont le produit saturé n'est pas vide. Dans le cas contraire, une c. g. est non productive. La situation des c. g. non productives est élucidée par la

PROPOSITION 29. *Si $\mathcal{G}$ est une c. g. non productive et si A est un ensemble initial tel que $\mathcal{G} = \mathcal{G}(A)$, alors $A = \mathcal{G}$.*

Démonstration. On a, par hypothèse, $A \cup A_1 = \mathcal{G}$. Si on avait $A \subset \mathcal{G}$, alors A_1 ne serait pas vide, donc A serait productif, contrairement à l'hypothèse que $\mathscr{G}$ est non productive.

Convenons de dire qu'un ensemble initial qui engendre une c. g. est un *générateur* de cette c. g. La proposition 29 affirme donc que toute c. g. non productive est une c. g. ayant un seul générateur.

Les c. g. productives se classent en deux classes ; il y a d'abord celles qui sont engendrées par un seul ensemble initial, puis celles engendrées par au moins deux ensembles initiaux. Les premières sont donc des c. g. productives, ayant un seul générateur, tandis que les autres sont des c. g. productives ayant plusieurs générateurs.

On a aussi une autre classification des c. g. : en *normales* et *non normales*. Comme cas particulier important des c. g. normales on a les c. g. élémentaires. Un autre cas particulier important de c. g. normale est celui des c. g. engendrées par des enveloppes.

On a donc le schéma suivant, qui résume les classifications ci-dessus :

Catégories grammaticales
- non productives (possèdent un seul générateur)
- productives
  - avec un seul générateur (qui coïncide avec la c. g. envisagée) ;
  - avec plusieurs générateurs.

Catégories grammaticales
- normales
  - élémentaires
  - non élémentaires
- non normales.

Il est à remarquer qu'en vertu du théorème 14′, toute réunion de c. g. normales élémentaires est une c. g. normale (non élémentaire). Les c. g. normales non élémentaires interviennent d'une façon naturelle dans la description formelle des catégories morphologiques traditionnelles. Une illustration de ce fait a été donnée au paragraphe 9.

La classification des c. g. en normales et non normales est indépendante de la classification des c. g. en productives et non productives. On a les types possibles suivants de c. g. : 1) normales et non productives, 2) non normales et non productives, 3) normales et ayant un seul générateur productif ($= \mathscr{G}$), 4) non normales et ayant un seul générateur productif ($= \mathscr{G}$), 5) normales et ayant un générateur productif $\neq \mathscr{G}$, 6) non normales et ayant un générateur productif $\neq \mathscr{G}$.

35. Possibilité logique des différents types de catégories grammaticales

THÉORÈME 15. *Il existe une catégorie grammaticale productive, normale et avec un seul générateur.*

Démonstration. Soit $\Gamma = \{ a, b, c \}$, $\Phi = \{ abc, acc, aac \}$, $A = \{ a, b \}$. A est un ensemble initial et on a $A_1 = \{ a \}$, donc $\mathscr{G}(A) = \{ a, b \}$. On a $S(a) = \{ a \}$, $S(b) = \{ b \}$, donc $\mathscr{G}(A)$ est normale. Du fait que $A_1 \neq 0$ on déduit que $\mathscr{G}(A)$ est productive. Il y a un seul ensemble strictement contenu dans $\mathscr{G}(A)$, qui soit un ensemble initial ; c'est l'ensemble $\{ b \}$. Mais on a $\mathscr{G}(\{ b \}) = \{ a, b, c \}$, donc $\mathscr{G}(\{ b \}) \rightarrow \mathscr{G}(A)$. Il s'ensuit que $\mathscr{G}(A)$ n'admet aucun générateur autre que A. Le théorème 15 est ainsi démontré.

THÉORÈME 16. *Il existe une catégorie grammaticale productive, normale et ayant au moins deux générateurs.*

Démonstration. Soit $\Gamma = \{ a, b, c \}$, $\Phi = \{ abc, acc, aac \}$, $A = \{ b \}$. A est un ensemble initial et on a $\mathscr{G}(A) = \Gamma$. Mais on a aussi $\mathscr{G}(\Gamma) = \mathscr{G}(A)$, donc $\mathscr{G}(A)$ admet plus d'un générateur.

D'autre part, $\mathscr{G}(A)$ est productive, car A est productif ; $\mathscr{G}(A)$ est donc une c. g. normale, puisque Γ est un ensemble normal. Le théorème 16 est ainsi établi.

THÉORÈME 17. *Il existe une catégorie grammaticale normale et non productive.*

Démonstration. Soient : $\Gamma = \{ a, b, c \}$, $\Phi = \{ abc, aca, aac \}$, $A = \{ a, c \}$. A est un ensemble initial et on a $A = S(a) \cup S(c)$, donc A est normal, ce qui entraîne que $\mathscr{G}(A)$ est une c. g. normale. En tenant compte du fait que $A_1 = 0$, on obtient $\mathscr{G}(A) = \{ a, c \}$. Les seuls ensembles initiaux contenus dans $\mathscr{G}(A)$ sont A et $\{ c \}$. Mais A est non productif, tandis que $\mathscr{G}(\{ c \}) = \{ c \} \neq \mathscr{G}(A)$, donc il n'existe aucun ensemble initial productif B, tel que $\mathscr{G}(B) = \mathscr{G}(A)$. Il s'ensuit que $\mathscr{G}(A)$ est non productive et le théorème 17 est établi.

THÉORÈME 18. *Il existe une catégorie grammaticale non normale, productive et ayant un seul générateur.*

Démonstration. Soient $\Gamma = \{ a, b, c, d, e, f, g, h \}$, $\Phi = \{ ag, bg, hd, he, cg, hc, fg, hf, cc \}$, $A = \{ a, c, d \}$. Il est aisé de voir que A est un ensemble initial et qu'on a $S(a) = \{ a, b \}$, $S(d) = \{ d, e \}$, $S(c) = \{ c \}$, donc A n'est pas un ensemble initial normal. D'autre part, on a $A_1 = \{ c \}$, donc A est productif et $\mathscr{G}(A) = A$. Il s'ensuit que A est une c. g. productive et, en vertu du théorème 9, cette c. g. n'est pas normale.

Nous allons montrer maintenant que A est l'unique générateur de $\mathscr{G}(A)$. En effet, le seul ensemble initial strictement contenu dans $\mathscr{G}(A)$ est $\{ a, d \}$; mais on a $\mathscr{G}(\{ a, d \}) = \{ a, c, d, f \}$, donc $\mathscr{G}(\{ a, d \}) \neq \mathscr{G}(A)$. Le théorème 18 est ainsi établi.

THÉORÈME 19. *Il existe une catégorie grammaticale non normale, productive et ayant au moins deux générateurs.*

Démonstration. Soient $\Gamma = \{ a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m \}$, $\Phi = \{ gaf, gbf, hck, hdk, gef, hek, elm \}$, $A = \{ a, c, e \}$. Il est aisé de voir que A est initial et que $A_1 = \{ e \}$, donc A est productif ; il s'ensuit que $\mathcal{G}(A)$ est une c. g. productive et on a $\mathcal{G}(A) = \{ a, c, e \}$. D'autre part, $\mathcal{G}(A)$ n'est pas un ensemble normal, car $S(a) = \{ a, b \}$ et $b \notin \mathcal{G}(A)$. On en déduit, en vertu du théorème 9, que $\mathcal{G}(A)$ n'est pas une c. g. normale.

Remarquons enfin que l'ensemble $B = \{ a, c \}$ est initial et que $B_1 = \{ e \}$, donc $\mathcal{G}(B) = \mathcal{G}(A)$; il s'ensuit que $\mathcal{G}(A)$ admet un générateur autre que A. Le théorème 19 est ainsi complètement démontré.

THÉORÈME 20. *Il existe une catégorie grammaticale non normale et non productive.*

Démonstration. Soient $\Gamma = \{ a, b, c, d, e \}$, $\Phi = \{ abc, adc, ebc, edc \}$, $A = \{ a, b, c \}$. Il est aisé de voir que A est un ensemble initial et non productif. On a $\mathcal{G}(A) = A$ et $\mathcal{G}(A)$ n'est pas un ensemble normal, car $S(a) = \{ a, e \}$. En vertu du théorème 9, on déduit que $\mathcal{G}(A)$ est une c. g. non normale.

D'autre part, les seuls ensembles initiaux contenus dans $\mathcal{G}(A)$ sont $\{ c \}$, $\{ a, b \}$, $\{ b, c \}$ et $\{ a, c \}$. On constate que

$$\mathcal{G}(\{ c \}) \neq \mathcal{G}(A),\ \mathcal{G}(\{ a, b \}) \neq \mathcal{G}(A),\ \mathcal{G}(\{ b, c \}) \neq \mathcal{G}(A) \text{ et } \mathcal{G}(\{ a, c \}) \neq \mathcal{G}(A).$$

Il s'ensuit qu'il n'existe aucun ensemble initial productif B, tel que $\mathcal{G}(B) = \mathcal{G}(A)$; donc $\mathcal{G}(A)$ est une c. g. non productive et le théorème 20 est établi.

36. Illustration des divers types de catégories grammaticales

Soient : Γ = le lexique du français, Φ = l'ensemble des phrases françaises correctement construites.

Considérons d'abord le pronom *je*. L'ensemble $\{ je \}$ est une famille initiale et on a $\mathcal{G}(\{ je \}) = \{ je \}$. Cette c. g. est productive, normale et admet un seul générateur.

La famille S (*beau*) est initiale. La c. g. $\mathcal{G}(S\,(beau))$ est normale, productive (on a $S\,(beau) \to S\,(beau)$) et admet un générateur autre que S (*beau*), à savoir $\mathcal{G}(S\,(beau))$.

L'ensemble $A = S\,(maison) \cup S\,(chantais)$ est initial, normal et non productif. $\mathcal{G}(A)$ est une c. g. normale, mais non productive, car on a $\mathcal{G}(A) = A$, tandis que A est l'unique générateur de $\mathcal{G}(A)$.

L'ensemble $B = \{ maison, chantais \}$ est initial, non normal et non productif, donc $\mathcal{G}(B) = B$; $\mathcal{G}(B)$ est non productive, car B est son unique générateur. Mais B n'est pas un ensemble normal, donc $\mathcal{G}(B)$ n'est pas une c. g. normale.

Soient maintenant : Γ = le lexique du roumain, Φ = l'ensemble des phrases roumaines correctement construites. Considérons l'ensemble $A = \{ frumoşi \} \cup \cup\, S\,(subţire) \cup S\,(maro)$. On a $A \to S\,(maro)$, donc A est productif ; il s'ensuit que $\mathcal{G}(A)$ est productive et on a $\mathcal{G}(A) = A$. L'ensemble $\mathcal{G}(A)$ n'est donc pas normal. On en déduit, en vertu du théorème 9, que $\mathcal{G}(A)$ n'est pas une c. g.

normale. On remarque, enfin, que $\mathscr{G}(A)$ admet deux générateurs autres que A ; par exemple, l'ensemble $\{$ *frumoşi* $\} \cup S$ (*subţire*) est un générateur de $\mathscr{G}(A)$, car on a *frumoşi* $\to$ *maro* et S (*subţire*) $\to$ *maro*.

37. Quasi-catégories grammaticales

R. L. Dobrušin a introduit dans [8] la généralisation suivante de la notion de famille initiale (notre terminologie est différente de la sienne) : Une famille F est *quasi initiale* si l'on a un des deux cas suivants :

1) F est une famille initiale ;
2) il existe une phrase repérée de la forme $f_1 xf_2$, telle que $x \in F$ et telle encore que, pour toute famille F^* jouissant de la propriété $F^* \to F\,(F^* \cap F = 0)$ et pour tout $y \in F^*$ la phrase $f_1\, yf_2$ ne soit pas repérée.

Toute famille initiale est aussi une famille quasi initiale ; mais la réciproque n'est pas vraie.

Soit F une famille quasi initiale. Posons, comme d'habitude, $F_1 = \{\, u\,;\; v \to u$ quel que soit $v \in F \}$. L'ensemble $F \cup F_1$ est, par définition, la *quasi-catégorie grammaticale élémentaire* engendrée par F (ou la q. c. g. é. engendrée par F).

Comme exemple de famille quasi initiale qui n'est pas initiale, Dobrušin propose dans [8] la famille des mots russes это et то. En désignant par S la famille des mots красное, зеленое, широкое, ..., on constate que $S \to F$, tandis que S est la seule famille qui domine F. Soit maintenant la phrase marquée это шел человек. En remplaçant le mot это par un mot quelconque de S — par exemple par красное — alors on obtient la phrase красное шел человек, qui n'est plus marquée, car красное, étant adjectif, ne peut pas être juxtaposé à шел, qui est verbe. On déduit que F est une famille quasi initiale, sans être initiale ; donc F engendre une quasi-catégorie grammaticale élémentaire qui n'est pas une c. g. é.

L'exemple ci-dessus est un aspect du

THÉORÈME 21. *Soient F^* et F deux familles distinctes, telles que $F^* \to F$. Si F^* est la seule famille qui domine F, alors F est une famille quasi initiale.*

Démonstration. Supposons, par réduction à l'absurde, que F n'est pas quasi initiale. Dans ce cas, pour toute phrase marquée $f = f_1\, xf_2$, où $x \in F$, il existe une famille F_f telle que, pour $y \in F_f$, la phrase $f_1\, yf_2$ soit encore marquée. Mais, comme F^* est la seule famille qui domine F, on en déduit que $F_f = F^*$, quelle que soit la phrase marquée f contenant un mot $x \in F$. Il s'ensuit que $F \to F^*$. Mais on a, par hypothèse, $F^* \to F$; donc $F = F^*$, ce qui contredit le fait que F et F^* sont distinctes. Il en résulte que F est quasi initiale.

38. Ensembles quasi initiaux et quasi-catégories grammaticales. Résultats de Crăciun

Un ensemble $A \subseteq \Gamma$ est quasi initial s'il est initial ou bien si pour tout $x \in A$ il existe un contexte (f_1, f_2) tel que $f_1\, xf_2$ soit repérée, mais pour tout $y \notin A$, tel que $y \to A$, la phrase $f_1\, yf_2$ n'est pas repérée. Soient : A = un ensemble quasi initial et A_1 = le produit saturé de A. Par définition, la réunion $A \cup A_1$ est une *quasi-catégorie grammaticale* (q. c. g) ; c'est la q. c. g engendrée par A. Dans [5] Crăciun démontre que la réunion de deux ensembles quasi initiaux est aussi un ensemble quasi initial, tandis que toute q. c. g. est encore un ensemble quasi initial. Une étude des q. c. g. a été développée dans [5].

Désignons : par P, la classe des ensembles initiaux ; par Q, la classe des ensembles quasi initiaux qui ne sont pas initiaux ; par R, la classe des ensembles quasi-initiaux. On a donc $R = P \cup Q$ et $P \cap Q = 0$. Voici quelques résultats établis dans [5] :

a) Si $A \notin Q$ et $B \notin Q$, alors $A \cup B \notin Q$;

b) Si $A \in Q$ et $B \in Q$, alors $A \cup B \in Q$;

c) Si $A \in R$ et $B \supset A$, alors $B \in R$.

Désignons : par $\mathscr{F}_1$. la famille des c. g. é ; par $\mathscr{F}_2$, la famille des c. g. ; par $\mathscr{F}_3$, la famille des q. c. g. é. ; par $\mathscr{F}_4$, la famille des q. c. g. On a :

$$\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2 \subset \mathscr{F}_4, \quad \mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_3 \subset \mathscr{F}_4\ [5]\,.$$

39. Catégories grammaticales formées par des phrases. Langages à nombre d'états fini

La relation de domination peut être définie non seulement entre deux mots ou deux ensembles de mots, mais aussi entre deux phrases respectivement deux ensembles de phrases. En effet, si f et g sont deux phrases, alors en désignant toujours par Φ l'ensemble des phrases repérées, on dira que f domine g et on écrira $f \to g$ si pour deux phrases quelconques u et v l'appartenance $ufv \in \Phi$ entraîne l'appartenance $ugv \in \Phi$. Si A et B sont deux ensembles de phrases, on dira que A domine B et on écrira $A \to B$ si pour chaque $x \in A$ et chaque $y \in B$ on a $x \to y$.

Il est aisé de voir que, étant donnée une phrase x, l'ensemble $F(x)$ des phrases y telles que $x \to y$ et $y \to x$ est justement ce que nous avons appelé, dans le premier chapitre, la classe de distribution au sens large de la phrase x. Si, en outre, il n'existe aucune phrase z telle que $z \notin F(x)$ et $z \to F(x)$, alors on dira que $F(x)$ est une classe initiale de distribution au sens large.

Si les classes de distribution au sens large sont en nombre fini, alors on dit que Φ est un *langage à nombre d'états fini*. Pour une étude approfondie de ces langages, voir [1], [3], [4], [6], [16], [23], [27]. Pour l'essentiel, ce sont les langages qui peuvent être engendrés à l'aide d'un automate fini.

Soit A un ensemble initial de phrases. Il n'existe, donc, aucune phrase $x \notin A$, telle que $x \rightarrow A$. La catégorie grammaticale engendrée par A est, par définition, la réunion de A avec l'ensemble des phrases y telles que $A \rightarrow y$. La plupart des propriétés établies pour les c. g. dont les éléments sont des mots restent valables aussi pour les c. g. dont les éléments sont des phrases. Chaque fois que A est une classe initiale de distribution au sens large, la c. g. engendrée par A est, par définition, la catégorie grammaticale élémentaire (c. g. é.) engendrée par A. *Dans un langage à nombre d'états fini, le nombre des c. g. é. formées par des phrases est aussi fini.* Réciproquement, si l'on a seulement un nombre fini de c. g. é. formées par des phrases, alors on a seulement un nombre fini de classes initiales de distribution au sens large (car deux classes distinctes engendrent des c. g. é. distinctes).

40. Catégorie grammaticale et fermeture contextuelle

Considérons un ensemble initial A qui est une famille. Désignons par $\mathcal{G}(A)$ la c. g. engendrée par A et par A_φ la fermeture contextuelle de A (voir le paragraphe 43 du chapitre I).

THÉORÈME 22. *On a* $\mathcal{G}(A) = A_\varphi$.

Démonstration. Soit $x \in \mathcal{G}(A) - A$. On a donc, pour tout $y \in A$, $y \rightarrow x$. Il s'ensuit que, quel que soit le contexte $\{u, v\} \in \mathcal{C}(A)$, on a $uxv \in \Phi$ (voir le paragraphe 43 du chapitre I). Ceci entraîne $x \in A_\varphi$. Si, d'autre part, $x \in A$, alors on a de nouveau $x \in A_\varphi$, car tout ensemble est contenu dans sa fermeture contextuelle.

Soit maintenant $x \in A_\varphi$. On a donc, pour tout $\{u, v\} \in \mathcal{C}(A)$, l'appartenance $uxv \in \Phi$. Mais la relation $\{u, v\} \in \mathcal{C}(A)$ est équivalente à l'appartenance $uyv \in \Phi$ pour tout $y \in A$. Donc, si $uyv \in \Phi$ pour tout $y \in A$, alors $uxv \in \Phi$. On déduit que $A \rightarrow x$, c'est-à-dire que $x \in \mathcal{G}(A)$.

Remarques. Le théorème 22 permet d'obtenir de nouvelles informations concernant les c. g., en utilisant les résultats concernant la fermeture contextuelle (par exemple, le théorème 5 du chapitre I, paragraphe 43). D'autre part, en utilisant les résultats concernant les c. g., on obtient une foule de résultats concernant la fermeture contextuelle. Pour donner un seul exemple, il est aisé de prouver

COROLLAIRE 9. *Pour tout ensemble initial A de phrases, on a* $(A_\varphi)_\varphi = A_\varphi$ (c'est-à-dire, la fermeture contextuelle de la fermeture contextuelle d'un ensemble initial A coïncide avec la fermeture contextuelle de A).

L'article [31] de A. Sestier, où il a introduit la notion de fermeture contextuelle dans le cas particulier des ensembles de mots, peut donner beaucoup de suggestions concernant l'étude des c. g.

41. Suggestions pour une nouvelle extension de la notion de catégorie grammaticale

Dans [29], I. I. Revzin discute quelques singularités des paradigmes du verbe russe ; afin d'établir certaines différences entre le russe et le polonais, d'une part, entre les paradigmes nominaux et les paradigmes verbaux, d'autre part, I. I. Revzin esquisse une nouvelle extension de la notion de c. g. é. Considérons, en effet, les formes читает (3^e personne, singulier, présent de *lire*) et читал (3^e personne, singulier, masculin, perfectif de *lire*). Aucune de ces deux formes ne domine l'autre ; par exemple, la phrase я читал est marquée, tandis que la phrase я читает n'est pas marquée ; la phrase она читает est marquée, tandis que la phrase она читал ne l'est pas. D'autre part, désignons par Δ_1 l'ensemble des phrases ne contenant pas les pronoms я et ты ; on constate que pour toute phrase de Δ_1 contenant le mot читал le remplacement de читал par читает conduit à une phrase appartenant aussi à Δ_1. En désignant par Δ_2 l'ensemble des phrases ne contenant aucun sujet féminin ou neutre, on constate que pour toute phrase de Δ_2 contenant le mot читает le remplacement de читает par читал conduit à une phrase appartenant aussi à Δ_2. On arrive ainsi, d'une façon naturelle, à étudier la relation de domination par rapport à une partie seulement de l'ensemble Φ des phrases marquées. Une telle relativisation de la notion de domination conduira à une relativisation correspondante de la notion de c. g. Toutefois, les exemples ci-dessus posent un autre problème, dont l'étude s'impose : quelles sont les parties $\Delta \subset \Phi$ telles que la domination $x \to y$ entraîne la même domination par rapport à Δ. C'est justement l'objet des paragraphes suivants de poser d'une façon rigoureuse et de résoudre les problèmes dont nous venons de parler.

42. Prolongement dominé, prolongement dominant et prolongement distributionnel

Etant donné un ensemble Δ de phrases, nous allons désigner par $D(\Delta)$ l'ensemble de toutes les phrases x — telles qu'il existe des phrases $y \in \Delta$ pour lesquelles $y \to x$. Désignons par $D_1(\Delta)$ l'ensemble de toutes les phrases z telles qu'il existe des phrases $u \in \Delta$ pour lesquelles $z \to u$. On dira que $D(\Delta)$ est le *prolongement dominé de Δ*, tandis que $D_1(\Delta)$ est le *prolongement dominant de Δ*. Il est aisé de voir qu'on a la

PROPOSITION 30. *Les relations suivantes sont vraies* :

$$D(\Delta_1) \cup D(\Delta_2) = D(\Delta_1 \cup \Delta_2), \quad D_1(\Delta_1) \cup D_1(\Delta_2) = D_1(\Delta_1 \cup \Delta_2),$$
$$D(\Delta_1) \cap D(\Delta_2) = D(\Delta_1 \cap \Delta_2), \quad D_1(\Delta_1) \cap D_1(\Delta_2) = D_1(\Delta_1 \cap \Delta_2),$$
$$D(D(\Delta)) = D(\Delta) \supseteq \Delta \quad , \qquad D_1(D_1(\Delta)) = D_1(\Delta) \supseteq \Delta .$$

En effet, toutes ces relations sont des conséquences immédiates de la transitivité et de la réflexivité de la relation de domination.

Désignons par AB le *produit* des ensembles de phrases A et B, c'est-à-dire l'ensemble des phrases $z = xy$, où $x \in A$ et $y \in B$. On a alors la

PROPOSITION 31. *On a les égalités suivantes* :

$$D(\Delta_1\, \Delta_2) = D(\Delta_1)\, D(\Delta_2) \quad \text{et} \quad D_1(\Delta_1\, \Delta_2) = D_1(\Delta_1)\, D_1(\Delta_2) .$$

Ces relations sont des conséquences immédiates des définitions.

L'ensemble Δ sera dit *D-invariant* si $\Delta = D(\Delta)$; il sera dit D_1-invariant si $\Delta = D_1(\Delta)$.

Introduisons aussi l'ensemble $S(\Delta)$, formé par les phrases x telles qu'il existe des phrases $y \in \Delta$ jouissant des propriétés suivantes : $y \to x$ et $x \to y$ (ce qu'on écrit aussi $x \leftrightarrow y$). L'ensemble $S(\Delta)$ sera appelé le *prolongement distributionnel* de Δ. Il est aisé de voir qu'on a la

PROPOSITION 32. *Les relations suivantes sont vraies* :

$$S(\Delta_1 \cup \Delta_2) = S(\Delta_1) \cup S(\Delta_2), \quad S(\Delta_1 \cap \Delta_2) = S(\Delta_1) \cap S(\Delta_2),$$
$$S(\Delta_1\, \Delta_2) = S(\Delta_1)\, S(\Delta_2) \quad , \qquad S(S(\Delta)) = S(\Delta),$$
$$\Delta \subseteq S(\Delta) \subseteq D(\Delta) \cap D_1(\Delta) .$$

Chaque fois que $S(\Delta) = \Delta$, on dira que Δ est un ensemble *S-invariant*. La dernière inclusion ci-dessus entraîne la

PROPOSITION 33. *Si un ensemble Δ est D-invariant ou D_1-invariant, alors il est aussi S-invariant.*

Remarquons la propriété suivante, qui sera utilisée dans la suite : Si $x = uv$, $y = u'v'$, $u \to u'$ et $v \to v'$, alors $x \to y$.

PROPOSITION 34. *Les parties D-invariantes de Φ forment une algèbre de Boole.*

Démonstration. Il suffit de prouver que la réunion de deux parties D-invariantes est aussi une partie D-invariante et que le complémentaire — par rapport à Φ — d'une partie D-invariante est aussi D-invariant. Soient Δ_1 et Δ_2 D-invariants. On a

$$D(\Delta_1) = \Delta_1 , \quad D(\Delta_2) = \Delta_2 .$$

En vertu de la proposition 30, on a

$$D(\Delta_1 \cup \Delta_2) = \Delta_1 \cup \Delta_2 ,$$

donc $\Delta_1 \cup \Delta_2$ est D-invariant. Soit maintenant un ensemble Δ D-invariant. En vertu de la proposition 30, on a

$$D(\Phi - \Delta) = D(\Phi) - D(\Delta) = \Phi - \Delta ,$$

donc $\Phi - \Delta$ est invariant.

De la même manière on prouve la

PROPOSITION 35. *Les parties D_1-invariantes de Φ forment une algèbre de Boole.*

En utilisant la proposition 32 au lieu de la proposition 30, on obtient de la même manière la

PROPOSITION 36. *Les parties S-invariantes de Φ forment une algèbre de Boole.*

On a aussi la

PROPOSITION 37. *Si Δ_1 et Δ_2 sont D-invariants, alors le produit $\Delta_1\Delta_2$ est aussi D-invariant.*

Démonstration. En vertu de la proposition 31, on a

$$D(\Delta_1\, \Delta_2) = D(\Delta_1)\, D(\Delta_2) = \Delta_1\, \Delta_2 .$$

Remarque. La proposition 37 reste vraie si l'on remplace la D-invariance par la D_1-invariance ou par la S-invariance.

43. Δ-domination et Δ-catégorie grammaticale

Considérons deux phrases x et y, et un ensemble de phrases Δ contenu dans Φ (Φ est l'ensemble de toutes les phrases marquées). On dira que x Δ-domine y et on écrira

$$x \underset{\Delta}{\rightarrow} y$$

si, pour tout couple de phrases u et v, l'appartenance $uxv \in \Delta$ entraîne l'appartenance $uyv \in \Delta$.

Il est aisé de voir que la relation de Δ-domination est réflexive et transitive dans l'ensemble des phrases. La plupart des propriétés établies pour $\rightarrow$ restent valables pour $\underset{\Delta}{\rightarrow}$.

Etant donnés deux ensembles de phrases A et B, on dira que A Δ-domine B et on écrira

$$A \underset{\Delta}{\rightarrow} B ,$$

si pour toutes phrases x et y, $x \in A$ et $y \in B$, $x\Delta$-domine y.

Désignons par A_1 l'ensemble des phrases Δ-dominées par A. La réunion $\mathscr{G}(A) = A \cup A_1$ est, par définition, la *Δ-catégorie grammaticale* (Δ-c. g.), engendrée par A. On considère spécialement le cas où A est Δ-initial, c'est-à-dire il n'existe aucune phrase $x \notin A$, qui Δ-domine A.

Etant donnée une phrase x, désignons par $F_\Delta(x)$ l'ensemble des phrases y telles que $y \underset{\Delta}{\rightarrow} x$ et $x \underset{\Delta}{\rightarrow} y$. On dira que $F_\Delta(x)$ est une *classe de Δ-distribution* (au sens large).

Si A est une classe de Δ-distribution au sens large, alors $\mathcal{G}_\Delta(A)$ est, par définition, une *Δ-catégorie grammaticale élémentaire* (Δ-c. g. é élémentaire) ; c'est la Δ-c. g. é. engendrée par A.

Il est aisé de voir que toutes les propriétés établies pour les c. g. et les c. g. é. restent valables pour les Δ-c. g. et les Δ-c. g. é. En effet, les c. g. sont des Δ-c. g., tandis que les c. g. é. sont des Δ-c. g. é. (pour $\Delta = \Phi$), donc l'étude des Δ-c. g. revient à l'étude des c. g. dans le langage Δ. Il y a, pourtant, quelques problèmes nouveaux qui se posent ici :

α) Pour quels sous-ensembles de Φ peut-on affirmer que le passage de Φ à Δ conserve les relations de domination ?

β) dans quelles conditions le passage de Φ à Δ conserve-t-il l'appartenance à la même classe de distribution au sens large ? Nous allons envisager ces problèmes dans le paragraphe suivant.

44. Hérédité par domination et par double domination

Considérons un ensemble $\Delta \subset \Phi$ et deux phrases x et y. Nous dirons que la paire ordonnée (x, y) est *Δ-héréditaire par domination* si l'on a l'une des deux situations suivantes :

1° $x \rightarrow y$ et $x \underset{\Delta}{\rightarrow} y$;

2° x ne domine pas y.

Si toute paire ordonnée de phrases est Δ-héréditaire par domination, alors on dira que Δ est un *ensemble héréditaire par domination.*

THÉORÈME 23. *Soit $\Delta \subset \Phi$. L'ensemble Δ est héréditaire par domination si et seulement s'il est D-invariant.*

Démonstration. Supposons que Δ soit héréditaire par domination et considérons une phrase $x \in D(\Delta)$. Il existe donc une phrase $y \in \Delta$, telle que $y \rightarrow x$. De l'hérédité par domination de l'ensemble Δ, on déduit que $y \underset{\Delta}{\rightarrow} x$. Il s'ensuit que pour tout contexte $\{u, v\}$ tel que $uyv \in \Delta$ on a $uxv \in \Delta$. Prenons $u = v = \theta$ (= la phrase vide). On a $\theta y \theta = y \in \Delta$, donc on a aussi $x \in \Delta$. On a $D(\Delta) \subseteq \Delta$, ce qui entraîne $\Delta = D(\Delta)$. La D-invariance de Δ est ainsi établie.

Supposons maintenant que Δ soit D-invariant et considérons deux phrases x et y telles que $x \rightarrow y$. Soit $\{u, v\}$ un contexte pour lequel $uxv \in \Delta$. On a donc $uyv \in D(\Delta)$ et, de la D-invariance de Δ, on déduit que $uyv \in \Delta$, ce qui entraîne la relation $x \underset{\Delta}{\rightarrow} y$. L'hérédité, par domination, de l'ensemble Δ est ainsi établie. Le théorème 23 est démontré.

Considérons de nouveau un ensemble $\Delta \subset \Phi$. On dira que Δ est *héréditaire par double domination* si pour tout couple de phrases x et y telles que $x \leftrightarrow y$ on a aussi $x \underset{\Delta}{\leftrightarrow} y$.

Théorème 24. *Soit $\Delta \subset \Phi$. L'ensemble Δ est héréditaire par double domination si et seulement s'il est S-invariant.*

Démonstration. Supposons que Δ soit héréditaire par double domination et considérons une phrase $x \in S(\Delta)$. Il existe donc une phrase $y \in \Delta$, telle que $x \leftrightarrow y$. De l'hérédité de Δ par double domination, on déduit que $x \underset{\Delta}{\leftrightarrow} y$. Il s'ensuit que pour tout contexte $\{u, v\}$ on a $uxv \in \Delta$ et $uyv \in \Delta$, ou bien $uxv \notin \Delta$ et $uyv \notin \Delta$. En particulier, en prenant $u = v = \theta$ et en tenant compte du fait que $y \in \Delta$, on déduit que $x \in \Delta$, donc $S(\Delta) = \Delta$. La S-invariance de Δ est ainsi établie.

Supposons maintenant que Δ soit S-invariant et considérons deux phrases x et y telles que $x \leftrightarrow y$. Soit $\{u, v\}$ un contexte pour lequel $uxv \in \Delta$. On a donc $uyv \in S(\Delta)$ et, de la S-invariance de Δ, on déduit que $uyv \in \Delta$, ce qui entraîne $x \underset{\Delta}{\rightarrow} y$. En vertu de la symétrie de la relation $x \leftrightarrow y$, on a aussi $y \underset{\Delta}{\rightarrow} x$, donc $x \underset{\Delta}{\leftrightarrow} y$. L'hérédité, par double domination, de l'ensemble Δ est ainsi établie.

Théorème 25. *Soit $\Delta \subset \Phi$. Si Φ est un langage à nombre d'états fini et si Δ est un ensemble héréditaire par double domination, alors Δ est aussi un langage à nombre d'états fini.*

Démonstration. A cause de l'hypothèse concernant Φ, le nombre N des classes de distribution au sens large est fini. A cause de l'hypothèse concernant Δ, deux phrases appartenant à la même classe de distribution au sens large appartiennent à la même classe de Δ-distribution au sens large. Il s'ensuit que le nombre des classes de Δ-distribution au sens large ne peut pas dépasser la valeur N ; *a fortiori* ce nombre est donc fini et Δ est un langage à nombre d'états fini.

45. Opérations sur les ensembles héréditaires

Proposition 38. *Les parties de Φ qui sont héréditaires par domination forment une algèbre de Boole.*

Démonstration. Conséquence immédiate de la proposition 34 et du théorème 23.

Proposition 39. *Les parties de Φ qui sont héréditaires par double domination forment une algèbre de Boole.*

Démonstration. Conséquence immédiate de la proposition 36 et du théorème 24.

PROPOSITION 40. *Si Δ_1 et Δ_2 sont héréditaires par domination* (respectivement *double domination*), *le produit $\Delta_1 \Delta_2$ est aussi héréditaire par domination* (respectivement *double domination*).

Démonstration. Conséquence immédiate de la proposition 37, de la remarque qui la suit et des théorèmes 23 et 24.

COROLLAIRE 10. *Si n est un nombre entier positif et si Δ est héréditaire par domination* (respectivement *double domination*), alors Δ^n ($= \Delta \ldots \Delta$, Δ itéré n fois) *est aussi héréditaire par domination* (respectivement *double domination*).

Considérons maintenant une nouvelle opération, très importante dans la théorie des automates finis (voir, par exemple [6], [16], [23] et [27]). Etant donné un ensemble $\Delta \subset \Phi$, posons

$$\mathrm{cl}\,(\Delta) = \Delta^0 \cup \Delta^1 \cup \cdots \cup \Delta^n \cup \cdots$$

où par Δ^0 on a désigné l'ensemble formé seulement par la phrase vide.

THÉORÈME 26. *Si Δ est héréditaire par domination* (respectivement *double domination*), $\mathrm{cl}\,(\Delta)$ *est aussi héréditaire par domination* (respectivement par *double domination*).

Démonstration. Supposons d'abord que Δ est héréditaire par domination. En vertu du théorème 23, il suffit de démontrer que $D(\mathrm{cl}\,(\Delta)) = \mathrm{cl}\,(\Delta)$, pour qu'on puisse affirmer que $\mathrm{cl}\,(\Delta)$ reste héréditaire par domination. Soit

$$x \in D(\mathrm{cl}\,(\Delta)) .$$

Il existe donc une phrase $y \in \mathrm{cl}\,(\Delta)$, telle que $y \to x$. L'appartenance $y \in \mathrm{cl}\,(\Delta)$ entraîne l'existence d'un entier positif n, tel que $y \in \Delta^n$. Mais, du corollaire 10 et du fait que Δ est héréditaire par domination, on déduit que Δ^n est héréditaire par domination, donc, d'après le théorème 23, on a $D(\Delta^n) = \Delta^n$. D'autre part, on a $x \in D(\Delta^n)$. Il s'ensuit que $x \in \Delta^n$, ce qui entraîne l'appartenance $x \in \mathrm{cl}\,(\Delta)$. On a établi ainsi la D-invariance de l'ensemble $\mathrm{cl}\,(\Delta)$, ce qui prouve la première partie du théorème 26.

Si, maintenant, on suppose que Δ est héréditaire par double domination, alors on démontre, de la même manière, que $S(\mathrm{cl}\,(\Delta)) = \mathrm{cl}\,(\Delta)$ et on déduit du théorème 24 que $\mathrm{cl}\,(\Delta)$ est aussi héréditaire par double domination.

Remarques. Les résultats ci-dessus établissent un parallélisme entre la classe des événements qu'on peut représenter par des automates finis, d'une part, et la classe des ensembles héréditaires par domination, d'autre part. En effet, les opérations qui conservent l'hérédité par domination sont exactement les opérations qui conservent la propriété d'être représentable par des automates finis ([16], [23], [27]). Un parallélisme du même type existe entre l'hérédité par double domination et la propriété d'être représentable par des automates finis.

Des propositions 30 et 32 et des théorèmes 23 et 24, on déduit la

PROPOSITION 41. *Quel que soit $\Delta \subset \Phi$, le prolongement dominé de Δ est héréditaire par domination, tandis que le prolongement distributionnel de Δ est héréditaire par double domination.*

On arrive immédiatement au

THÉORÈME 27. *Soit $\mathscr{C}$ une classe d'ensembles jouissant des propriétés suivantes :*

1° *Si Δ est fini et contenu dans Φ et si $\Delta = D(\Delta)$, $D(\Delta) \in \mathscr{C}$;*

2° *Si $\Delta_1 \in \mathscr{C}$ et $\Delta_2 \in \mathscr{C}$, alors $\Delta_1 \cup \Delta_2 \in \mathscr{C}$ et $\Delta_1 \Delta_2 \in \mathscr{C}$;*

3° *Si $\Delta \in \mathscr{C}$, $\mathrm{cl}\,(\Delta) \in \mathscr{C}$.*

La plus petite classe $\mathscr{C}$ jouissant des propriétés 1°, 2° *et* 3° *contient exclusivement des ensembles héréditaires par domination.*

Problème. Peut-on affirmer que la plus petite classe jouissant des propriétés 1°, 2°, et 3° contient *toutes* les parties de Φ qui sont héréditaires par domination ?

Le théorème 27 reste vrai si l'on remplace dans son énoncé $D(\Delta)$ par $S(\Delta)$ et « domination » par « double domination ». On a donc le

THÉORÈME 27'. *Soit $\mathscr{C}$ une classe d'ensembles contenus dans Φ et jouissant des propriétés suivantes :* 4° *si Δ est fini et si $S(\Delta) = \Delta$, $S(\Delta) \in \mathscr{C}$;* 2° *si $\Delta_1 \in \mathscr{C}$ et $\Delta_2 \in \mathscr{C}$, alors $\Delta_1 \cup \Delta_2 \in \mathscr{C}$ et $\Delta_1 \Delta_2 \in \mathscr{C}$;* 3° *si $\Delta \in \mathscr{C}$, $\mathrm{cl}\,(\Delta) \in \mathscr{C}$. La plus petite classe $\mathscr{C}$ jouissant des propriétés* 4°, 2° *et* 3° *contient exclusivement des ensembles héréditaires par double domination.*

Problème. Peut-on affirmer que la plus petite classe jouissant des propriétés 4°, 2° et 3° contient *toutes* les parties de Φ qui sont héréditaires par double domination ?

46. Ensembles héréditaires par domination ou par double domination au sens faible

Une analyse linguistique concrète concerne d'habitude non pas une langue naturelle toute entière, mais seulement un certain fragment de cette langue. Pour chaque phénomène linguistique on doit trouver le fragment de la langue qui lui est associé d'une façon naturelle, qui lui donne la possibilité de se manifester d'une manière caractéristique et non ambiguë. C'est ainsi que s'explique, par exemple, l'importance que Harris attribue à ce qu'il appelle « diagnostic environment » (voisinage ou contexte caractéristique) [11], [12].

Les analyses linguistiques traditionnelles concernent, d'habitude, des ensembles héréditaires par double domination, dans un sens plus général que ci-dessus. Prenons, par exemple, l'analyse linguistique purement morphologique, c'est-à-dire sans utiliser le contexte. Tout se rapporte donc ici à l'ensemble Γ des mots (ou des morphèmes).

Par définition, on dira que $\Delta(\subset \Gamma)$ est *héréditaire par double domination au sens faible* si pour $x, y \in \Gamma$ et $x \leftrightarrow y$, on a $x \underset{\Delta}{\leftrightarrow} y$.

On a la

PROPOSITION 42. *Si $\Gamma \subset \Phi$, le vocabulaire Γ est héréditaire par double domination au sens faible.*

Démonstration. Soient $x, y \in \Gamma$ et $x \leftrightarrow y$. Si $uxv \in \Gamma$, alors $u = v =$ la séquence vide, donc $uxv = x$ et $uyv = y \in \Gamma$.

La proposition 42 est, en quelque sorte, une légitimation des analyses linguistiques acontextuelles (paradigmatiques) ; ces analyses concernent un fragment héréditaire par double domination au sens faible.

D'une façon analogue on définit la notion d'ensemble héréditaire par domination au sens faible (il suffit de remplacer $\leftrightarrow$ par $\rightarrow$). On obtient alors une proposition analogue à la proposition 42.

C'est I. I. Revzin qui a remarqué que la plupart des modèles mathématiques en linguistique concernent des ensembles héréditaires par double domination au sens faible. Ces ensembles sont appelés par Revzin « fragments réguliers » [29], [30].

Les fragments utilisés par l'analyse grammaticale la plus élémentaire du français, du roumain, de l'anglais, du russe et du latin contiennent les propositions les plus simples, du type sujet-prédicat. Dans chacune des langues envisagées, l'ensemble de ces phrases est héréditaire par double domination au sens faible. Les syntagmes nominaux du type adjectif-substantif ou substantif-adjectif (il s'agit seulement des adjectifs qualificatifs) forment aussi, dans chacune des langues envisagées, un fragment régulier au sens de Revzin. Des exemples plus complexes sont donnés dans [29] et [30].

Les Δ catégories grammaticales et les Δ-classes de distribution sont intéressantes surtout lorsque Δ est héréditaire par domination, respective par double domination.

47. Partitions régulières

Revzin [29] introduit la notion suivante : une partition de Φ est, par définition, *semi-régulière* (*régulière*) si chaque terme de la partition est héréditaire par domination (double domination). Les théorèmes 23 et 24 entraînent le

THÉORÈME 28. *Une partition de Φ est semi-régulière* (*régulière*) *si et seulement si chaque terme de la partition est D-invariant* (*S-invariant*).

Etant données deux partitions P_1 et P_2,

$$P_1 : \Phi = \bigcup_i A_i\,, \qquad P_2 : \Phi = \bigcup_j B_j\,,$$

le produit de ces partitions est, par définition, la partition $P_1 P_2$ dont les termes sont les ensembles $A_i \cap B_j$. On a la

PROPOSITION 43. *Le produit de deux partitions semi-régulières (régulières) est aussi une partition semi-régulière (régulière).*

Démonstration. Soient P_1 et P_2 semi-régulières. Du fait que les ensembles A_i et B_j sont héréditaires par domination on déduit, en vertu de la proposition 38, que $A_i \cap B_j$ est aussi héréditaire par domination, donc $P_1\ P_2$ est semi-régulière. Si P_1 et P_2 sont régulières, on démontre, en utilisant la proposition 39, que $P_1\ P_2$ est aussi régulière.

Des considérations développées dans [29] conduisent à la notion suivante : la phrase x *domine absolument* la phrase y si pour chaque partition régulière P de Φ il existe un terme A de la partition P, tel que $x \underset{A}{\rightarrow} y$. Mais on a la

PROPOSITION 44. *Soient x et y deux phrases quelconques. On a $x \rightarrow y$ si et seulement si x domine absolument y.*

Démonstration. Soit $x \rightarrow y$. Si P est une partition régulière de Φ, alors on a, pour chaque terme A de P, $x \underset{A}{\rightarrow} y$, donc x domine absolument y. Réciproquement, si x domine absolument y, soit Q la partition de Φ dont l'unique terme est Φ. En vertu de la proposition 39, Q est une partition régulière, donc $x \underset{\Phi}{\rightarrow} y$. Mais la Φ-domination est la même chose que la domination.

Pour finir, remarquons que la collection Φ (ou Δ) envisagée dans ce chapitre est parfois liée à une certaine idée de correction grammaticale. On trouvera différentes manières de concevoir celle-ci dans [2], p. 28 et [9], p. 35.

Certains résultats développés dans le présent chapitre ont été exposés aussi dans [19], [20], [21] et [22].

OUVRAGES CITÉS

[1] BAR-HILLEL, Y., SHAMIR, E., « Finite state languages : Formal representation and adequacy problems ». *Bulletin of the Research Council of Israel*, vol. 8 F, 1960, p. 155-156.

[2] BENZÉCRI, J. P., *Linguistique mathématique* (cours lithographié). Rennes, 1964.

[3] CHOMSKY, N., MILLER, G. A., « Finite state language ». *Information and Control*, vol. 1, 1958, N° 2, p. 91-112.

[4] CHOMSKY, N., « Formal properties of grammars », dans *Handbook of Mathematical Psychology*, vol. II, John Wiley and Sons, Inc., New York-London, 1963, chapitre 12.

[5] CRĂCIUN, C. V., « Sur la notion de racine dans la théorie algébrique de la grammaire ». *Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées*, vol. 10, 1965, N° 3, p. 323-331.

[6] ČULÍK, K., « Some notes on finite state languages and events represented by finite automata using labelled graphs ». *Časopis pro pestovani mat.*, vol. 86, 1961, p. 43-55.

[7] DOBRUŠIN, R. L., « Elementarnaja grammatičeskaja kategorija ». *Bjulleten Obedinenija po problemam mašinnogo perevoda*. 1957, N° 5, p. 19-21.

[8] DOBRUŠIN, R. L., « Matematičeskie metody v lingvistike. Priloženie. *Matematičeskoe prosveščenie*, vol. 6, 1961, p. 52-59.

[9] GROSS, M., *Théorie des langages* (cours lithographié). Paris, 1964.

[10] HARRIS, Z. S., « From morpheme to utterance ». *Language*, vol. 22, 1946, N° 3, p. 161-183.

[11] HARRIS, Z. S., *Structural linguistics*. Fifth Impression. University of Chicago Press, 1961.

[12] HARRIS, Z. S., « Co-occurrence and transformation in linguistic structure ». *Language*, vol. 33, 1957, p. 283-340.

[13] HARTNETT, W. E., « Graph topology ». *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 11, 1964, N° 5, p. 535.

[14] HARTNETT, W. E., « Total topological spaces ». *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 11, 1964, N° 5, p. 580.

[15] HJELMSLEV, L., *Prolegomena to a theory of language*. Baltimore, 1953.

[16] KLEENE, S. C., « Representation of events in nerve nets and finite automata ». *Automata Studies* (C. E. Shannon and J. Mc Carthy, eds.) Princeton Univ. Press, 1956.

[17] KULAGINA, O. S., « Ob odnom sposobe opredelenija grammatičeskih ponjatii na baze teorii množestv ». *Problemy kibernetiki*, vol. 1, 1958, p. 203-214.

[18] MARCUS, S., « Description, à l'aide de la théorie des ensembles, de certains phénomènes morphologiques ». *Revue de mathématiques pures et appliquées*, vol. 6, 1961, N° 4, p. 735-744.

[19] MARCUS, S., « Sur un modèle logique de la catégorie grammaticale élémentaire, I ». *Revue de mathématiques pures et appliquées*, vol. 7, 1962, N° 1, p. 91-107.

[20] MARCUS, S., « Sur un modèle logique de la catégorie grammaticale élémentaire, II ». *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, vol. 8, 1962, N° 3-4, p. 323-329.

[21] MARCUS, S., « Ob odnoi logičeskoi modeli elementarnoi grammatičeskoi kategorii, III ». *Revue de mathématiques pures et appliquées*, vol. 7, 1962, N° 4, p. 683-691.

[22] MARCUS, S., « Un criteriu contextual de clasificare a cuvintelor ». *Studii şi cercetări lingvistice*, vol. 13, 1962, N° 2, p. 177-189.

[23] MARCUS, S., *Gramatici şi automate finite*. Editura Academiei R. P. R. Bucureşti, 1964.

[24] MARTINET, A., « Neutralisation et archiphonème ». *Travaux du Cercle linguistique de Prague*, vol. 6, 1936.

[25] MOLOSNAJA, T. N., « Voprosy različenija omonimov pri mašinnom perevode s angliiskogo jazyka na russkii ». *Problemy kibernetiki*, vol. 1, 1958, p. 215-221.

[26] POTTIER, B., « Vers une sémantique moderne ». *Travaux de linguistique et de littérature publiés par le Centre de philologie et de littérature romanes de l'Université de Strasbourg*, vol. 2, 1964, N° 1, p. 107-137.

[27] RABIN, M. O., SCOTT (D.), « Finite automata and their decision problems ». *I. B. M. Journ. Research Development*, vol. 3, 1959, N° 2, p. 114-125.

[28] REVZIN, I. I., *Modeli jazyka*, Izd. Akad. Nauk SSSR, Moskva, 1962.

[29] REVZIN, I. I., « Nekotorye formalnye osobennosti paradigmy glagola (*k* probleme vnutrennei tipologii). *Issledovanija po strukturnoi tipologii* (sbornik statei). Izd. Akad. Nauk SSSR, 1963, p. 94-103.

[30] REVZIN, I. I., « Nekotorye voprosy teorii modelei jazyka ». *Naučno-Tehničeskaja Informacija* 1964, N° 8, p. 42-46.

[31] SESTIER, A., « Contribution à une théorie ensembliste des classifications linguistiques ». *Actes du Premier Congrès de l'AFCAL*, Grenoble, 1960. Paris, 1961, p. 293-305.

[32] STATI, S., « Caracterul sistematic al omonimiei morfologice ». *Studii şi cercetări lingvistice*, vol. 6, 1960, N° 1, p. 25-31.

[33] TONDEUR, P., « Ein Beispiel zur allgemeinen Topologie : Die Topologie einer Äquivalenzrelation ». *Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Series A. I. Mathematica*, 344, 1964, 7 p.

[34] TRNKA, B., « On some problems of neutralization ». *Omagiu lui Iorgu Iordan cu prilejul împlinirii a 70 de ani*. Bucureşti, 1958, p. 861-866.

[35] ZITEK, F., « Quelques remarques au sujet de l'entropie du tchèque ». *Transactions of the Third Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Process*. Liblice, 1962. Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1964, p. 841-846.

Ajouté sur les épreuves

Pour l'étude ultérieure de la relation de domination, de la catégorie grammaticale et de la fermeture de Sestier voir Brian H. MAYOH (« Simple structures defined on a transitive and reflexive graph » *Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées*, vol. 11, 1966, N° 1, p. 43-51 ; « Grammatical categories » *Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées*, vol. 12, 1967), Constantin V. CRĂCIUN (« Domination et sous-langages dans la théorie analytique de la grammaire ». *Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées* (sous presse)) ; Jürgen KUNZE (« Theoretische Probleme der Automatischen Übersetzung ». *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, Band 12, 1966, Heft 1/2, p. 85-130), Ferenc KIEFER (*Matematikai Nyelvészeti Tanulmányok*. Országos müszaki könyvtár és dokumentációs, központ, Budapest, 1964), S. MARCUS (« Catégories de Dobrušin, fermetures de Sestier et voisinages de Sakai ». *Glossa*, vol. 1, 1967, N° 1 ; « Catégories morphologiques et analyse contextuelle dans la linguistique algébrique ». *Conférence Internationale de traitement automatique des langues*, Grenoble, Août 1967), Eleonora Toma MARCU (« Proprietăţi ale închiderilor Sestier din teoria algebrică a gramaticii ». *Studii şi cercetări matematice* (sous presse)), Constantin RAISCHI (« Asupra unui model algebric al categoriilor gramaticale I ». *Studii şi cercetări matematice*, vol. 19, 1967, Nr. 4, p. 549-564 ; « Asupra unui model algebric al categoriilor gramaticale II ». *Studii şi cercetări matematice*, vol. 19, 1967, Nr. 5, p. 725-740 ; « Relaţia de dominare şi analiza algebrică contextuală ». *Studii şi cercetări matematice* (sous presse)), Itiroo SAKAI (« Some mathematical aspects of syntactic description » — Preprint.

International Conference of Computational Linguistics, New York, 1965), I. I. Revzin (*Metod modelirovanija i tipologia slavjanskih jazykov*. Akademia Nauk SSSR, Institut Slavjanovedenija, Izd. Nauka, Moscou, 1967), Constantin Tănăsescu (« Unele aplicaţii ale ecuaţiilor booleene în teoria algebrică a gramaticii », *Studii şi cercetări matematice* (sous presse)), L. Nebeský (« Conditional replacement of words ». *The Prague Bulletin of Mathematical Linguistics*, 1965, N° 3, p. 3-12).

CHAPITRE VI

CATÉGORIE DU CAS

1. Introduction

La description structurale de la catégorie du cas a été effectuée plus spécialement sur la base d'une quantification des aspects sémantiques des valeurs de cette catégorie et sur la recherche des éléments invariants, à caractère discret, ordinairement binaire. En combinant ces éléments, on obtient les différents cas grammaticaux possibles pour une langue donnée. A ce point de vue, on connaît les travaux de L. Hjelmslev [6], de R. Jakobson [7] et de S. K. Šaumjan [18]. Récemment, Paula Diaconescu a traité à ce point de vue le système des cas dans la langue roumaine [1]. Pour d'autres aspects du cas, cf. [2], [3], [9], [15].

Le présent chapitre est formé de plusieurs parties.

Dans la première partie (§ 2-18) nous nous proposons, en partant d'une idée exposée par V. A. Uspenski [19], de construire un modèle mathématique du cas, modèle mettant au premier plan l'aspect syntagmatique de cette catégorie grammaticale. C'est pourquoi nous n'utiliserons ni la différence entre les formes flexionnelles des mots ni leurs caractéristiques morphématiques, mais les contextes où apparaissent ces formes. Les cas seront alors définis comme des classes de contextes ; nous introduirons donc une certaine relation d'équivalence dans l'ensemble des contextes repérés, et les classes d'équivalence correspondantes seront précisément les cas. Dans la deuxième partie (paragraphes 19-31) nous développerons une idée de A. N. Kolmogorov, relative à la description de l'aspect sémantique du cas. Cette idée est exposée dans [19], mais d'après une référence de [8] elle a été déjà formulée depuis quelques dizaines d'années par Kolmogorov. Nous étudierons aussi un analogue, dans le plan de l'expression, du cas de Kolmogorov, analogue proposé par Revzin ([16], p. 68-69, et [17]). Ensuite, nous présenterons, en suivant les idées de [19], une combinaison des points de vue dont nous avons parlé. A la fin, nous ferons quelques remarques diverses.

2. Contextes repérés et mots admis

Soient Γ un ensemble fixé d'éléments dits mots, V une partition de Γ et Φ une partie du semi-groupe libre engendré par Γ. Les éléments de ce semi-groupe sont des *phrases*, et les éléments de Φ seront des phrases *repérées* ou *marquées*. On suppose que tout mot entre dans au moins une phrase repérée. Si $x \in \Gamma$, $V(x)$ est le terme de V qui contient x ; $y \in V(x)$ doit être interprété ainsi : y est une forme flexionnelle de x. $V(x)$ sera le *paradigme* de x. Le triplet $\{ \Gamma, V, \Phi \}$ sera un *langage à structure paradigmatique* ou, simplement, un *langage paradigmatique*.

Nous appellerons *contexte* toute paire ordonnée de phrases (f_1, f_2), où les phrases f_1 et f_2 ne seront pas nécessairement repérées.

Un contexte (f_1, f_2) est *repéré* s'il existe un mot $x \in \Gamma$ tel que la phrase $f_1 x f_2$ soit repérée.

Un mot a est *admis* par le contexte (f_1, f_2) s'il existe un mot $b' \in V(b)$, tel que la phrase $f_1\, b'\, f_2$ soit repérée.

Un mot a est *directement admis* par le contexte (f_1, f_2) si la phrase $f_1\, a f_2$ est repérée. Il est évident que tout mot directement admis par (f_1, f_2) est admis par (f_1, f_2), mais la réciproque n'est pas vraie.

Pour certaines des notions ci-dessus, voir aussi le chapitre I.

Nous désignons par $A(\gamma)$ l'ensemble des mots admis par le contexte

$$\gamma = (f_1, f_2)\,.$$

Les trois propositions suivantes sont évidentes :

PROPOSITION 1. *Si $b \in A(\gamma)$ et si $b_1 \in V(b)$, alors $b_1 \in A(\gamma)$.*

PROPOSITION 2. *Pour que $A(\gamma)$ ne soit pas vide, il est nécessaire et suffisant que γ soit un contexte repéré.*

PROPOSITION 3. *Pour tout contexte γ, nous avons*

$$A(\gamma) = \bigcup_{x \in A(\gamma)} V(x)\,.$$

3. Contextes équivalents

Nous dirons que deux contextes γ' et γ'' sont *équivalents* si $A(\gamma') = A(\gamma'')$.

Soit $B(\gamma)$ l'ensemble des mots directement admis par le contexte γ. Nous avons évidemment $B(\gamma) \subseteq A(\gamma)$.

L'inclusion inverse n'a pas toujours lieu, ainsi qu'il résulte de la

PROPOSITION 4. *Il existe un langage paradigmatique $\mathscr{L} = \{ \Gamma, V, \Phi \}$ et deux contextes γ' et γ'' de $\mathscr{L}$, tels que $A(\gamma') \neq B(\gamma')$, mais $A(\gamma'') = B(\gamma'')$.*

Démonstration. Soit $\mathscr{L} = \{ \Gamma, V, \Phi \}$, défini de la manière suivante :

$$\Gamma = \{ a, b, c \}, \qquad V(a) = V(b) = \{ a, b \}, \qquad V(c) = \{ c \}.$$
$$\Phi = \{ aba, bcb \}.$$

Soient les contextes $\gamma' = (a, a)$; $\gamma'' = (b, b)$. On vérifie facilement que

$$A(\gamma') = \{ a, b \}, \qquad B(\gamma') = \{ b \}, \qquad A(\gamma'') = B(\gamma'') = \{ c \}.$$

Les relations obtenues démontrent la proposition 4.

PROPOSITION 5. *Soient γ' et γ'' deux contextes pour lesquels $B(\gamma') = B(\gamma'')$. Dans ces conditions, γ' et γ'' sont équivalents.*

Démonstration. Nous devons montrer que

$$A(\gamma') = A(\gamma''). \tag{1}$$

Soient $\gamma' = (f_1', f_2')$ et $\gamma'' = (f_1'', f_2'')$. Soit $x \in A(\gamma')$. Il existe un $x' \in V(x)$, tel que la phrase $f_1' \, x' \, f_2'$ soit repérée. Il s'ensuit que x' est directement admis par γ', c'est-à-dire que $x' \in A(\gamma')$.

Il résulte de l'égalité (1) que $x' \in A(\gamma'')$, donc la phrase $f_1'' \, x' \, f_2''$ est repérée. Mais $x \in V(x')$; nous en déduisons que $x \in A(\gamma'')$, et par conséquent

$$A(\gamma') \subseteq A(\gamma'').$$

Du fait que l'hypothèse est symétrique par rapport à γ' et γ'', l'inclusion inverse a également lieu, et la proposition 5 est ainsi démontrée.

4. Contextes équivalents au sens fort

PROPOSITION 6. *Il existe un langage paradigmatique $\mathscr{L} = \{ \Gamma, V, \Phi \}$ et deux contextes γ' et γ'' de $\mathscr{L}$, tels que $A(\gamma') = A(\gamma'')$, mais $B(\gamma') \neq B(\gamma'')$.*

Démonstration. Soit le langage paradigmatique $\mathscr{L}$ défini de la manière suivante :

$$\Gamma = \{ a, b, c \}, \; V(a) = V(b) = V(c) = \{ a, b, c \}, \; \Phi = \{ aba, bcb \}.$$

Soient $\gamma' = (a, a)$, $\gamma'' = (b, b)$.

Nous avons $B(\gamma') = \{ b \}$, $B(\gamma'') = \{ c \}$, $A(\gamma') = A(\gamma'') = \{ a, b, c \}$ et la proposition 6 est démontrée.

Les propositions 5 et 6 rendent légitime la définition suivante :

Deux contextes γ' et γ'' sont *équivalents dans le sens fort si* $B(\gamma') = B(\gamma'')$.
Des propositions 5 et 6, il résulte que :

Deux contextes équivalents dans le sens fort sont équivalents, mais la réciproque n'est pas vraie.

5. Ensembles admis, directement admis ou simultanément admis

PROPOSITION 7. *Pour tout contexte γ, nous avons* $A(\gamma) = \bigcup_{x \in B(\gamma)} V(x)$.

Démonstration. Soit $u \in A(\gamma)$. Il existe un mot $u' \in V(u)$, tel que u' est directement admis par γ, donc $u' \in B(\gamma)$; mais du fait que $u' \in V(u)$, il résulte que $u \in V(u')$. Etant donné que $V(u')$ est un terme de la réunion du second membre, nous avons

$$u \in \bigcup_{x \in B(\gamma)} V(x)\,.$$

Soit maintenant

$$v \in \bigcup_{x \in B(\gamma)} V(x)\,.$$

Il existe donc un mot $x \in B(\gamma)$, tel que $v \in V(x)$. Donc x est directement admis par γ et v est admis par γ ; il s'ensuit que $v \in A(\gamma)$ et la proposition 7 est démontrée.

Soit E une partie de l'ensemble Γ. Nous dirons que E est un *ensemble admis* s'il existe un contexte γ tel que $E = A(\gamma)$.

Nous dirons que E est *directement admis* s'il existe un contexte γ tel que $E = B(\gamma)$.

Nous dirons que les ensembles E et H sont *simultanément admis* s'il existe un contexte γ tel que $E = A(\gamma)$, $H = B(\gamma)$.

PROPOSITION 8. *Pour que E et H soient* simultanément admis, *il est nécessaire et suffisant que H soit directement admis et*

$$E = \bigcup_{x \in H} V(x)\,. \tag{2}$$

Démonstration. La condition est nécessaire. — Soient E et H simultanément admis. Il en résulte que H est directement admis et qu'il existe un contexte γ tel que $E = A(\gamma)$, $H = B(\gamma)$.

En vertu de la proposition 7, la relation (2) a donc lieu.

La condition est suffisante. — Supposons que la relation (2) est remplie et soit H directement admis. Il existe donc un contexte γ pour lequel

$$H = B(\gamma) \qquad \text{et} \qquad E = \bigcup_{x \in B(\gamma)} V(x)\,.$$

Conformément à la proposition 7, nous avons $E = A(\gamma)$ et la proposition 8 est démontrée.

6. Concordance et concordance complète par rapport à un mot

Nous dirons que deux contextes γ' et γ'' sont *concordants par rapport à* $a \in \Gamma$ s'il existe un mot $a' \in V(a)$, tel que a' soit directement admis en même temps par γ' et par γ''.

La proposition suivante est évidente :

PROPOSITION 9. *Si γ' et γ'' sont concordants par rapport à $a \in \Gamma$ et si $a_1 \in V(a)$, alors γ' et γ'' sont concordants par rapport à a_1.*

Nous dirons que γ' et γ'' sont *complètement concordants par rapport à* $a \in \Gamma$ si $V(a) \cap B(\gamma') = V(a) \cap B(\gamma'') \neq 0$.

Les propositions suivantes sont évidentes :

PROPOSITION 10. *Si γ' et γ'' sont complètement concordants par rapport à $a \in \Gamma$, alors ils sont concordants par rapport à a.*

PROPOSITION 11. *Si γ' et γ'' sont complètement concordants par rapport à $a \in \Gamma$ et si $a_1 \in V(a)$, alors γ' et γ'' sont complètement concordants par rapport à a_1.*

La proposition réciproque de 10 n'est pas vraie, comme il résulte de la

PROPOSITION 12. *Il existe un langage paradigmatique $\mathcal{L} = \{ \Gamma, V, \Phi \}$, deux contextes γ' et γ'' de $\mathcal{L}$ et un mot $a \in \Gamma$, tels que γ' et γ'' sont concordants par rapport à a, mais ne sont pas complètement concordants par rapport à a.*

Démonstration. Soit $\mathcal{L}$ défini de la manière suivante :

$$\Gamma = \{ a, b, c \}, V(a) = V(b) = \{ a, b \}, V(c) = \{ c \}, \Phi = \{ aac, bac, bbc \}.$$

Soient $\gamma' = (a, c)$ et $\gamma'' = (b, c)$. On voit facilement que γ' et γ'' sont concordants aussi bien par rapport à a que par rapport à b. Pourtant γ' et γ'' ne sont complètement concordants ni par rapport à a, ni par rapport à b. En effet, nous avons

$$V(a) \cap B(\gamma') = \{ a \}, \qquad V(a) \cap B(\gamma'') = \{ a, b \}.$$

La proposition 12 est ainsi établie.

7. Non-transitivité de la relation de concordance par rapport à un mot

Il est évident que la relation de concordance par rapport à un mot a est symétrique dans l'ensemble des contextes d'un langage.

Il est également évident que la relation de concordance absolue par rapport à un mot a est symétrique dans l'ensemble des contextes d'un langage. Ces relations sont-elles transitives ? La réponse est donnée par les deux propositions qui suivent.

PROPOSITION 13. *Il existe un langage paradigmatique où la relation de concordance par rapport à a n'est pas transitive dans l'ensemble correspondant de contextes.*

Démonstration. Soit $\mathscr{L} = \{ \Gamma, V, \Phi \}$ défini de la façon suivante :

$$\Gamma = \{ a, b, c, d \},\ V(a) = V(b) = \{ a, b \},\ V(c) = V(d) = \{ c, d \},$$
$$\Phi = \{ abc,\ cac,\ cbc,\ dab \}.$$

Soient $\gamma' = (a, c)$, $\gamma'' = (c, c)$, $\gamma''' = (d, b)$. γ' et γ'' sont concordants par rapport à a, car $b \in V(a)$ et les phrases *abc* et *cbc* sont repérées. γ'' et γ''' sont aussi concordants par rapport à a, étant donné que les phrases *cac* et *dab* sont repérées. Mais γ' et γ''' ne sont pas concordants par rapport à a, car il n'existe dans $V(a)$ aucun mot directement admis tant par γ' que par γ''. En effet, la phrase *dab* est repérée, mais la phrase *aac* ne l'est pas ; la phrase *abc* est repérée, mais la phrase *dbb* n'est pas repérée.

La proposition 13 est ainsi démontrée.

8. Transitivité de la relation de concordance complète par rapport à un mot

PROPOSITION 14. *Pour tout langage paradigmatique, la relation de concordance complète par rapport à un mot a est une relation transitive dans l'ensemble correspondant de contextes.*

Démonstration. Soit $\mathscr{L} = \{ \Gamma, V, \Phi \}$. Soit $a \in \Gamma$. Soient γ', γ'' et γ''' trois contextes ayant les propriétés suivantes : γ' et γ'' sont complètement concordants par rapport à a, et γ'' et γ''' sont également complètement concordants par rapport à a. Nous avons donc

$$V(a) \cap B(\gamma') = V(a) \cap B(\gamma'') \neq 0\ ,\ V(a) \cap B(\gamma'') = V(a) \cap B(\gamma''') \neq 0\ .$$

Il s'ensuit immédiatement que

$$V(a) \cap B(\gamma') = V(a) \cap B(\gamma''') = 0\ ,$$

donc γ' et γ''' sont complètement concordants par rapport à a.

Par conséquent, la concordance complète par rapport à a est une relation transitive. La proposition 14 est démontrée.

9. Concordance de deux contextes

Nous dirons que deux contextes γ' et γ'' sont *concordants* si, quel que soit le mot $a \in \Gamma$ admis aussi bien par γ' que par γ'', γ' et γ'' sont concordants par rapport à a et s'il existe aussi au moins un mot b admis par γ' et γ''. La concordance des contextes γ' et γ'' équivaut donc au fait suivant.

On a $A(\gamma') \cap A(\gamma'') \neq 0$ et, pour tout $x \in A(\gamma') \cap A(\gamma'')$, on a

$$V(x) \cap B(\gamma') \cap B(\gamma'') \neq 0 .$$

Il résulte de la définition même de la relation de concordance que celle-ci est symétrique.

PROPOSITION 15. *Il existe un langage paradigmatique où la relation de concordance n'est pas une relation transitive dans l'ensemble correspondant de contextes.*

Démonstration. Considérons le langage utilisé pour la démonstration de la proposition 13 et les contextes γ', γ'' et γ''' introduits dans la même démonstration. Les seuls mots admis tant par γ' que par γ'' sont a et b. Puisque γ' et γ'' sont concordants aussi bien par rapport à a que par rapport à b, γ' et γ'' sont concordants. D'une manière analogue, on constate aussi que γ'' et γ''' sont concordants. Pourtant γ' et γ''' ne le sont pas, étant donné que, comme nous l'avons vu dans la démonstration de la proposition 13, γ' et γ''' ne sont pas concordants par rapport à a, bien que a soit admis tant par γ' que par γ'''.

Soit $E(\gamma', \gamma'')$ l'ensemble de tous les mots par rapport auxquels γ' et γ'' sont concordants. La relation de concordance des contextes γ' et γ'' correspond au fait

$$E(\gamma', \gamma'') = A(\gamma') \cap A(\gamma'') \neq 0 .$$

Mais, en général, on a l'inclusion

$$E(\gamma', \gamma'') \subseteq A(\gamma') \cap A(\gamma'') .$$

PROPOSITION 16. *Pour tout langage paradigmatique $\mathscr{L} = \{ \Gamma, V, \Phi \}$ et pour tout couple de contextes γ' et γ'' provenant de $\mathscr{L}$, on a l'implication* :

$$\text{si } x \in E(\gamma', \gamma'') \text{, alors } V(x) \subseteq E(\gamma', \gamma'') .$$

Démonstration. Soit $x' \in V(x)$. Puisque γ' et γ'' sont concordants par rapport à x, il existe un mot $x'' \in V(x)$, tel que x'' est directement admis par γ' et γ''. Mais comme la relation $u \in V(v)$ est une relation d'équivalence et comme $x' \in V(x)$ et que $x'' \in V(x)$, $x'' \in V(x')$, γ' et γ'' sont donc concordants par rapport à x'. Donc, $x' \in E(\gamma', \gamma'')$ et la proposition 16 est démontrée.

Nous dirons que deux contextes γ' et γ'' sont *concordants par rapport à l'ensemble* $A \subseteq \Gamma$ si $A \subseteq E(\gamma', \gamma'')$.

Par suite de la proposition 15, la concordance par rapport à A n'est pas transitive.

10. Concordance complète de deux contextes

Nous dirons que deux contextes γ' et γ'' sont *complètement concordants* si $A(\gamma') \cap A(\gamma'') \neq 0$ et si, pour tout $a \in A(\gamma') \cap A(\gamma'')$, γ' et γ'' sont complètement concordants par rapport à a. La concordance complète des contextes γ' et γ'' équivaut donc au fait suivant : $A(\gamma') \cap A(\gamma'') \neq 0$ et, pour tout $x \in A(\gamma') \cap A(\gamma'')$, on a

$$V(x) \cap B(\gamma') = V(x) \cap B(\gamma'') \neq 0 .$$

La symétrie de la relation de concordance complète est évidente.

Proposition 17. *Il existe un langage paradigmatique $\mathscr{L} = \{ \Gamma, V, \Phi \}$ pour lequel la relation de concordance complète n'est pas transitive dans l'ensemble correspondant de contextes.*

Démonstration. Soient $\Gamma = \{ a, b, c \}$, $V(x) = \{ x \}$ pour tout $x \in \Gamma$, $\Phi = \{ abc, bca, bba, ccb \}$. Soient $\gamma' = (a, c)$, $\gamma'' = (b, a)$, $\gamma''' = (c, b)$. Le seul mot admis par γ' et γ'' est b et, du fait que $V(b) = \{ b \}$, on a

$$V(b) \cap B(\gamma') = V(b) \cap B(\gamma'') = \{ b \} .$$

Donc γ' et γ'' sont complètement concordants.

Le seul mot admis par γ'' et γ''' est c et on a, du fait que $V(c) = \{ c \}$,

$$V(c) \cap B(\gamma'') = V(c) \cap B(\gamma''') = \{ c \} ;$$

donc γ'' et γ''' sont complètement concordants.

Les contextes γ' et γ''' ne sont pas complètement concordants (et même ils ne sont pas concordants), étant donné que $A(\gamma') \cap A(\gamma''') = 0$.

La proposition 17 est ainsi démontrée.

Désignons par $F(\gamma', \gamma'')$ l'ensemble de tous les mots par rapport auxquels γ' et γ'' sont complètement concordants. Nous avons, en vertu de la proposition 10, $F(\gamma', \gamma'') \subseteq E(\gamma', \gamma'')$ et, par suite de la proposition 12, cette inclusion n'est pas toujours une égalité. Nous avons donc aussi l'inclusion

$$F(\gamma', \gamma'') \subseteq A(\gamma') \cap A(\gamma'') .$$

Nous dirons que deux contextes γ' et γ'' sont *complètement concordants par rapport à l'ensemble* $A \subseteq \Gamma$, si $A \subseteq F(\gamma', \gamma'')$.

En vertu de la proposition 14, la concordance complète par rapport à un certain ensemble est une relation transitive dans l'ensemble des contextes.

11. Conditions de réflexivité des différentes relations de concordance

En ce qui concerne la propriété de réflexivité des relations de concordance et de concordance complète, nous avons les propositions suivantes, dont la démonstration est immédiate :

PROPOSITION 18. *La concordance par rapport à un mot a est une relation réflexive dans l'ensemble des contextes si et seulement si a est admis par tout contexte.*

PROPOSITION 19. *La concordance complète par rapport à un mot a est une relation réflexive dans l'ensemble des contextes si et seulement si a est admis par tout contexte.*

PROPOSITION 20. *La concordance est une relation réflexive dans l'ensemble des contextes si et seulement si, pour tout contexte γ, l'ensemble $A(\gamma)$ n'est pas vide.*

PROPOSITION 21. *La concordance complète est une relation réflexive dans l'ensemble des contextes si et seulement si, pour tout contexte γ, l'ensemble $A(\gamma)$ n'est pas vide.*

12. Propriétés d'invariance et de non-invariance de la relation de concordance par rapport à un mot

La concordance par rapport à un mot donné est un invariant de la relation d'équivalence forte entre contextes. En effet, nous avons la

PROPOSITION 22. *Soit un mot a et soient quatre contextes γ_1, γ'_1, γ_2 et γ'_2. Si γ_1 est fortement équivalent à γ'_1, γ_2 à γ'_2 tandis que γ_1 et γ_2 sont concordants par rapport à a, alors γ'_1 et γ'_2 sont également concordants par rapport à a.*

Démonstration. Par hypothèse, nous avons $B(\gamma_1) = B(\gamma'_1)$, $B(\gamma_2) = B(\gamma'_2)$ et toujours par hypothèse, il existe un mot $a' \in V(a)$ directement admis par γ_1 et γ_2. Nous avons donc $a' \in B(\gamma_1) \cap B(\gamma_2)$. Par suite des égalités ci-dessus, il s'ensuit que $a' \in B(\gamma'_1) \cap B(\gamma'_2)$, donc γ'_1 et γ'_2 sont concordants par rapport à a.

La concordance par rapport à un mot donné n'est pas un invariant de la relation d'équivalence entre contextes. En effet, nous avons la

PROPOSITION 23. *Il existe un langage paradigmatique $\mathscr{L} = \{ \Gamma, V, \Phi \}$, un mot $a \in \Gamma$ et quatre contextes de $\mathscr{L}$: γ_1, γ'_1, γ_2, γ'_2, tels que γ_1 est équivalent à γ'_1, γ_2 à γ'_2 ; γ_1 et γ_2 sont concordants par rapport à a, mais γ'_1 et γ'_2 ne sont pas concordants par rapport à a.*

Démonstration. Soient

$$\Gamma = \{ a, b, c \},\ V(a) = V(b) = \{ a, b \},\ V(c) = \{ c \},\ \Phi = \{ abc, bca, cab, bba \}.$$

Soient $\gamma_1 = (a, c)$, $\gamma'_1 = (c, b)$, $\gamma_2 = (b, a)$, $\gamma'_2 = (b, a)$.

Nous avons

$$A(\gamma_1) = A(\gamma_1') = \{ a, b \}, \qquad A(\gamma_2) = A(\gamma_2') = \{ a, b, c \},$$

donc γ_1 est équivalent à γ_1' et γ_2 à γ_2'.

γ_1 et γ_2 sont concordants par rapport à a, étant donné que $b \in V(a)$ et que b est directement admis aussi bien par γ_1 que par γ_2. Par contre, γ_1' et γ_2' ne sont pas concordants par rapport à a, car b n'est pas directement admis par γ_1', ni a par γ_2'.

La proposition 23 est donc démontrée.

13. Propriétés d'invariance et de non-invariance de la relation de concordance complète par rapport à un mot

La concordance complète par rapport à un mot donné est un invariant de la relation d'équivalence forte entre contextes. En effet, nous avons la

PROPOSITION 24. *Soit un mot a et soient quatre contextes γ_1, γ_1', γ_2 et γ_2'. Si γ_1 est fortement équivalent à γ_1', γ_2 à γ_2', tandis que γ_1 et γ_2 sont complètement concordants par rapport à a, alors γ_1' et γ_2' sont de même complètement concordants par rapport à a.*

Démonstration. Nous avons, par l'hypothèse de la concordance complète de γ_1 et γ_2 par rapport à a,

$$V(a) \cap B(\gamma_1) = V(a) \cap B(\gamma_2) \neq 0 .$$

Mais, par suite de l'équivalence forte entre γ_1 et γ_1' et entre γ_2 et γ_2', nous avons les égalités $B(\gamma_1) = B(\gamma_1')$, $B(\gamma_2) = B(\gamma_2')$, donc

$$V(a) \cap B(\gamma_1') = V(a) \cap B(\gamma_2') \neq 0$$

et γ_1' et γ_2' sont complètement concordants par rapport à a, ce qui démontre la proposition 24.

La concordance complète par rapport à un mot donné n'est pas un invariant de la relation d'équivalence entre contextes. En effet, nous avons la

PROPOSITION 25. *Il existe un langage paradigmatique $\mathscr{L} = \{ \Gamma, V, \Phi \}$, un mot $a \in \Gamma$ et quatre contextes de $\mathscr{L}$: γ_1, γ_1', γ_2 et γ_2', tels que γ_1 soit équivalent à γ_1', γ_2 à γ_2', γ_1 et γ_2 sont complètement concordants par rapport à a, mais γ_1' et γ_2' ne sont même pas concordants par rapport à a.*

Démonstration. Soit $\mathscr{L}$ le langage considéré dans la démonstration de la proposition 23, et attribuons à a, γ_1, γ_1', γ_2 et γ_2' les mêmes significations que dans la démonstration de la proposition 23. Il y a donc équivalence entre γ_1 et γ_1' et entre γ_2 et γ_2'. Il résulte de la proposition 23 que γ_1' et γ_2' ne sont pas concordants par rapport à a. Il reste à montrer que γ_1 et γ_2 sont complètement concordants par rapport à a. Cela est une conséquence du fait que

$$V(a) \cap B(\gamma_1) = V(a) \cap B(\gamma_2) = \{ b \} .$$

La proposition 25 est ainsi démontrée.

14. Propriétés d'invariance et de non-invariance de la relation de concordance

La concordance est un invariant de la relation d'équivalence forte entre contextes. En effet, nous avons la

Proposition 26. *Soient quatre contextes γ_1, γ'_1, γ_2 et γ'_2. Si γ_1 est fortement équivalent à γ'_1, γ_2 à γ'_2 et si γ_1 et γ_2 sont concordants, alors γ'_1 et γ'_2 sont aussi concordants.*

Démonstration. La concordance entre γ_1 et γ_2 revient à écrire que

$$A(\gamma_1) \cap A(\gamma_2) \neq 0 \quad \text{et si} \quad x \in A(\gamma_1) \cap A(\gamma_2) ,$$

alors

$$V(x) \cap B(\gamma_1) \cap B(\gamma_2) \neq 0 .$$

Mais, par suite de la proposition 5, l'équivalence forte implique l'équivalence, donc, en tenant compte des hypothèses, nous avons

$$A(\gamma_1) = A(\gamma'_1) , \quad A(\gamma_2) = A(\gamma'_2) , \quad B(\gamma_1) = B(\gamma'_1) , \quad B(\gamma_2) = B(\gamma'_2) .$$

En faisant ces substitutions dans les relations qui définissent la concordance entre γ_1 et γ_2, nous trouvons que $A(\gamma'_1) \cap A(\gamma'_2) \neq 0$ et, si $x \in A(\gamma'_1) \cap A(\gamma'_2)$, alors

$$V(x) \cap B(\gamma'_1) \cap B(\gamma'_2) \neq 0 .$$

Cela veut dire que γ'_1 et γ'_2 sont concordants. La proposition 26 est ainsi démontrée.

La concordance n'est pas un invariant de la relation d'équivalence entre contextes. En effet, nous avons la

Proposition 27. *Il existe un langage paradigmatique $\mathscr{L} = \{ \Gamma, V, \Phi \}$ et quatre contextes de $\mathscr{L}$: $\gamma_1, \gamma_2, \gamma'_1, \gamma'_2$, tels que γ_1 soit équivalent à γ'_1, γ_2 à γ'_2 ; γ_1 et γ_2 sont concordants, mais γ'_1 et γ'_2 ne le sont pas.*

Démonstration. Soit $\mathscr{L}$ le langage considéré dans la démonstration de la proposition 23 et γ_1, γ'_1, γ_2 et γ'_2 les contextes considérés dans la même démonstration. Nous avons $A(\gamma_1) \cap A(\gamma_2) = \{ a, b \} = V(a)$.

Conformément à la proposition 23, γ_1 et γ_2 sont concordants par rapport à a. Il en résulte, en vertu de la proposition 9, que γ_1 et γ_2 sont concordants par rapport à b, donc γ_1 et γ_2 sont concordants. Conformément à la proposition 23,

γ_1 est équivalent à γ'_1 et γ_2 à γ'_2. Mais conformément à la même proposition, γ'_1 et γ'_2 ne sont pas concordants par rapport à a, donc, *a fortiori*, γ'_1 et γ'_2 ne sont pas concordants.

15. Propriétés d'invariance et de non-invariance de la relation de concordance complète

La concordance complète est un invariant de la relation d'équivalence forte entre contextes. En effet, nous avons la

PROPOSITION 28. *Soient, dans un langage paradigmatique quelconque, quatre contextes γ_1, γ'_1, γ_2 et γ'_2. Si γ_1 est fortement équivalent à γ'_1 et γ_2 à γ'_2 et si γ_1 et γ_2 sont complètement concordants, alors γ'_1 et γ'_2 sont eux aussi complètement concordants.*

Démonstration. En vertu de la proposition 5, l'équivalence forte implique l'équivalence, donc, en tenant compte des hypothèses, nous avons

$$A(\gamma_1) = A(\gamma'_1)\,, \quad A(\gamma_2) = A(\gamma'_2)\,, \quad B(\gamma_1) = B(\gamma'_1)\,, \quad B(\gamma_2) = B(\gamma'_2)\,.$$

Puisque γ_1 et γ_2 sont complètement concordants, nous avons

$$A(\gamma_1) \cap A(\gamma_2) \neq 0\,,$$

donc

$$A(\gamma_1) \cap A(\gamma_2) = A(\gamma'_1) \cap A(\gamma'_2) \neq 0\,.$$

Soient maintenant $x \in A(\gamma'_1) \cap A(\gamma'_2)$. Nous avons, par suite de la concordance complète de γ_1 avec γ_2,

$$V(x) \cap B(\gamma'_1) = V(x) \cap B(\gamma_1) = V(x) \cap B(\gamma_2) = V(x) \cap B(\gamma'_2) \neq 0\,,$$

donc γ'_1 et γ'_2 sont complètement concordants et la proposition 28 est établie.

La concordance complète n'est pas un invariant de la relation d'équivalence entre contextes. En effet, nous avons la

PROPOSITION 29. *Il existe un langage paradigmatique $\mathscr{L} = \{\Gamma, V, \Phi\}$ et quatre contextes de $\mathscr{L}$: γ_1, γ'_1, γ_2 et γ'_2 tels que γ_1 soit équivalent à γ'_1, γ_2 à γ'_2 ; γ_1 et γ_2 sont complètement concordants, mais γ'_1 et γ'_2 ne le sont pas.*

Démonstration. Soit $\mathscr{L}$ le langage considéré dans les démonstrations des propositions 23, 25 et 27 ; attribuons à γ_1, γ'_1, γ_2, γ'_2 et a leurs significations dans ces démonstrations. En vertu de la proposition 23, γ_1 est équivalent à γ'_1 et γ_2 à γ'_2. D'après la proposition 27, γ'_1 et γ'_2 ne sont pas concordants, donc *a fortiori* ils ne sont pas complètement concordants. Par suite de la proposition 23, γ_1 et γ_2 sont complètement concordants par rapport à a. Par suite de la proposition 11 et en tenant compte du fait que $b \in V(a)$, γ_1 et γ_2 sont complètement concordants par rapport à b. Mais nous avons

$$A(\gamma_1) \cap A(\gamma_2) = \{ a, b \},$$

donc γ_1 et γ_2 sont complètement concordants par rapport à tout mot admis aussi bien par γ_1 que par γ_2.

Il en résulte que γ_1 et γ_2 sont complètement concordants et la proposition 29 est démontrée.

16. D'autres propriétés d'invariance

Les quatre propositions suivantes s'établissent sans difficulté.

PROPOSITION 30. *Dans tout langage paradigmatique $\mathscr{L} = \{ \Gamma, V, \Phi \}$, la concordance des contextes par rapport à un ensemble $A \subseteq \Gamma$ est un invariant de la relation d'équivalence forte entre contextes.*

Démonstration. Soient γ_1 fortement équivalent à γ_1', γ_2 fortement équivalent à γ_2', γ_1 concordant avec γ_2 par rapport à $A \subseteq \Gamma$. Cela veut dire que $A \subseteq E(\gamma_1, \gamma_2)$. En vertu de la proposition 22, $E(\gamma_1, \gamma_2) = E(\gamma_1', \gamma_2')$, donc $A \subseteq E(\gamma_1', \gamma_2')$; γ_1' et γ_2' sont donc concordants par rapport à A et la proposition 30 est démontrée.

PROPOSITION 31. *Il existe un langage paradigmatique $\mathscr{L} = \{ \Gamma, V, \Phi \}$ et un ensemble $A \subseteq \Gamma$, tel que la concordance par rapport à A n'est pas un invariant de la relation d'équivalence entre contextes.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 23.

PROPOSITION 32. *Dans tout langage paradigmatique $\mathscr{L} = \{ \Gamma, V, \Phi \}$, la concordance complète entre contextes, par rapport à un ensemble $A \subseteq \Gamma$, est un invariant de la relation d'équivalence forte entre contextes.*

Démonstration. On procède comme pour la démonstration de la proposition 30, à la seule différence qu'au lieu des ensembles $E(\gamma_1, \gamma_2)$, $E(\gamma_1', \gamma_2')$, on utilise les ensembles $F(\gamma_1, \gamma_2)$, $F(\gamma_1', \gamma_2')$ et qu'à la place de la proposition 22 on utilise la proposition 24.

PROPOSITION 33. *Il existe un langage paradigmatique $\mathscr{L} = \{ \Gamma, V, \Phi \}$ et un ensemble $A \subseteq \Gamma$, tels que la concordance complète par rapport à A n'est pas un invariant de la relation d'équivalence entre contextes.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 25.

Les deux propositions suivantes sont immédiates.

PROPOSITION 34. *Si γ_1 et γ_2 sont deux contextes équivalents et si γ_1 est repéré, alors γ_2 est également repéré.*

PROPOSITION 35. *Si γ_1 et γ_2 sont deux contextes concordants et si γ_1 est repéré, alors γ_2 est lui aussi repéré.*

17. Contextes congruents et contextes complètement congruents

Il s'agit de deux notions nouvelles.

Soient deux contextes γ_1 et γ_2. Nous dirons que γ_1 et γ_2 sont *congruents*, et nous écrivons $\gamma_1 \approx \gamma_2$, s'il existe une suite finie de contextes $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_i, \delta_{i+1}, ..., \delta_n$, ayant les trois propriétés suivantes : 1) $\delta_1 = \gamma_1$; 2) $\delta_n = \gamma_2$; 3) pour tout nombre naturel $i < n$, les contextes δ_i et δ_{i+1} sont concordants.

Si dans la condition 3) de la définition ci-dessus, nous pouvons remplacer le terme « concordants » par le terme « complètement concordants », nous dirons que γ_1 et γ_2 sont complètement congruents et nous écrivons $\gamma_1 \approxeq \gamma_2$.

Il est clair que deux contextes concordants sont congruents et que deux contextes complètement concordants sont complètement congruents. Comme nous le verrons un peu plus loin, il existe des contextes congruents qui ne sont pas concordants et des contextes complètement congruents qui ne sont pas complètement concordants.

PROPOSITION 36. *La relation de congruence est une relation d'équivalence dans l'ensemble $\mathscr{C}$ des contextes repérés d'un langage quelconque.*

Démonstration. Il est clair que pour tout $\gamma \in \mathscr{C}$ nous avons $A(\gamma) \neq 0$; il résulte de la proposition 20 que la relation $\approx$ est réflexive dans $\mathscr{C}$.

La symétrie de la relation $\approx$ résulte du fait que la relation de concordance est symétrique.

Pour établir la transitivité de la relation $\approx$ dans $\mathscr{C}$, soient γ_1, γ_2 et γ_3 trois contextes repérés et tels que $\gamma_1 \approx \gamma_2$, $\gamma_2 \approx \gamma_3$. Il existe donc deux suites finies de contextes $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_i, ..., \delta_n, \eta_1, \eta_2, ..., \eta_j, ..., \eta_m$, telles que $\gamma_1 = \delta_1$, $\gamma_2 = \delta_n = \eta_1$, $\gamma_3 = \eta_m$ tandis que δ_i est concordant avec δ_{i+1} pour $i < n$, et η_j l'est avec η_{j+1} pour $j < m$.

Soit la chaîne $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n, \delta_{n+1}, ..., \delta_{n+m-1}$, où $\delta_{n+k} = \eta_{k+1}$ pour

$$0 \leqslant k \leqslant m - 1 .$$

On voit facilement que δ_i et δ_{i+1} sont concordants pour tout $i < n + m - 1$. En même temps, nous avons $\delta_1 = \gamma_1$ et $\delta_{n+m-1} = \gamma_3$. Donc γ_1 et γ_3 sont congruents et la proposition 36 est démontrée.

Observations. Puisque γ_1 est un contexte repéré, il s'ensuit, en vertu de la proposition 35, appliquée d'une manière successive, que tous les contextes δ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et η_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ sont repérés.

Nous observerons en même temps que la symétrie et la transitivité de la relation $\approx$ n'ont pas lieu seulement dans $\mathscr{C}$, mais aussi dans l'ensemble de tous les contextes du langage considéré.

PROPOSITION 37. *La relation de congruence complète est une relation d'équivalence dans l'ensemble des contextes repérés.*

Démonstration. On procède comme pour la démonstration de la proposition 36, à la seule différence qu'au lieu de la proposition 20 on utilise la proposition 21.

18. Définition du cas

En vertu de la proposition 36, les contextes repérés se répartissent en classes de congruence, c'est-à-dire en classes d'équivalence par rapport à la relation $\approx$. Toute classe de congruence dans l'ensemble des contextes repérés constituera, par définition, un *cas grammatical* ou, purement et simplement, un *cas*.

Il est donc clair que chaque contexte repéré appartient à un *cas grammatical* et à un seul seulement.

En vertu de la proposition 37, les contextes repérés se répartissent aussi en classes d'équivalence par rapport à la relation de congruence complète. Toute classe de congruence complète sera, par définition, un *cas grammatical complet*.

Comparaison avec la langue roumaine. — Soit le contexte γ = (*El, la şcoală*). Le mot *merg* est admis par γ, car il existe une forme flexionnelle de *merg*, à savoir *merge*, qui est directement admise par γ.

Soit γ' = (*Ei, la şcoală*). Les contextes γ et γ' sont concordants par rapport à *alergăm*, étant donné qu'il existe une forme flexionnelle d'*alergăm*, à savoir *aleargă*, qui est directement admise en même temps par γ et par γ'. Mais γ et γ' ne sont pas complètement concordants par rapport à *alergăm*, étant donné que la forme *alerga* est directement admise par γ, sans être directement admise par γ'. En même temps, γ et γ' sont concordants puisque, pour tout verbe, la forme de la troisième personne du subjonctif singulier coïncide avec la forme de la troisième personne du subjonctif pluriel, par conséquent cette forme est directement admise par γ et γ'.

Soient maintenant γ_1 = (*Uşa, noastre este deschisă*), γ_2 = (*Uşile, noastre sînt deschise*). γ_1 et γ_2 sont concordants par rapport à *casă*, car il existe une forme de *casă*, par exemple *casei*, qui est directement admise par γ_1 et γ_2. En admettant que tout mot de $A(\gamma_1) \cap A(\gamma_2)$ est un substantif, la forme du génitif singulier d'un tel mot est directement admise par γ_1 et γ_2, donc γ_1 et γ_2 sont concordants. Considérant que la phrase *Uşile casele noastre sînt deschise* n'est pas repérée, il s'ensuit que γ_1 et γ_2 sont complètement concordants par rapport à *casă*, étant donné que les seules formes appartenant à $A(\gamma_1) \cap A(\gamma_2)$ sont *casei* et *caselor* et que chacune de ces formes est directement admise aussi bien par γ_1 que par γ_2. Il en résulte immédiatement que γ_1 et γ_2 sont complètement concordants.

Pour donner un nouvel exemple, soient γ_1 = (*un, mare*), γ_2 = (*se consideră in postura de, vechi*), γ_3 = (*vorbim cu, vechi*). γ_1 et γ_2 sont concordants par rapport à *om*, étant donné que *om* est directement admis par γ_1 et γ_2, mais ils ne sont pas complètement concordants par rapport à *om*, puisque la forme *oameni* est directement admise par γ_2, mais ne l'est pas par γ_1. En général, tout mot x admis par γ_1 et γ_2 admet une forme directement admise par γ_1 et γ_2, donc γ_1 et γ_2 sont concordants, mais ils ne sont pas complètement concordants. En ce qui concerne les contextes γ_2 et γ_3, ceux-ci sont concordants par rapport à *om*, étant donné que la forme *oameni* est directement admise par γ_2 et γ_3. Mais ils ne sont pas complètement concordants par rapport à *om*, étant donné que la forme *om* est directement admise par γ_2, mais non par γ_3. En général, tout mot admis par γ_2 et γ_3 admet une forme directement admise par γ_2 et γ_3, donc γ_2 et γ_3 sont concordants, mais ils ne sont pas complètement concordants. En conclusion, γ_1 et γ_3 sont deux contextes congruents, ils appartiennent donc au même cas grammatical.

Si nous tenons compte du fait que *om* est admis par γ_1 et que *omul*, *oameni* et *oamenii* sont des formes admises par γ_3, nous pouvons dire que la relation de congruence entre γ_1 et γ_3 enregistre ce qui, dans la grammaire traditionnelle, correspond à l'appartenance des formes *om*, *omul*, *oameni*, *oamenii* au même cas grammatical : le nominatif. Par conséquent, la classe de congruence des contextes γ_1, γ_2 et γ_3 définit le cas nominatif.

Il est intéressant de constater, dans l'exemple ci-dessus, que γ_1 et γ_3 ne sont pas concordants. En effet, le mot *om* est admis en même temps par γ_1 et par γ_3, mais γ_1 et γ_3 ne sont pas concordants par rapport à *om*, étant donné qu'il n'existe aucune forme de *om* qui soit directement admise aussi bien par γ_1 que par γ_3.

Mais il existe aussi, comme on peut le constater sur des exemples simples, des phénomènes parasites, qui marquent une non-concordance du modèle présenté plus haut avec la situation régnant dans les langues naturelles. Revzin [16] a mentionné des phénomènes de ce genre pour la langue russe (voir plus loin) ; ils ont également leur analogue dans la langue roumaine. L'amélioration du modèle ci-dessus s'impose donc.

Comparaison avec la langue russe. — Soient $f_1 = \theta$ (*), $f_2 =$ кипит, $g_1 =$ кошка пьет, $g_2 = \theta$, $h_1 =$ кошка любит, $h_2 = \theta$, $j_1 = \theta$, $j_2 =$ пьет молоко.

Le mot вода est directement admis par les contextes (g_1, g_2) et (h_1, h_2), étant donné qu'il est correct d'écrire кошка пьет воду et кошка любит воду. Les contextes (f_1, f_2) et (g_1, g_2) sont concordants par rapport à молоко, mais non par rapport à вода, car nous pouvons dire вода кипит et кошка пьет воду mais nous ne pouvons dire ni воду кипит, ni кошка пьет вода. Les contextes (мальчик идет, θ) et (мальчик идет по, θ) ne sont pas concordantspar rapport à берег. Les contextes (θ, строит дом) et (дом строится, θ) ne sont pas concordants par rapport à рабочий. Les contextes $c_1 = (\theta$, бежала) et $c_2 = (\theta$, бежит) sont concordants. Les contextes c_1 et $c_3 = (\theta$, бежал) sont congruents,

Par θ on désigne la phrase vide.

puisque dans la chaîne $c_1 - c_2 - c_3$ deux contextes consécutifs sont concordants.

On constate toutefois l'inconvénient suivant. Les contextes (я вижу синий, θ) et (синий, θ) sont concordants, donc congruents, bien qu'il s'agisse là, du point de vue de la grammaire traditionnelle de cas différents. Pour éviter cet inconvénient, V. A. Uspenskiĭ [19] a proposé de renoncer à des contextes avec adjectifs, adjectifs numéraux ordinaux, etc. Dans [19] il considère comme un inconvénient le fait que des formes différentes d'un seul et même substantif puissent être directement admises par le même contexte. Par exemple, les formes газеть et газету sont directement admises par le contexte (не читал, θ) ; les formes кощке et кошку sont directement admises par le contexte (дал, θ). Pour éviter cet inconvénient, Uspenskiĭ [19] propose de limiter les classes des contextes considérés, de manière qu'il ne soit pas possible que deux formes flexionnelles distinctes d'un seul et même mot puissent être directement admises par le même contexte.

Observations. Les exemples provenant de la langue russe, donnés ci-dessus, sont empruntés à [19], où l'auteur utilise l'expression d'« équivalence par rapport à a » au lieu de « concordance par rapport à a ». Toujours dans [19], il désigne par contextes directement équivalents » ce que dans le présent travail nous avons dénommé « contextes concordants » et par « contextes absolument équivalents » ce que nous avons appelé « contextes congruents ». Comme nous l'avons vu plus haut, ni la relation de concordance par rapport à un mot, ni la relation de concordance de deux contextes ne sont des relations d'équivalence, étant donné qu'elles ne sont pas transitives dans l'ensemble des contextes ; par conséquent, les dénominations utilisées dans [19] sont inopportunes.

Il est nécessaire pour l'interprétation linguistique concrète d'un modèle, de procéder à une sélection dans l'ensemble des contextes ; cela confirme l'importance de l'idée de Z. S. Harris ([4], [5]), qui prend en considération des contextes différenciateurs ou diagnostiques (*diagnostic environment*, *differentiating environments*), le choix judicieux de ces contextes étant une condition essentielle pour la valeur d'un modèle. Ce choix montre en même temps que les différents contextes où apparaît un élément ne sont pas significatifs au même degré pour la situation syntaxique de cet élément. Il existe une hiérarchie des contextes et il est probable que le critère statistique joue aussi son rôle dans la détermination de cette hiérarchie.

19. Etats congruents

Soit un langage paradigmatique $\{ \Gamma, V, \Phi \}$.

Soient K un ensemble d'éléments dits *objets* ou *contenus* et $\mathscr{S}$ un ensemble d'éléments appelés *états*. Soit φ une application de l'ensemble K dans l'ensemble des parties de $\mathscr{S}$. Notons par Z l'ensemble de toutes les paires ordonnées $\{ x, t \}$, où $x \in K$ et $t \in \varphi(x)$. Considérons une application ψ de l'ensemble Z dans l'ensemble Γ, telle que pour tout $x \in K$, $t_1 \in \varphi(x)$ et $t_2 \in \varphi(x)$ nous ayons, en posant $z_1 = \{ x, t_1 \}$, $z_2 = \{ x, t_2 \}$,

$$\psi(z_2) = V(\psi(z_1)) .$$

Deux états s_1 et s_2 sont, par définition, *congruents* par *rapport à l'objet x* si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1° $s_1 \in \varphi(x)$;
2° $s_2 \in \varphi(x)$;
3° en posant $z_1 = \{ x, s_1 \}$, $z_2 = \{ x, s_2 \}$, nous avons $\psi(z_1) = \psi(z_2)$.

Si, quel que soit l'objet $x \in K$, les conditions 1° et 2° impliquent la condition 3°, nous dirons que les états s_1 et s_2 sont *congruents.*

Il est visible que la relation de congruence par rapport à un objet x est une relation d'équivalence dans l'ensemble $\mathscr{S}$.

PROPOSITION 38. *La congruence n'est pas, en général, une relation transitive dans* $\mathscr{S}$.

Démonstration. Soient

$$\Gamma = \{ a, b, c, d \} , \quad V(a) = V(b) = \{ a, b \} , \quad V(c) = \{ c \} ,$$
$$K = \{ x_1, x_2, x_3 \} , \quad \mathscr{S} = \{ s_1, s_2, s_3 \} .$$

Définissons l'application φ de la manière suivante :

$$\varphi(x_1) = \{ s_1, s_2 \} , \quad \varphi(x_2) = \{ s_2, s_3 \} \quad \text{et} \quad \varphi(x_3) = \{ s_1, s_3 \} .$$

Nous définirons l'application ψ de la manière suivante :

$$\psi(\{ x_1, s_1 \}) = \psi(\{ x_1, s_2 \}) = a , \quad \psi(\{ x_2, s_2 \}) = \psi(\{ x_2, s_3 \}) = c ,$$
$$\psi(\{ x_3, s_1 \}) = a , \quad \psi(\{ x_3, s_3 \}) = b .$$

Nous voyons que les états s_1 et s_2 sont congruents par rapport à l'objet x_1, étant donné que $\psi(\{ x_1, s_1 \}) = \psi(\{ x_1, s_2 \})$; mais x_1 est le seul objet x pour lequel $s_1 \in \varphi(x)$ et $s_2 \in \varphi(x)$, donc s_1 et s_2 sont congruents.

L'état s_2 est congruent avec l'état s_3 par rapport à l'objet x_2, étant donné que $\psi(\{ x_2, s_2 \}) = \psi(\{ x_2, s_3 \})$; mais x_2 est le seul objet x pour lequel $s_2 \in \varphi(x)$ et $s_3 \in \varphi(x)$, donc s_2 et s_3 sont deux états congruents.

Bien que s_1 soit congruent avec s_2 et s_2 avec s_3, s_1 n'est pas congruent avec s_3. En effet, nous avons $s_1 \in \varphi(x_3)$, $s_3 \in \varphi(x_3)$, mais $\psi(\{ x_3, s_1 \}) \neq \psi(\{ x_3, s_3 \})$, donc pour les états s_1 et s_2 les conditions 1° et 2° n'impliquent pas la condition 3°.

La proposition 38 est ainsi démontrée.

20. Cas dans le sens de Kolmogorov

La relation de congruence par rapport à un objet représente ce qui au paragraphe 1 de [19] est désigné par « équivalence par rapport à un objet ». La relation de congruence désigne ce qui au paragraphe 1 de [19] est appelé « équivalence absolue ». Ainsi qu'il résulte de la proposition 38, la relation de congruence n'est pas une relation d'équivalence dans $\mathscr{S}$; par conséquent, la dénomination d'« équivalence absolue » est inopportune. Les classes de congruence ne sont donc pas disjointes deux à deux. Cette constatation contredit l'affirmation de la page 12 de [19], selon laquelle l'ensemble des états se décompose en classes disjointes, telles que deux états de la même classe soient absolument équivalents et que deux états de classes différentes ne soient pas absolument équivalents. Il s'ensuit que la définition des cas comme classes d'équivalence absolue (telle qu'elle est donnée au paragraphe 1 de [19]) conduit à la possibilité que le même état appartienne à plusieurs cas. Cela correspond à une situation qui existe dans les langues naturelles. D'autre part, il est possible que cette définition des cas conduise à un grand nombre de situations parasites, qui éloignent trop le modèle du cas des situations intuitives ayant constitué le point de départ. Dans une première étape, il est toutefois préférable de définir les cas en nous fondant sur une relation d'équivalence ; c'est ainsi que l'on a construit des modèles de la partie du discours [10], [11], [16], du genre [12], [13] et d'autres catégories grammaticales.

Dans ce qui suit, nous utiliserons pour les classes de congruence la dénomination de *cas dans le sens de Kolmogorov*.

21. Etats absolument congruents

Nous allons définir dans l'ensemble $\mathscr{S}$ une nouvelle relation binaire, de la manière suivante. Nous dirons que deux états s_1 et s_2 sont *absolument congruents* si les trois conditions suivantes sont remplies :

1° Si $s_1 \in \varphi(x)$, alors $s_2 \in \varphi(x)$;

2° Si $s_2 \in \varphi(x)$, alors $s_1 \in \varphi(x)$;

3° Si x est un objet pour lequel $s_1 \in \varphi(x)$ et $s_2 \in \varphi(x)$, alors nous avons $\psi(z_1) = \psi(z_2)$, où $z_1 = \{ x, s_1 \}$ et $z_2 = \{ x, s_2 \}$.

PROPOSITION 39. *La congruence absolue est une relation d'équivalence dans* $\mathscr{S}$.

Démonstration. La réflexivité et la symétrie de la relation de congruence absolue sont évidentes. Pour établir la transitivité de cette relation, considérons trois états s_1, s_2 et s_3 et supposons que s_1 soit absolument congruent avec s_2 et s_2 avec s_3. Nous allons montrer que s_1 est absolument congruent avec s_3.

Soit x un objet pour lequel $s_1 \in \varphi(x)$. Etant donné que s_1 est absolument congruent avec s_2, $s_2 \in \varphi(x)$; du fait que s_2 est absolument congruent avec s_3, cela entraîne que $s_3 \in \varphi(x)$. Nous avons établi ainsi que si $s_1 \in \varphi(x)$, alors $s_3 \in \varphi(x)$.

Soit x un objet pour lequel $s_3 \in \varphi(x)$. Puisque x_2 est absolument congruent avec s_3, $s_2 \in \varphi(x)$; du fait que s_1 est absolument congruent avec s_2, cela entraîne que $s_1 \in \varphi(x)$. Nous avons établi ainsi que si $s_3 \in \varphi(x)$, alors $s_1 \in \varphi(x)$.

Soit x un objet pour lequel $s_1 \in \varphi(x)$ et $s_3 \in \varphi(x)$. Du fait que $s_1 \in \varphi(x)$, $s_2 \in \varphi(x)$. Posons $z_1 = \{ x, s_1 \}$, $z_2 = \{ x, s_2 \}$, $z_3 = \{ x, s_3 \}$; s_1 étant congruent avec s_2, il s'ensuit que $\psi(z_1) = \psi(z_2)$. Puisque s_2 est congruent avec s_3, il en résulte que $\psi(z_2) = \psi(z_3)$. Donc $\psi(z_1) = \psi(z_3)$ et la transitivité de la relation de congruence absolue est établie.

La proposition 39 est complètement démontrée.

Proposition 40. *Deux états absolument congruents sont congruents, mais la réciproque n'est pas vraie.*

Démonstration. Soient s_1 et s_2 deux états absolument congruents. Cela signifie que les conditions 1°, 2° et 3°, de la définition de la congruence absolue, sont remplies. Mais la condition 3° de cette définition exprime précisément la congruence des états s_1 et s_2.

Pour donner un exemple d'états congruents qui ne sont pas absolument congruents, nous allons considérer les états s_1 et s_2 de la démonstration de la proposition 38. Comme nous l'avons montré, ces états sont congruents. Cependant, ils ne sont pas absolument congruents, étant donné que $s_1 \in \varphi(x_3)$, tandis que $s_2 \notin \varphi(x_3)$. La condition 1° de la définition de la congruence absolue est ainsi transgressée.

On montre d'une façon analogue que les états s_2 et s_3 de la démonstration de la proposition 38 ne sont pas non plus absolument congruents.

22. Cas sémantiques

Il nous est possible de donner la définition suivante du *cas sémantique*. Nous appellerons *cas sémantiques* les classes d'équivalence déterminées dans $\mathscr{S}$ par la relation de congruence absolue. Il en résulte que deux états appartiennent au même cas sémantique si, et seulement si, ils sont absolument congruents. Chaque état appartient à un cas sémantique et à un seul.

Il résulte de la proposition 40 que : *Si deux états appartiennent au même cas sémantique, alors ils appartiennent au même cas dans le sens de Kolmogorov, mais la réciproque n'est pas vraie.*

Exemples. Nous emprunterons d'abord à [19] quelques exemples tirés du russe.

L'objet appelé en russe молоко (lait) peut apparaître sous les états suivants : il peut bouillir, il peut ne pas exister, il peut être bu par le chat, il peut être bu par le chien, etc. Nous avons donc $x =$ l'objet appelé молоко, $s_1 =$ la possibilité de bouillir, s_2 = la possibilité de ne pas exister, s_3 = la possibilité d'être bu par le chat, s_4 = la possibilité d'être bu par le chien, etc. L'application φ est telle que $s_1 \in \varphi(x)$, $s_2 \in \varphi(x)$, $s_3 \in \varphi(x)$, $s_4 \in \varphi(x)$, etc. Nous avons ensuite $\psi(\{x, s_1\})$ = молоко (молоко кипит — le lait bout), $\psi(\{x, s_2\})$ = молока (молока нет — il n'y a pas de lait), $\psi(\{x, s_3\})$ = молоко (кощка пьет молоко — le chat boit du lait), $\psi(\{x, s_4\})$ = молоко (собака пьет молоко — le chien boit du lait). Comme nous le voyons, les états s_1, s_3 et s_4 sont congruents, deux à deux, par rapport à l'objet x ; en revanche, les états s_1 et s_2, s_3 et s_2, s_4 et s_2 ne sont pas congruents par rapport à x.

On constate que deux états peuvent être congruents par rapport à un certain objet, mais non congruents par rapport à un autre ; de sorte que les états s_1 et s_3, dont nous avons vu qu'ils sont congruents par rapport à x, ne le son pas par rapport à l'objet y, désigné par la dénomination вода (eau). En effet, nous avons $\psi(\{y, s_1\})$ = вода (вода кипит — l'eau bout), mais $\psi(\{y, s_3\})$ = = воду (кощка пьет воду — le chat boit de l'eau), donc $\psi(\{y, s_1\}) \neq$ $\neq \psi(\{y, s_3\})$. Il s'ensuit que les états s_1 et s_3 ne sont pas congruents.

23. Certains inconvénients

L'utilisation, dans l'analyse concrète des langues naturelles, des notions introduites ci-dessus fait apparaître des difficultés dues plus spécialement au caractère trop large des paradigmes ordinaires, c'est-à-dire celui des ensembles $V(u)$, pour $u \in \Gamma$. Si $V(u)$ inclut, pour chaque substantif u, l'ensemble de ses formes flexionnelles, abstraction faite de leur nombre et, le cas échéant, du fait qu'elles sont ou non accompagnées d'un article, on se heurte à des difficultés lorsqu'on essaie d'appliquer à des langues naturelles le modèle décrit plus haut. Comme le constate également V. A. Uspenskiĭ [19, § 1], un état d'un objet peut parfois être exprimé par plusieurs formes du mot qui désigne l'objet en question. Par exemple, dans les propositions мальчик идет берегом et мальчик идет по берегу, les formes берегом et берегу expriment le même état du substantif берега ; dans les propositions рабочий стройт дом et дом строится рабочими les formes рабочими et рабочий expriment le même état de l'objet désigné par le mot рабочий. De même, en roumain les propositions « pisica sare gardul », « pisica sare gardurile » et « pisica sare un gard », peuvent être considérées comme exprimant le même état du substantif « gard ». Ces exemples suggéreraient que l'application ψ de l'ensemble Z dans l'ensemble Γ ne remplit pas, dans les langues naturelles, la condition d'univocité. On peut remédier à cette situation en prenant les deux précautions suivantes : *a*) considérer une partition V aussi fine que possible en admettant, par exemple, que la pluralité des exemplaires d'un objet x constitue un nouvel objet y, distinct de x, tandis que la considération au singulier non déterminé d'un objet déterminé x conduit à un nouvel objet z distinct aussi bien de x que de y ; *b*) établir une convention excluant la synonymie absolue ; cela voudrait dire qu'il faudrait admettre que deux formes distinctes du même mot ne pourraient pas exprimer exactement le même état, ainsi la proposition мальчик идет берегом exprime une autre nuance, un autre état de l'objet désigné par берега que la proposition мальчик идет по берегу, et les propositions roumaines « pisica bea apa » et « pisica bea apă » expriment des hypostases différentes de l'objet désigné par le mot « apă ». Les desiderata exprimés aux points *a*) et *b*) sont acceptables du point de vue linguistique. Beaucoup d'auteurs considèrent qu'il n'existe pas de synonymie absolue. D'autre part, le desideratum *a*) revient à considérer que, dans la description de la catégorie du cas, les catégories de nombre et de détermination sont déjà analysées.

24. Un analogue au cas de Kolmogorov sur le plan de l'expression, proposé par Revzin

Dans [16], paragraphe 23, I. I. Revzin propose un analogue au cas de Kolmogorov sur le plan de l'expression. Voici à quoi revient cette proposition. Deux contextes (f_1, g_1) et (f_2, g_2) sont *équivalents par rapport à un mot* x si x est admis aussi bien par le contexte (f_1, g_1) que par le contexte (f_2, g_2). Ainsi, en notant par θ la phrase nulle et en posant $f_1 = \theta$, $g_1 =$ кипит, $f_2 =$ кошка пьет, $g_2 = \theta$, $x =$ молоко, les contextes (f_1, g_1) et (f_2, g_2) sont équivalents par rapport à x, mais ne le sont pas par rapport à $y =$ вода ; (f_1, g_1) et (f_2, g_2) sont, par définition, absolument équivalents s'ils sont équivalents par rapport à tout mot directement admis par au moins l'un des deux contextes considérés. Il est facile de vérifier que l'équivalence absolue est une relation réflexive, symétrique et transitive dans l'ensemble des contextes ; il s'agit donc d'une véritable relation d'équivalence. I. I. Revzin dénomme « cas » les classes d'équivalence absolue. Nous les appellerons *cas dans le sens de Revzin*.

25. Signification du cas de Revzin

En fait, la définition proposée par I. I. Revzin n'est pas l'analogue, sur le plan contextuel, de la définition de Kolmogorov, mais de la définition du cas sémantique ; en effet, la relation d'équivalence absolue entre contextes ne correspond pas à la relation de congruence entre états, mais à la relation de congruence absolue entre états. I. I. Revzin a corrigé ainsi, sur le plan contextuel, l'omission de la définition de Kolmogorov, où il est question d'une relation binaire qui n'est pas une relation d'équivalence.

Pour étudier les cas dans le sens de Revzin, nous rappellerons d'abord la notion de famille (voir les chapitres I et V). En utilisant la terminologie introduite dans le présent chapitre, nous pouvons dire que deux mots x et y font partie de la même famille si et seulement si y est directement admis par tout contexte qui admet directement x, et si x est directement admis par tout contexte pour lequel y est directement admis.

Soit C un cas dans le sens de Revzin.

Nous dirons qu'un mot x *est accepté par le cas* C (ou *pour le cas* C) s'il existe un contexte $(f, g) \in C$, tel que la phrase fxg soit repérée.

La proposition suivante est évidente.

PROPOSITION 41. *Un mot x est accepté par le cas C si et seulement si la phrase fxg est repérée pour tout contexte* $(f, g) \in C$.

PROPOSITION 42. *Si les mots x et y appartiennent à la même famille, il existe un cas pour lequel x et y sont acceptés.*

Démonstration. Etant donné que tout mot entre dans au moins une phrase repérée, il existe un contexte (f, g) admettant directement x. Soit C le cas auquel appartient le contexte (f, g). Nous en déduisons que x est accepté par C. D'autre part, puisque la phrase fxg est repérée et que y fait partie de la même famille que x, fyg est repérée, donc y est directement admis par (f, g), donc y est accepté par le cas C.

Le raisonnement utilisé pour la démonstration de la proposition 42 conduit directement à la

PROPOSITION 43. *Soient x et y deux mots appartenant à la même famille. Dans ces conditions, x est accepté par un cas C si et seulement si y est accepté par C.*

La réciproque de la proposition 43 est vraie. En effet, nous avons la

PROPOSITION 44. *Soient x et y deux mots ayant la propriété suivante : x est accepté par un cas C si et seulement si y est accepté par C. Dans ces conditions, x et y appartiennent à la même famille.*

Démonstration. Admettons, pour raisonner par l'absurde, que x et y n'appartiennent pas à la même famille. Cela veut dire qu'il existe un contexte (f, g) pour lequel l'un des mots x, y est directement admis, mais pas l'autre. Soient, pour fixer les idées, fxg repérée et fyg non repérée. Du fait que fxg est repérée, nous déduisons que x est accepté par le cas C auquel appartient le contexte (f, g). Puisque fyg est une phrase non repérée, il résulte de la proposition 41 que y n'est pas accepté par le cas C. Nous avons trouvé ainsi un cas C qui accepte x, mais pas y. Cela contredit l'hypothèse ; donc la supposition que x et y n'appartiendraient pas à la même famille est fausse.

26. Exemples et exemples contraires

La réciproque de la proposition 42 n'est pas vraie. En effet, nous avons la

PROPOSITION 45. *Il existe un langage paradigmatique* $\mathscr{L}$, *un cas C de* $\mathscr{L}$ *et* *deux mots x et y de $\mathscr{L}$, tels que x et y soient acceptés par C, mais n'appartiennent pas à la même famille.*

Démonstration. Soient $\Gamma = \{ a, \ b, \ c, \ d \}$, $\Phi = \{ aba, aca, dda, ddd \}$. Il est inutile de préciser la partition V, car elle n'intervient pas dans la définition du cas au sens de Revzin.

Les mots a et d ne font pas partie de la même famille. Nous allons montrer qu'il existe pourtant un cas pour lequel a et d sont acceptés. Soit le contexte $\alpha = (dd, \theta)$. Les seuls mots directement admis par α sont a et d. Nous avons les contextes suivants, équivalents à α par rapport à d :

$$(\theta, da) \, , (d, a) \, , (\theta, dd) \, , (d, d) \, .$$

Mais aucun de ces contextes n'est équivalent à α par rapport à a, bien que a soit directement admis par α. Il s'ensuit qu'il n'existe aucun contexte différent de α et absolument équivalent à α. Donc α appartient au cas formé de l'unique contexte α. Nous noterons $C(\alpha)$ ce cas. Nous constatons que, bien que a et d soient acceptés par le cas $C(\alpha)$, aucun de ces deux mots ne domine l'autre.

Par contre, puisque b et c se trouvent dans la même famille, il s'ensuit, en vertu de la proposition 43, qu'un cas est accepté par b si et seulement si ce cas est accepté par c. Il existe un seul cas pour lequel b est accepté ; celui auquel appartient le contexte (a, a). Donc les mots acceptés par le cas auquel appartient (a, a) font partie de la même famille, tandis que les mots acceptés par le cas $C(\alpha)$ n'en font pas partie.

Quelques exemples empruntés à la langue roumaine. — Les contextes (*casa*, θ), et (*casa*, *meu*) sont équivalents par rapport à *vecinului* mais non par rapport à *mare*. Les contextes (*casa*, θ) et (*casa*, *este frumoasă*) sont absolument équivalents, étant donné que tout mot directement admis par l'un d'eux est directement admis par l'autre. (*Mare*, *mea*, *vecinului*, etc. sont des mots de ce genre.) Donc les contextes (*casa*, θ) et (*casa*, *este frumoasă*) appartiennent au même cas, dans le sens de Revzin.

Observation. Les cas au sens de Revzin sont indépendants de la partition V. Dans le cas particulier où $V(x) = \{ x \}$ pour tout x (cas où la langue considérée est une langue isolante), la relation de concordance de deux contextes par rapport à un mot x n'est autre que la relation d'équivalence de deux contextes par rapport au mot x. En revanche, la relation de concordance de deux contextes ne coïncide pas avec la relation d'équivalence absolue. Ainsi, pour nous référer à la langue utilisée dans la démonstration de la proposition 45, les contextes $(dd, \ \theta)$ et $(\theta, \ ba)$ sont concordants, étant donné que a est directement admis par l'un et l'autre et il n'existe aucun autre mot admis par les deux contextes. D'autre part, les contextes (dd, θ) et (θ, bb) ne sont pas absolument équivalents, d étant directement admis par le contexte $(dd, \ \theta)$, sans être directement admis par le contexte $(\theta, \ ba)$.

27. Types et langages adéquats

Nous dirons que deux mots x et y font partie du même type T si : 1) pour chaque phrase marquée $\omega_1\ \omega_2 \dots \omega_k\ x\omega_{k+1} \dots \omega_n$ il existe une phrase marquée $\omega'_1\,\omega'_2 \dots \omega'_k\ y'\ \omega'_{k+1} \dots, \omega'_n$ telle que $\omega'_i \in V(\omega_i)$ et $y' \in V(y)$ et 2) pour chaque phrase marquée $u_1\ u_2 \dots u_k\ yu_{k+1} \dots u_m$ il existe une phrase marquée

$$u'_1\ u'_2 \dots u'_k\ x'\ u'_{k+1}\ \dots\ u'_m$$

telle que $u'_i \in V(u_i)$ et $x' \in V(x)$. L'ensemble des mots appartenant au même type que x constitue le *type* de x et sera désigné par $T(x)$.

Un langage paradigmatique est dit un *langage adéquat* si, pour tout couple de mots x et y, le fait que $x \in S(y)$ entraîne la relation $x \in T(y)$ $\big(x \in S(y)$ signifie que x appartient à la même famille que $y\big)$.

28. Fragments réguliers d'un langage

Soit Δ un sous-ensemble de Φ $(\Delta \subseteq \Phi)$. Nous dirons que deux mots x et y sont *Δ-équivalents* $(x \underset{\Delta}{\sim} y)$ si, pour un contexte (f_1, f_2) quelconque, les phrases $f_1\ xf_2$ et $f_1\ yf_2$ appartiennent toutes les deux à Δ, ou bien si aucune d'elles n'appartient à Δ. Il est évident que deux mots x et y font partie de la même famille si et seulement si $x \underset{\Phi}{\sim} y$.

Nous dirons que Δ est un *fragment régulier* de Φ si, pour tout couple de mots x et y, le fait que $x \underset{\Phi}{\sim} y$ $\big($ou $x \in S(y)\big)$ entraîne la relation $x \underset{\Delta}{\sim} y$.

Les ensembles de phrases marquées utilisés pour interpréter des modèles logiques sont d'habitude des fragments réguliers. Par exemple, pour interpréter un certain modèle du genre grammatical, on considère, dans une première étape, seulement les groupes de la forme : substantif + adjectif ou adjectif + substantif [13]. Il est aisé de vérifier que ces groupes forment un fragment régulier.

Il est aussi aisé de prouver les propositions suivantes :

L'ensemble Φ et l'ensemble vide sont des fragments réguliers. La réunion et l'intersection de deux fragments réguliers sont aussi des fragments réguliers. Le complémentaire d'un fragment régulier est aussi un fragment régulier. Il s'ensuit donc que les fragments réguliers d'un langage forment une algèbre de Boole. (La notion de fragment régulier correspond à la notion d'ensemble héréditaire par double domination, indroduite au paragraphe 44 du chapitre V).

29. L'ensemble diagnostique

On dira que le contexte (f_1, f_2) est *engendré par la phrase* g s'il existe un mot x tel que $g = f_1\ xf_2$, c'est-à-dire s'il est obtenu à partir de g par l'omission d'un mot x.

Une phrase marquée g est, par définition, une *phrase diagnostique* si tout contexte engendré par g et admettant un mot x admet aussi tout mot $y \in T(x)$. L'ensemble $\mathscr{D}$ des phrases diagnostiques sera, par définition, l'*ensemble diagnostique*.

PROPOSITION 46. *Dans un langage adéquat, l'ensemble diagnostique est un fragment régulier* [17].

Démonstration. Soit $\mathscr{L} = (\Gamma, V, \Phi)$ un langage adéquat. Soient x et y deux mots tels que $x \in S(y)$ et soit $a_1 \dots a_k x a_{k+1} \dots a_n$ (1) une phrase de l'ensemble diagnostique $\mathscr{D}$.

La phrase $a_1 a_i \dots a_k y a_{k+1} \dots a_n$ (2) est marquée. Admettons, que (2) n'appartient pas à $\mathscr{D}$. Il y a donc dans (2) un mot ω tel qu'un contexte, engendré par (2), par omission de ω, n'admet pas un mot $u \in T(\omega)$. Soit d'abord $\omega = a_i$. Il y a donc une phrase non marquée

$$a_1 \dots a_{i-1} u' a_{i+1} \dots a_k y a_{k+1} \dots a_n \tag{3}$$

où $u' \in V(u)$.

Mais $x \in S(y)$ et la phrase $a_1 \dots a_{i-1} u' a_{i+1} \dots a_k x a_{k+1} \dots a_n$ n'est pas marquée. Donc (1) n'appartient pas à $\mathscr{D}$, ce qui est absurde.

Soit maintenant $\omega = y$. Donc $u \in T(y)$ et, puisque le langage est adéquat, $u \in T(x)$. Cela signifie que (1) n'appartient pas à $\mathscr{D}$, ce qui est absurde. La proposition 46 est prouvée.

Remarque. L'exemple suivant montre que la proposition 46 est en défaut si le langage n'est pas adéquat [17] :

$$\Gamma = \{ a, b, x, y, z, \omega) , \quad \Phi = \{ ax, ay, bz, \omega\omega \} , \quad V(a) = \{ a, b \} ,$$
$$V(x) = \{ x, \omega \} , \quad V(y) = \{ y \} , \quad V(z) = \{ z \} .$$

Nous avons les types suivants :

$$T_1 = \{ a, b \} , \quad T_2 = \{ x, \omega \} , \quad T_3 = \{ y, z \} .$$

La phrase ax appartient à l'ensemble diagnostique, tandis que la phrase ay ne lui appartient pas ; puisque $z \in T(y)$, la phrase az n'est pas marquée et le mot z est le seul mot de $V(z)$. Mais d'autre part $x \in S(y)$.

30. Un autre modèle proposé par Revzin

Dans [17], Revzin remarque que sa définition du cas, appliquée aux langues slaves, ne nous donne pas les résultats désirés. Par exemple : Prenons en russe les contextes 1. (мальчик читает хорошую, θ), 2. (мальчик читает хороший, θ), 3. (мальчик читает, θ), où θ est la phrase vide. Les contextes 1 et 2 ne sont pas équivalents par rapport au mot рассказ, les contextes 2 et 3 ne le sont pas par rapport au mot книгу. Par définition, nous avons ici trois cas différents, ce qui contredit l'intuition linguistique.

C'est pourquoi Revzin propose dans [17] de considérer non l'ensemble entier des phrases marquées, mais seulement l'ensemble des contextes engendrés par les phrases de l'ensemble diagnostique.

Ainsi, il propose dans [17] d'appeler cas toute classe de contextes absolument équivalents dans l'ensemble des contextes engendrés par les phrases de l'ensemble diagnostique. Soit h un cas dans ce sens.

On dira qu'un mot x est accepté par le cas h, s'il existe un contexte $(f, g) \in h$, tel que la phrase fxg soit marquée.

Nous venons d'établir (voir proposition 42) quelques résultats concernant les rapports entre la propriété « être accepté par un cas » et la propriété « appartenir à la même famille ». Si l'on prend le cas dans le sens de la nouvelle définition, ces résultats ne sont plus vrais. Mais la nouvelle définition du cas entraîne une affirmation plus faible et ayant une signification linguistique :

PROPOSITION 47. *Soient x et y deux mots appartenant à la même famille. Si x est accepté par le cas h, alors y est accepté aussi par h* [17].

Dans l'exemple ci-dessus des contextes 1, 2 et 3, seul le troisième contexte appartient à l'ensemble des contextes engendrés par des phrases de l'ensemble diagnostique. Le contexte 1 n'en fait pas partie, puisque le mot рассказ appartient au même type que le mot книга et que ses formes flexionnelles ne sont pas admises par ce contexte.

Le cas contenant le contexte 3 et qui peut être interprété comme l'accusatif, admet les mots книгу, рассказ, повесть, упражнение, etc. Tout mot faisant partie de la même famille que книгу (par exemple тарелку) est, naturellement, admis par ce cas.

31. Certains inconvénients

La définition donnée n'améliore qu'un des aspects du modèle du cas. Il y en a d'autres. Par exemple, les contextes (θ, читает книгу) et (θ, читают книгу) appartiennent à des cas différents, puisque le verbe a des formes différentes au singulier et au pluriel. Le contexte (два, θ) n'appartient à aucun cas, puisque la phrase два мальчика n'appartient pas à l'ensemble diagnostique (aucune forme flexionnelle du mot девочка du même type n'est admise par ce contexte) et il est impossible de dire par quel cas est accepté le mot мальчика.

Afin de surmonter certaines de ces difficultés, Revzin [17] propose les définitions suivantes : le contexte γ_1 est dominé par le contexte γ_2 et on écrit $\gamma_2 \to \gamma_1$ si tout mot admis par γ_2 est admis par γ_1. Le mot x possède le cas grammatical h dans le contexte γ_1 s'il existe un contexte diagnostique γ_2 tel que $\gamma_2 \in h$ et $\gamma_2 \to \gamma_1$.

Un exemple tiré du russe : $\gamma_1 =$ (два, θ), $\gamma_2 =$ (голова, θ), γ_2 appartient au génitif et $\gamma_2 \to \gamma_1$; il s'ensuit que мальчика est au génitif dans l'expression два мальчика.

32. Contextes adéquats

Soit ω une application de K dans Γ. Posons (pour la signification de K et φ voir le paragraphe 19)

$$\Lambda = \bigcup_{k \in K} \varphi(k)$$

et soit μ une application du produit cartésien $K \times \Lambda$ dans l'ensemble des parties du semi-groupe libre engendré par Γ. Supposons que μ soit telle que, pour $s \in \varphi(k)$, on ait $\mu(k, s) \subseteq \Phi$.

Considérons un état $t \in \mathscr{S}$ et un contexte $c = (x, y)$. Nous dirons que c est *adéquat* à t si, pour tout objet $k \in K$ tel que $t \in \varphi(k)$, la condition suivante est remplie : il existe un mot $a \in V(\omega(k))$ tel que $\mu(k, t) = xay$.

L'application ω associe à chaque objet (élément de contenu) un certain mot (élément d'expression). L'application μ associe à chaque état (hypostase) s d'un objet k des phrases qui affirment que l'objet k se trouve dans l'hypostase s. Le fait que le contexte $c = (x, y)$ est adéquat à l'état t signifie qu'il existe, pour tout objet susceptible de l'état t, une forme flexionnelle a du mot exprimant cet objet, telle que la phrase xay exprime l'hypostase t de l'objet considéré. Par exemple, si l'état t d'un objet correspond au fait que cet objet construit une maison, alors chacun des contextes russes (θ, строит дом) et (дом строится, θ) est adéquat à l'état t. Si l'état t signifie que quelqu'un n'a pas lu l'objet considéré, alors le contexte russe (не читал, θ) est adéquat à t. On constate, sur cet exemple, que la forme flexionnelle a de la définition ci-dessus n'est pas, en général, uniquement déterminée. En effet, s'il s'agit de l'objet k tel que

$$\omega(k) = a = \text{газета}\ ,$$

alors on peut prendre $a =$ газету, mais aussi газеты ; en effet, l'une et l'autre des phrases не читалга зету et не читал газеты expriment que l'objet k se trouve dans l'état t. Un autre exemple : le contexte (дал, θ) est adéquat à l'état consistant en ce que quelqu'un a donné quelque chose à un certain objet ; le même contexte est adéquat à l'état consistant en ce que quelqu'un a donné à quelqu'un un certain objet.

33. Couples adéquats et cas bi-faces

Etant donnés un état $t \in \mathscr{S}$ et un contexte c adéquat à t, on dira que $\{ t, c \}$ est un *couple adéquat*. Tout objet k susceptible de l'état t — c'est-à-dire tel que $t \in \varphi(k)$ — est, par définition, un objet *admis* par le couple $\{ t, c \}$. Deux couples adéquats $\{ t_1, c_1 \}$ et $\{ t_2, c_2 \}$ $\big(c_1 = (x_1, y_1), c_2 = (x_2, y_2)\big)$ seront, par définition, *concordants par rapport à un objet* k si pour toute forme $a \in V\big(\omega(k)\big)$ les deux conditions suivantes sont remplies :

1) si $x_1\, ay_1 \in \mu(k, t_1)$, alors $x_2\, ay_2 \in \mu(k, t_2)$;
2) si $x_2\, ay_2 \in \mu(k, t_2)$, alors $x_1\, ay_1 \in \mu(k, t_1)$.

Deux couples adéquats seront, par définition, *concordants*, s'il existe un objet admis par chacun de ces couples et si les deux couples sont concordants par rapport à tout objet admis par chacun de ces deux couples.

Deux couples adéquats $\{ t, c \}$ et $\{ t', c')$ seront, par définition, *congruents* s'il existe une suite finie de couples adéquats $\{ t_1, c_1 \}$, $\{ t_2, c_2 \}$, ..., $\{ t_i, c_i \}$, $\{ t_{i+1}, c_{i+1} \}$, ..., $\{ t_n, c_n \}$, jouissant des propriétés suivantes :

$$\{ t_1, c_1 \} = \{ t, c \} ; \{ t_n, c_n \} = \{ t', c' \} ;$$

pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant n - 1$, les couples $\{ t_i, c_i \}$ et $\{ t_{i+1}, c_{i+1} \}$ sont concordants.

Il est aisé de voir que la relation de congruence est une relation d'équivalence dans l'ensemble des couples adéquats. Les classes d'équivalence correspondantes seront, par définition, les *cas bi-faces* du langage envisagé. Cette conception du système casuel concerne à la fois le plan du contenu et le plan de l'expression. Elle est donc fidèle à la théorie de Ferdinand de Saussure.

Pour déterminer le cas bi-face d'un certain substantif u dans un certain contexte $c = (x, y)$ on doit d'abord déterminer quel est l'état correspondant de l'objet k dont le mot $\omega(k)$ coïncide avec u ; c'est l'état t tel que $\mu(k, t) = xuy$ (ici, le phénomène d'homonymie introduit une certaine ambiguïté, car il peut exister plusieurs objets ayant la même dénomination ; il faudrait donc supposer que l'application ω est univalente, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'homonymie). On vérifie ensuite que le couple $\{ c, t \}$ est adéquat ; la classe de congruence contenant ce couple est le cas bi-face du substantif u dans le contexte c.

Pour appliquer cette méthode aux formes de pluriel, il suffit de convenir que l'objet désigné par un substantif à une forme de singulier est différent de l'objet désigné par le même substantif à une forme de pluriel.

Si l'on applique à la langue russe le modèle développé ci-dessus, on constate (comme le fait Uspenskiĭ au paragraphe 5 du [19]) qu'on retrouve les six cas traditionnels, mais on obtient, en outre, d'autres cas bi-face, par exemple, le cas local (в лесу, в году, etc.) et le cas de la détermination quantitative (выпить чаю, прибавить ходу, дать воды, etc.).

Si les phrases не читал газету et не читал газеты sont, toutes les deux, correctes et expriment le même état de l'objet désigné par газета, il existe alors un cas bi-face de privation, utilisé après les verbes à une forme négative ; ce cas est susceptible de deux formes, l'une à l'accusatif, l'autre au génitif. Si la phrase не читал газету est correcte, tandis que la phrase не читал газеты ne l'est pas, газету se trouve, dans la première phrase, au cas accusatif. Si la phrase ге читал газеты est correcte, tandis que не читал газету ne l'est pas, газеты se trouve, dans la première phrase, au génitif. Enfin, si les deux phrases sont correctes, mais expriment des états différents de l'objet désigné par газета, газету se trouve à l'accusatif, tandis que газеты se trouve au génitif.

OUVRAGES CITÉS

[1] DIACONESCU, P., « Le système casuel du roumain ». *Cahiers de linguistique théorique et appliquée*, vol. 1, 1962, p. 27-37.

[2] FREI, H., « Cas et dèses en français ». *Cahiers Ferdinand de Saussure*, vol. 12, 1954, p. 29-47.

[3] GODEL, R., « Remarques sur des systèmes de cas ». *Cahiers Ferdinand de Saussure*, vol. 13, 1955, p. 34-39.

[4] HARRIS, Z. S., *Structural Linguistics*. Fifth impression. The University of Chicago Press, 1961.

[5] HARRIS, Z. S., « Co-occurence and transformation in linguistic structure ». *Language*, vol. 33, 1957, 3 (part 1), p. 283-340.

[6] HJELMSLEV, L., « La catégorie des cas ». *Acta jutlandica*, vol. 7, 1936.

[7] JAKOBSON, R., « Beitrag zur allgemeinen Kasuslehre. Gesamtbedeutungen des russischen Kasus ». *Travaux du Cercle linguistique de Prague*, vol. 6, 1936, p. 240-288.

[8] JANVOSKAJA, S. A., « Matematičeskaja logika i osnovanija matematiki ». *Matematika v SSSR za sorok let*, 1917-1957, vol. 1, p. 116.

[9] KURYLOWICZ, J., « Le problème du classement des cas », dans *Esquisses linguistiques*, Wroclaw-Kraków, 1960.

[10] MARCUS, S., « Description, à l'aide de la théorie des ensembles, de certains phénomènes morphologiques ». *Revue de mathématiques pures et appliquées*, vol. 6, 1961, N° 4, p. 735-744.

[11] MARCUS, S., « Asupra unui model logic al părţii de vorbire ». *Studii şi cercetări matematice*, vol. 13, 1962, N° 1, p. 37-62.

[12] MARCUS, S., « Le genre grammatical et son modèle logique ». *Cahiers de linguistique théorique et appliquée*, vol. 1, 1962, p. 103-122.

[13] MARCUS, S., « A synchronic analysis of the grammatical gender ». *Revue de linguistique*, vol. 8, 1963, N° 1, p. 99-111.

[14] MARCUS, S., « Modèles mathématiques pour la catégorie grammaticale du cas ». *Revue de mathématiques pures et appliquées*, vol. 8, 1963, N° 4, p. 585-610.

[15] PADUČEVA, E. V., « Ob opisanii padežnoi sistemy russkogo suščestvitelnogo ». *Voprosy jazykoznanija*, 1960, N° 5, p. 104-111.

[16] REVZIN, I. I., *Modeli jazyka*. Izd. Akad. Nauk SSSR, Moskva, 1962.

[17] REVZIN, I. I., « Note sur un modèle pour la catégorie grammaticale du cas ». *Omagiu lui A. Rosetti la 70 de ani*. Editura Academiei R. S. R., Bucureşti, 1965.

[18] ŠAUMJAN, S. K., « Lingvističeskie problemy kibernetiki i strukturnaja lingvistika. » *Voprosy filosofii*, 1960, N° 9.

[19] USPENSKIĬ, V. A., « K opredeleniju padeža po A. N. Kolmogorovu ». *Bjulleten Obedinenija po problemam mašinnogo perevoda*. Moskva, 1957, N° 5, p. 11-18.

Ajouté sur les épreuves

Pour une définition des cas à l'aide des notions de distribution et de sélection grammaticale voir Emanuel VASILIU (« Le système des cas en roumain », *Cahiers de linguistique théorique et appliquée*, vol. 2, 1965, p. 311-340). Pour le développement ultérieur du modèle logique du cas voir I. I. REVZIN (*Metod modelirovanija i tipologia slavjanskih jazykov*. Akademia Nauk SSSR, Institut Slavjanovedenija, Izd. Nauka, Moscou, 1967).

CHAPITRE VII

GRAPHES EN LINGUISTIQUE

1. Relations binaires

Etant donnés deux ensembles A et B, nous désignons par $A \times B$ l'ensemble de toutes les paires ordonnées (a, b) où $a \in A$ et $b \in B$. L'ensemble $A \times B$ est, par définition, le *produit cartésien* des ensembles A et B. Toute partie de l'ensemble $A \times B$ est, par définition, une *relation binaire ρ définie dans A et ayant ses valeurs* dans B. Pour tout $a \in A$, nous désignons par $\rho(a)$ l'ensemble des éléments $b \in B$ tels que $(a, b) \in \rho$. Bien entendu, il peut arriver que $\rho(a)$ soit l'ensemble vide. Si $(a, b) \in \rho$, nous écrirons $a\rho b$.

Si $B = A$, on dit que ρ est une *relation binaire dans A*. Toute relation d'équivalence dans A est une relation binaire dans A. La relation d'ordre et la relation de quasi-ordre, définies au chapitre IV, sont aussi des relations binaires. En particulier, la relation de domination, étudiée au chapitre V, est une relation binaire dans l'ensemble des mots. Mais il y a beaucoup de relations binaires intervenant en linguistique et qui ne sont ni relations d'équivalence, ni relations d'ordre ou de quasi-ordre. Un exemple en est la relation de concordance par rapport à un mot (voir proposition 13 du chapitre VI). Comme nous allons le voir, l'étude de la dépendance syntaxique conduit aussi à certaines relations binaires très générales. Il faut donc étudier les relations binaires les plus générales, définies dans un ensemble A.

Si ρ est une relation binaire définie dans A et ayant ses valeurs dans B, on définit la relation binaire inverse ρ^{-1}, définie dans B et ayant ses valeurs dans A, de la façon suivante : on a $(b, a) \in \rho^{-1}$ si et seulement si $(a, b) \in \rho$. Il est aisé de voir que pour toute relation d'équivalence ρ dans A la relation inverse est aussi une relation d'équivalence dans A et on a $\rho = \rho^{-1}$. Si ρ est une relation d'ordre dans A, ρ^{-1} est aussi une relation d'ordre dans A. Enfin, si ρ est une relation de quasi-ordre dans A, ρ^{-1} est aussi une relation de quasi-ordre dans A.

Un cas particulier important de relation binaire est la *relation fonctionnelle* ou la *fonction*. Soit $\rho \subseteq A \times B$. Si pour tout $a \in A$ l'ensemble $\rho(a)$ contient exactement un élément, on dit que ρ est une *fonction définie dans A et ayant ses valeurs dans B*. Par exemple, si A est l'ensemble des sons d'une langue et si B

est l'ensemble des traits { *sourd*, *neutre*, *sonore* }, alors on peut associer à tout son $a \in A$, sa valeur de sonorité, désignée par $\rho(a)$ et l'on obtient ainsi une relation fonctionnelle.

L'inverse d'une relation fonctionnelle n'est pas toujours une relation fonctionnelle. Par exemple, dans l'exemple ci-dessus on a $\rho^{-1}(b)$ = l'ensemble de tous les sons ayant la valeur de sonorité b, donc ρ^{-1} est une relation binaire non fonctionnelle. Une fonction ρ dont l'inverse est aussi une fonction est, par définition, une *fonction biunivoque*. Pour obtenir un exemple linguistique de fonction biunivoque, considérons, dans un langage $L = \{ \Gamma, \Phi \}$, la partition de Γ en classes de distributions. Choisissons, dans chaque classe de distribution S_i, un mot bien déterminé a_i. En désignant par A l'ensemble des classes S_i et par B l'ensemble des mots choisis a_i, la relation ρ qui associe à toute classe S_i le mot a_i est une fonction biunivoque, définie dans A et ayant ses valeurs dans B.

2. Graphes

Soit A un ensemble quelconque. Si ρ est une relation binaire dans A, le couple $\langle A, \rho \rangle$ est, par définition, un *graphe*. Les éléments de A sont les *sommets* du graphe, tandis que tout couple ordonné (a, b) tel que $a\rho b$ est un *arc* du graphe. On dit que a est l'*extrémité initiale* de cet arc, tandis que b est son *extrémité terminale*. Un graphe $\langle A, \rho \rangle$ admet une *représentation géométrique*, tout sommet étant représenté par un point et tout arc (a, b) par une flèche allant du point a au point b. Si $A = \{ a, b, c, d, e, f, g \}$ et si $b\rho a$, $b\rho c$, $c\rho b$, $c\rho e$. $c\rho d$ et $f\rho g$, alors on obtient la représentation géométrique donnée par la figure 1.

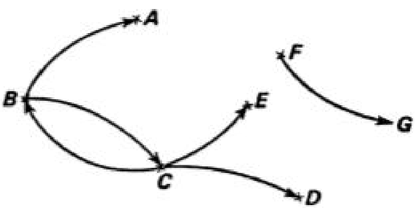


FIG. 1.

Il y a aussi une *représentation matricielle* d'un graphe. Le graphe $\langle A, \rho \rangle$ se représente par une *matrice carrée binaire*, c'est-à-dire par une matrice dont les éléments sont 0 et 1, tandis que le nombre des lignes est égal au nombre des colonnes. A chaque sommet correspond une certaine ligne et une certaine colonne. A l'intersection de la ligne de $x \in A$ avec la colonne de $y \in A$ se trouve 1 si $x\rho y$ et 0 dans le cas contraire. Par exemple, le graphe représenté par la figure 1 admet la représentation matricielle donnée par le tableau 1.

TABLEAU 1

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	0	0	0	0	0	0
B	1	0	1	0	0	0	0
C	0	1	0	1	1	0	0
D	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	0	1
G	0	0	0	0	0	0	0

La théorie des graphes a pris, dans les mathématiques de ces dernières années, un grand essor, dû dans une certaine mesure à ses applications en automatique, en recherche opérationnelle et dans d'autres domaines. Quoiqu'elle ne se soit pas encore développée dans le sens des applications à la linguistique, elle touche cependant, par beaucoup de ses notions et aussi de ses résultats, les aspects les plus variés des phénomènes de langue. La théorie des graphes intervient en linguistique non seulement par ses notions fondamentales, mais aussi par certains résultats importants. Toutefois, la linguistique pose à la théorie des graphes des problèmes nouveaux, que les mathématiciens devront prendre en considération.

3. Quelques notions de théorie des graphes

Un graphe $\langle A, \rho \rangle$ est appelé *fini* chaque fois que l'ensemble A est fini.

Un *sous-graphe* du graphe $\langle A, \rho \rangle$ est, par définition, un graphe $\langle B, \rho' \rangle$ tel que $B \subseteq A$ et que, pour $a \in B$, $b \in B$, on a $a\rho' b$ si et seulement si $a\rho b$. Un *graphe partiel* de $\langle A, \rho \rangle$ est, par définition, un graphe $\langle A, \rho'' \rangle$ tel que, pour $a \in A$, $b \in A$, la relation $a\rho'' b$ entraîne $a\rho b$. Un *sous-graphe partiel* de $\langle A, \rho \rangle$ est un graphe partiel d'un sous-graphe de $\langle A, \rho \rangle$. Par exemple, si A est l'ensemble des mots français et si, pour $a \in A$, $b \in A$, on a $a\rho b$ si et seulement s'il existe deux phrases x et y telles que $xaby$ soit une phrase française correcte, alors le graphe $\langle B, \rho' \rangle$, où B est l'ensemble des substantifs français, est un sous-graphe de $\langle A, \rho \rangle$, tandis que le graphe $\langle A, \rho'' \rangle$, où $a\rho'' b$ si et seulement si ab est une phrase française correcte, est un graphe partiel de $\langle A, \rho \rangle$.

Deux *arcs* sont dits *adjacents* s'ils ont une extrémité commune. Deux *sommets* sont *adjacents* s'ils sont distincts et reliés par un arc. Un arc est *incident à un sommet a vers l'extérieur* si a est son extrémité initiale et si son extrémité terminale est différente de a. On définirait de même un arc *incident vers l'intérieur*. D'une façon plus générale, si A est un ensemble de sommets donné, on dit qu'un arc est *incident à A vers l'extérieur* s'il est de la forme (a, b), avec $a \in A$, $b \in A$.

Dans un graphe, on appelle *chemin* une séquence d'arcs telle que l'extrémité terminale de chaque arc coïncide avec l'extrémité initiale de l'arc suivant. La *longueur d'un chemin* est, par définition, le nombre d'arcs dont il est formé. Si cette longueur est finie, on dit que le *chemin* est *fini*. On appelle *extrémités — initiale* et *terminale — d'un chemin* l'extrémité initiale de son premier arc et l'extrémité terminale de son dernier arc. Par exemple, si A est l'ensemble des mots français et si, pour $a \in A$, $b \in A$ on a $a\rho b$ si et seulement si a et b ne sont pas en distribution complémentaire, alors les arcs (*blanche*, *sage*), (*sage*, *blanc*), (*blanc*, *heureux*), (*heureux*, *larges*), pris dans l'ordre indiqué, forment un chemin dans $\langle A, \rho \rangle$, dont la longueur est égale à 4, l'extrémité initiale est *blanche* et l'extrémité terminale est *larges*.

Un chemin fini, dont l'extrémité initiale coïncide avec l'extrémité finale est, par définition, un *circuit*.

Un graphe $\langle A, \rho \rangle$ est dit *symétrique* si la relation $a\rho b$ (pour $a \in A$, $b \in A$) entraîne $b\rho a$. Si, au contraire, du fait que (a, b) est un arc du graphe, il s'ensuit que (b, a) n'est pas un arc du graphe, alors $\langle A, \rho \rangle$ est un graphe *anti-symétrique*. Chaque fois que ρ est une relation d'équivalence dans A, le graphe $\langle A, \rho \rangle$ est symétrique. Si A est l'ensemble des mots français et si, pour $a \in A$, $b \in B$ on pose $a\rho b$ chaque fois que a domine b (au sens du chapitre V) mais que b ne domine pas a, alors le graphe $\langle A, \rho \rangle$ est anti-symétrique. Par exemple, si $a =$ *blanc* et $b =$ *épais*, alors (*blanc*, *épais*) est un arc du graphe, mais (*épais*, *blanc*) ne l'est pas.

Un graphe est dit *complet* si, pour tout couple $\{ a, b \}$ de sommets, l'une au moins des paires ordonnées (a, b) et (b, a) est un arc du graphe. Par exemple, si A est l'ensemble des mots français et si, pour $a \in A$, $b \in B$, on a $a\rho b$ si et seulement s'il existe trois phrases x, y et z, telles que $xaybz$ soit une phrase française correcte, alors le graphe $\langle A, \rho \rangle$ est complet (car on peut toujours construire une phrase correcte, contenant deux mots donnés d'avance).

Un graphe est dit *fortement connexe* si, quels que soient les sommets a et b (avec $a \neq b$), il existe un chemin allant de a à b. Tout graphe complet est fortement connexe, mais la réciproque n'est pas vraie.

Un arc (a, b) dont l'extrémité initiale coïncide avec l'extrémité finale est, par définition, une *boucle*.

A côté des notions déjà indiquées, qui dépendent éventuellement de l'orientation des arcs, on peut définir des notions non orientées assez analogues. Une *arête* est un couple non orienté de deux sommets adjacents. Une *chaîne* est une séquence d'arcs $\mu = (u_1, u_2, ..., u_{k-1}, u_k, u_{k+1}, ..., u_q)$ telle que l'arc u_k est rattaché à u_{k-1} (pour $2 \leqslant k \leqslant q$) par une de ses extrémités et à u_{k+1} (pour $1 \leqslant k \leqslant q - 1$) par l'autre. Le nombre q est la *longueur de la chaîne*. Un chemin est une chaîne, mais la réciproque n'est pas vraie.

La plus longue chaîne d'un graphe est, par définition, son *diamètre*.

Un graphe est *connexe* si pour tout couple de sommets distincts il existe une chaîne allant de l'un à l'autre. Un graphe fortement connexe est connexe, mais la réciproque n'est pas vraie. Un graphe $\langle A, \rho \rangle$ est *complètement connexe* si pour $a \in A$ et $b \in A$ on a $a\rho b$ ou bien $b\rho a$.

Si a est un sommet, l'ensemble formé par a et par tous les sommets pouvant être reliés à a par une chaîne, est par définition une *composante connexe* (ou : *composante*) du graphe. Si un graphe est connexe, il ne possède qu'une composante ; si un graphe n'est pas connexe, il a au moins deux composantes. Le graphe de la figure 1 admet deux composantes. Les différentes composantes d'un graphe $\langle A, \rho \rangle$ définissent une partition de l'ensemble A. Si ρ est une relation d'équivalence dans A, les composantes sont justement les classes de ρ-équivalence.

Dans un graphe, on appelle *cycle* une séquence d'arcs $u_1, u_2, ..., u_q$ telle que : 1° Tout arc u_k (avec $1 < k < q$) est relié par une de ses extrémités au précédent u_{k-1} et par l'autre extrémité au suivant u_{k+1} (en d'autres termes, c'est une chaîne) ; 2° la séquence n'utilise pas deux fois le même arc ; 3° le sommet initial de u_1 coïncide avec le sommet terminal de u_q (ces deux sommets sont les extrémités — initiale et terminale — du cycle). Cette définition de la notion de cycle diffère de la définition habituelle (voir, par exemple, Berge [6]) ; elle a été formulée par Berge et Ghouila-Houri [7], p. 121-122, où la chaîne et le cycle sont conçus comme séquences d'arcs. Ces modifications sont nécessaires car, avec les définitions de Berge [6], tout graphe ayant au moins un arc possède un cycle, ce qui est contraire à l'intuition. Selon les définitions ci-dessus, les notions de chaîne et cycle perdent leur caractère orienté.

Le *degré d'un sommet a* est le nombre des arcs ayant a comme extrémité initiale. La *valence* de a est le nombre des arcs ayant a comme extrémité terminale. La somme du degré de a et de la valence de a est l'*ordre de multiplicité du sommet a*. Un sommet dont la valence est nulle est un *point d'entrée*, tandis qu'un sommet dont le degré est nul est un *point de sortie*. Un sommet qui n'est ni point d'entrée, ni point de sortie, est un *point intermédiaire*. Un graphe fini, connexe, ayant un seul point d'entrée et un seul point de sortie et où on a associé, à chaque arc, un nombre réel non négatif (appelé la *capacité de l'arc*) est appelé un *réseau*.

4. Nombre cyclomatique et groupes consonantiques

Nous allons étudier, dans les paragraphes 4-8, deux graphes particuliers, concernant le consonantisme du roumain. Mais les méthodes employées et certaines des significations dégagées ont une portée bien plus générale, se prêtant à être appliquées à tous les niveaux de la langue.

Les groupes consonantiques initiaux du roumain sont formés de quatre consonnes au plus. Désignons par -4, -3, -2 et -1 les quatre positions possibles d'une consonne dans un groupe consonantique initial. -4 représente la position la plus éloignée par rapport au centre vocalique, tandis que -1 représente la position la plus proche de ce centre. La position du centre vocalique sera désignée par 0, les nombres entiers positifs étant destinés aux diverses positions dans un groupe consonantique final. Pour marquer le fait qu'une certaine consonne se trouve dans une certaine position, nous écrirons cette consonne avec, en indice, le numéro de la position considérée. Par exemple, S_{-3} représente la consonne S en position -3.

Nous allons définir un graphe Γ de la façon suivante. Les sommets de ce graphe sont les éléments de la forme x_{-n}, où $0 \leqslant n \leqslant 4$, x est une consonne pour $n > 0$ et une voyelle pour $n = 0$. Etant donnés deux sommets x_{-n} et y_{-m} tels que $n \neq 0 \neq m$, on aura l'arc (x_{-n}, y_{-m}) si $n = m + 1$ et s'il existe un groupe consonantique initial où la consonne x apparaît en position $-n$ tandis que y apparaît en position $-m$. Etant donnés deux sommets x_{-n} et y_0, on aura l'arc (x_{-n}, y_0) si $n = 1$ et s'il existe un groupe consonantique initial où la consonne x apparaît en position -1 et peut être immédiatement suivie par la voyelle y.

Le graphe Γ défini ci-dessus est un graphe fini et antisymétrique. Le fait que deux consonnes appartiennent à un groupe consonantique initial se traduit par l'existence, dans Γ, d'un chemin qui relie les sommets associés. Tout chemin de Γ, qui se termine par un sommet dont l'indice n'est pas nul, définit un groupe consonantique initial ou une partie d'un tel groupe. Tout sommet de valence nulle est le commencement d'un groupe consonantique initial. Il est aisé de voir que Γ ne contient aucun circuit, mais il contient un grand nombre de cycles. Le plus long cycle formé exclusivement par des consonnes est celui de la figure 2. Le graphe de la figure 2 admet un seul point d'entrée — S_{-4} —

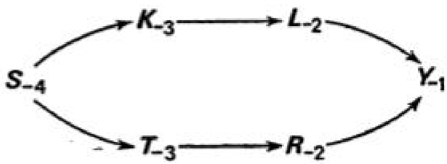


FIG. 2.

et un seul point de sortie — Y_{-1}. Il y a une certaine redondance dans le passage de S_{-4} à Y_{-1}, car la connaissance de K_{-3} (respectivement T_{-3}) entraîne celle de L_{-2} (respectivement R_{-2}). Mais la redondance n'est pas totale, car un groupe consonantique qui commence en S_{-4} et finit en Y_{-1} n'est pas uniquement déterminé par ses extrémités. Au contraire, le groupe consonantique initial *ZDRY* présente une redondance maximale, car il est complètement déterminé par la connaissance de ses extrémités. En généralisant ces remarques, on constate que la redondance maximale est liée à l'absence des cycles. On pourrait croire que le nombre des cycles qui apparaissent dans le passage d'un sommet à un autre de Γ est une mesure des variantes de ce passage. Cela devient vrai dès qu'on considère le nombre maximum de cycles indépendants (dans le sens de [6], chapitre IV). Etant donnés deux sommets x_{-n} et y_{-m} du graphe Γ, on leur associe le sous-graphe $\Gamma(x_{-n}, y_{-m})$ formé par tous les sommets appartenant aux chemins qui relient x_{-n} à y_{-m}. On constate que le nombre de chemins qui commencent en x_{-n} et finissent en y_{-m} s'obtient en ajoutant 1 au nombre maximum de cycles indépendants du sous-graphe $\Gamma(x_{-n}, y_{-m})$. Le théorème 2 du chapitre IV de [6] permet de trouver sans difficulté le nombre maximum de cycles indépendants d'un graphe, qui est appelé le *nombre cyclomatique du graphe*. Ce nombre est égal à $\alpha - \beta + p$, où α est le nombre des arêtes, β le nombre des sommets et p le nombre des composantes connexes. En tenant compte du fait que le sous-graphe $\Gamma(x_{-n}, y_{-m})$ est connexe chaque fois qu'il y a au moins un chemin reliant x_{-n} à y_{-m}, il s'ensuit que $p = 1$, donc le nombre de chemins reliant x_{-n} à y_{-m} dans Γ est égal à $\alpha - \beta + 2$, où α est le nombre des arêtes et β le nombre de sommets de $\Gamma(x_{-n}, y_{-m})$. Par exemple, pour déterminer le nombre des possibilités de passage de S_{-3} à A_0, on considère le sous-graphe $\Gamma(S_{-3}, A_0)$ de Γ (figure 3), on constate que ce sous-graphe a 19 arêtes et 11 sommets et on en déduit que le nombre des chemins allant de S_{-3} à A_0 est égal à 10.

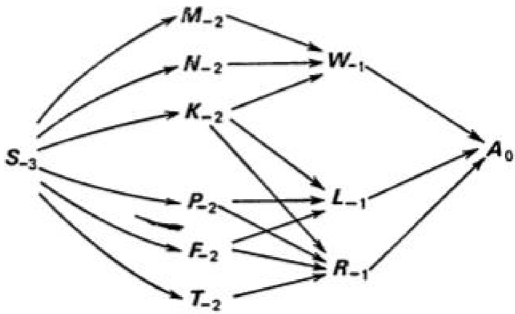


FIG. 3.

On obtient ainsi un procédé très pratique pour évaluer l'entropie d'ordre zéro e_0 du passage de x_{-n} à y_{-m}, c'est-à-dire l'indétermination éliminée par la connaissance des consonnes par l'intermédiaire desquelles on passe de x_{-n} à y_{-m}. Ce procédé nous dispense de recourir à la représentation géométrique du graphe $\Gamma(x_{-n}, y_{-m})$; il suffit d'avoir la liste des arêtes et des sommets, par exemple à l'aide de la représentation matricielle. On obtient $e_0 = \log_2 (\alpha - \beta + 2)$. La liste complète des possibilités de passages d'un sommet à un autre, dans le graphe Γ, est donnée dans le tableau 2. Ces données permettent d'évaluer l'entropie d'ordre zéro lors du passage d'un sommet à un autre. Quelques données de caractère analogue, concernant les langues slaves, sont présentées par Revzin dans [64], p. 49.

TABLEAU 2

De	jusqu'à	Nombre des possibilités de passages	De	jusqu'à	Nombre des possibilités de passages	De	jusqu'à	Nombre des possibilités de passages	De	jusqu'à	Nombre des possibilités de passages
S_{-4}	A_0	2	S_{-3}	A_0	10	$\check{S}_{-3}$	E_0	1	P_{-3}	O_0	1
S_{-4}	Y_{-1}	2	Z_{-3}	A_0	2	$\check{S}_{-3}$	I_0	1	P_{-3}	U_0	2
Z_{-4}	Y_{-1}	1	Z_{-3}	$\breve{A}_0$	3	$\check{S}_{-3}$	U_0	1	S_{-3}	L_{-1}	2
S_{-3}	$\breve{A}_0$	3	Z_{-3}	E_0	2	F_{-3}	A_0	2	S_{-3}	R_{-1}	5
S_{-3}	E_0	7	Z_{-3}	O_0	2	F_{-3}	O_0	1	S_{-3}	W_{-1}	4
S_{-3}	O_0	3	Z_{-3}	$\breve{I}_0$	1	G_{-3}	A_0	3	S_{-3}	Y_{-1}	3
S_{-3}	$\breve{I}_0$	4	Z_{-3}	I_0	1	H_{-3}	A_0	2	Z_{-3}	R_{-1}	2
S_{-3}	I_0	6	Z_{-3}	U_0	2	M_{-3}	A_0	1	Z_{-3}	L_{-1}	1
S_{-3}	U_0	4	$\check{S}_{-3}$	A_0	3	P_{-3}	A_0	2	Z_{-3}	W_{-1}	1
F_{-3}	Y_{-1}	2	P_{-3}	Y_{-1}	3	K_{-3}	W_{-1}	1			
G_{-3}	W_{-1}	2	$\check{S}_{-3}$	Y_{-1}	2	K_{-3}	Y_{-1}	1			
G_{-3}	Y_{-1}	1	$\check{S}_{-3}$	R_{-1}	1	B_{-3}	W_{-1}	1			
H_{-3}	Y_{-1}	2	F_{-3}	W_{-1}	1	B_{-3}	Y_{-1}	1			
M_{-3}	Y_{-1}	1	D_{-3}	W_{-1}	1						

5. Redondance des groupes consonantiques

Le problème de la redondance des groupes consonantiques initiaux est en relation étroite avec ce que nous venons d'exposer. Nous allons maintenant envisager la question suivante : dans quelle mesure la connaissance des extrémités d'un groupe consonantique initial ou la connaissance de la consonne initiale et de la voyelle située immédiatement après le groupe détermine-t-elle la connaissance du groupe consonantique tout entier ? En d'autres mots, dans quelle mesure la connaissance des sommets extrêmes d'un chemin de Γ permet-elle de déterminer les sommets intermédiaires ?

Pour les chemins dont la longueur est égale à 2, la réponse est immédiate. Pour que les sommets x_{-n} et y_{-m} (avec $n = m + 2$) soient réunis par un seul chemin, il faut et il suffit que le sous-graphe $\Gamma(x_{-n}, y_{-m})$ ne possède aucun cycle, c'est-à-dire que le nombre cyclomatique de ce sous-graphe soit égal à zéro. C'est le cas des sous-graphes $\Gamma(Z_{-3}, L_{-1})$, $\Gamma(Z_{-3}, W_{-1})$, $\Gamma(G_{-3}, Y_{-1})$, $\Gamma(M_{-3}, Y_{-1})$, $\Gamma(\check{S}_{-3}, R_{-1})$, $\Gamma(F_{-3}, W_{-1})$, etc. Le sommet intermédiaire est, dans ce cas, redondant.

En ce qui concerne les chemins dont la longueur esté gale à 3, il est facile d'établir les règles suivantes : 1) Pour que le sommet S_2 du chemin h défini par les sommets S_1, S_2, S_3, S_4 soit déterminé par les autres trois sommets de h il faut il et suffit que la valence de S_3 dans le sous-graphe $\Gamma(S_1, S_4)$ soit égale à 1 ; 2) Pour que le sommet S_3 du chemin h soit déterminé par les trois autres sommets de h il faut et il suffit que le degré de S_2 dans le sous-graphe $\Gamma(S_1, S_4)$ soit égal à 1.

Chaque fois que la condition 1) (respectivement 2) est remplie, nous dirons que le *sommet* S_2 (respectivement S_3) est *redondant* (par rapport à h). Si les sommets s_2 et s_3 peuvent être déterminés par la connaissance des sommets S_1 et S_4, on dit que S_2 et S_3 sont *simultanément redondants*. Si S_2 et S_3 sont redondants sans être simultanément redondants, on dit qu'ils sont *alternativement redondants*. La liste complète des éléments redondants des groupes consonantiques initiaux est donnée dans le tableau 3.

TABLEAU 3

De	jusqu'à	Nombre des groupes à élément redondant		Nombres des groupes où les éléments d'indice — 1 et — 2 sont alternativement redondants	Nombres des groupes où les éléments d'indice — 1 et — 2 sont simultanément redondants	Nombre total des groupes ayant au moins un élément redondant	Nombre total des groupes sans aucun élément redondant
		à indice — 2	à indice — 1				
S_{-3}	$\breve{A}_0$	0	3	0	0	3	0
S_{-3}	E_0	0	3	0	0	3	4
S_{-3}	O_0	1	3	1	0	3	0
S_{-3}	$\hat{I}_0$	0	4	0	0	4	0
S_{-3}	I_0	0	2	0	0	2	4
S_{-3}	U_0	1	4	1	0	4	0
S_{-3}	A_0	0	3	0	0	3	7
Z_{-3}	A_0	2	2	2	0	2	0
Z_{-3}	$\breve{A}_0$	1	1	0	0	2	1
Z_{-3}	E_0	0	2	0	0	2	0
Z_{-3}	O_0	2	2	2	0	2	0
Z_{-3}	I_0	1	1	0	1	1	0
Z_{-3}	U_0	0	2	0	0	2	0
$\check{S}_{-3}$	A_0	1	1	0	0	2	1
$\check{S}_{-3}$	E_0	1	1	0	1	1	0
$\check{S}_{-3}$	I_0	1	1	0	1	1	0
$\check{S}_{-3}$	U_0	1	1	0	1	1	0
F_{-3}	A_0	0	2	0	0	2	0
F_{-3}	O_0	1	1	0	1	1	0
G_{-3}	A_0	1	1	0	0	2	0
H_{-3}	A_0	0	2	0	0	2	0
M_{-3}	A_0	1	1	0	1	1	0
P_{-3}	A_0	0	2	0	0	2	0
P_{-3}	O_0	1	1	0	1	1	0
P_{-3}	U_0	0	2	0	0	2	0
Z_{-3}	I_0	1	1	0	1	1	0

Pour mieux comprendre le tableau 3, nous allons donner un exemple. Considérons les groupes consonantiques qui relient S_{-3} à E_0 (figure 4).

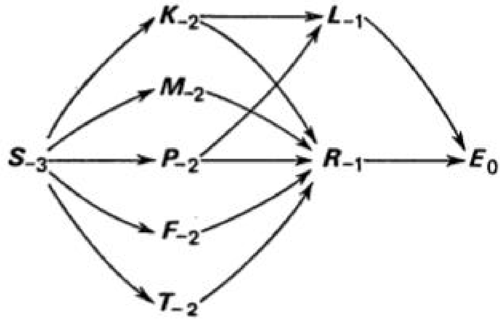


FIG. 4.

Pour les chemins $S_{-3}\ K_{-2}\ L_{-1}\ E_0$, $S_{-3}\ K_{-2}\ R_{-1}\ E_0$, $S_{-3}\ M_{-2}\ R_{-1}\ E_0$, $S_{-3}\ P_{-2}\ L_{-1}\ E_0$, $S_{-3}\ P_{-2}\ R_{-1}\ E_0$, $S_{-3}\ F_{-2}\ R_{-1}\ E_0$ et $S_{-3}\ T_{-2}\ R_{-1}\ E_0$ le sommet d'indice -1 est multivalent, donc, en vertu de la règle 1), il n'existe aucun chemin dont le sommet d'indice -2 soit redondant. Pour les chemins $S_{-3}\ M_{-2}\ R_{-1}\ E_0$, $S_{-3}\ F_{-2}\ R_{-1}\ E_0$ et $S_{-3}\ T_{-2}\ R_{-1}\ E_0$ le degré du sommet d'indice -2 est égal à 1, donc, en vertu de la règle 2), les sommets d'indice -1 sont redondants. En ce qui concerne les quatre autres chemins qui commencent en S_{-3} et finissent en E_0, les sommets d'indice -1 ont un degré égal à 2, donc les sommets d'indice -2 ne sont pas redondants.

Des considérations de ce genre pourraient être utiles pour perfectionner les systèmes de sténographie, pour la transmission sans voyelles d'un certain texte ou pour la reconstitution d'un texte mutilé. Les derniers deux problèmes ont fait l'objet des recherches de G. A. Miller et E. A. Friedman, en ce qui concerne l'anglais [55]. Une mesure fine et précise de la redondance permet une réduction sensible des éléments redondants, sans que la compréhension du message soit atteinte. Les règles 1) et 2) suggèrent l'introduction de la notion suivante : l'*indice de redondance* d'un chemin qui commence en x_{-3} et finit en y_0 est égal à la somme $a + b$, où a est le nombre des sommets d'indice -2 dont le degré est égal à 1 dans $\Gamma(x_{-3}, y_0)$ et b est le nombre des sommets d'indice -1, dont la valence est égale à 1 dans $\Gamma(x_{-3}, y_0)$. En utilisant le tableau 3, on constate que l'indice de redondance du passage de x_{-3} à y_0 est la somme des chiffres inscrits dans les deux premières colonnes, sur la ligne qui correspond à x_{-3}, y_0. Par exemple, l'indice de redondance du passage de S_{-3} à E_0 est égal à $0 + 3 = 3$; le même indice, pour le passage de S_{-3} à O_0, est égal à $1 + 3 = 4$.

Jusqu'ici, on a supposé que tout phonème a la même probabilité d'apparition et on n'a pas tenu compte du fait qu'un phonème est suivi par certains phonèmes de préférence à d'autres. La théorie des graphes a élaboré des méthodes pour prendre en considération la probabilité. Si à chaque arc du graphe ci-dessus est attribué un nombre positif (par exemple égal à la probabilité de passage d'une extrémité de l'arc à l'autre), on obtient alors des situations fréquemment rencontrées dans les problèmes de transport ([6], chapitre VIII), dans la programmation dynamique ([4] et chapitre VII de [6]) et dans beaucoup d'autres domaines, très développés du point de vue mathématique (et, spécialement, de la théorie des graphes). Les sous-graphes du type $\Gamma(x_{-n}, y_{-m})$ deviennent alors des réseaux.

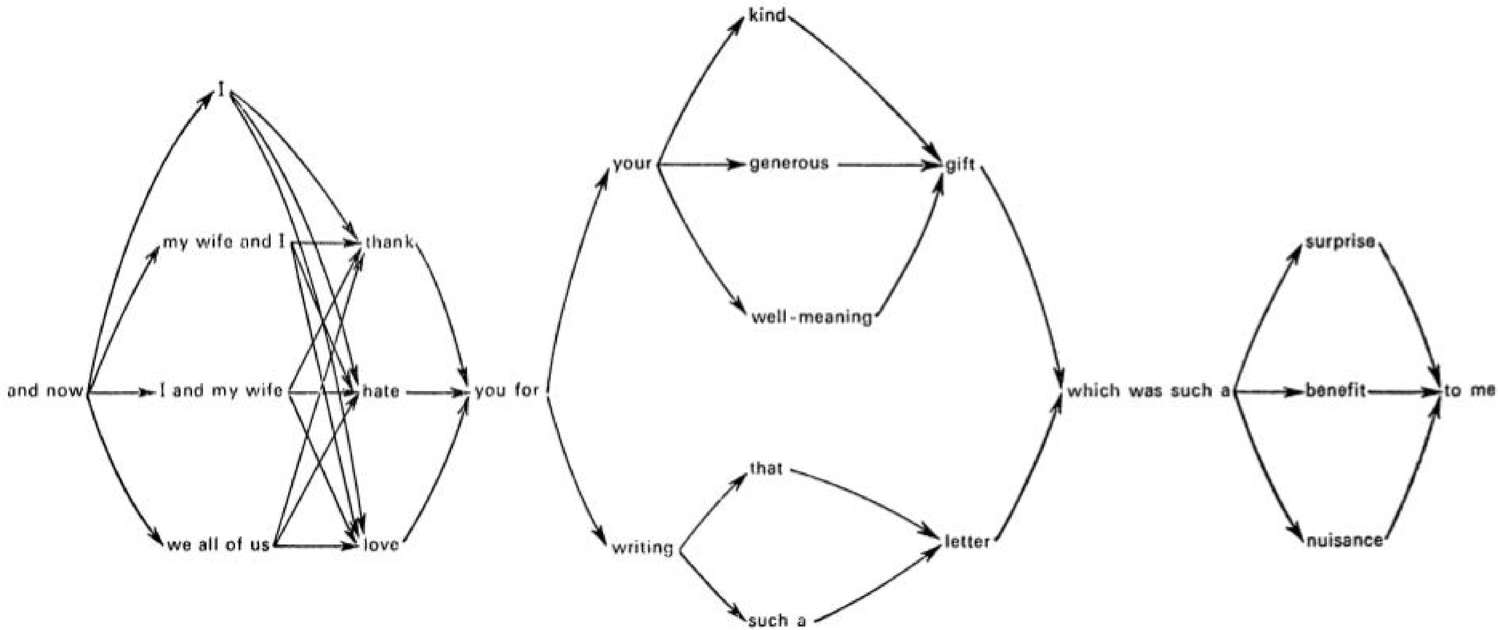
Le nombre cyclomatique d'un graphe trouve des applications dans l'étude de la structure morphématique, pour déterminer le nombre des possibilités de passage d'un morphème à un autre. Dans cet ordre d'idées, il faut mentionner deux livres, l'un de Y. Gentilhomme [22] (voir aussi son article [23]) et l'autre de J. Horecky [35], où la formation des mots russes et la structure morphématique de la langue slovaque sont décrites à l'aide des graphes. L'entropie morphématique du russe et du slovaque pourrait être évaluée assez commodément, en utilisant les descriptions de [22] et [35] et le lien entre cette entropie et la notion de nombre cyclomatique.

B. Brodda et H. Karlgren décrivent, à l'aide des graphes, la structure morphématique du suédois [10]. Ces auteurs donnent une méthode assez simple pour déterminer le nombre des chemins qui relient deux sommets fixes d'un graphe. Dans leur ouvrage, ils donnent un exemple de graphe assez semblable à $\Gamma(x_{-n}, y_{-m})$, qui décrit une portion de l'anglais et que nous reproduisons figure 5.

6. Stabilité interne et stabilité externe

Etant donné le graphe $\langle A, \rho \rangle$, un ensemble $B \subseteq A$ est dit *intérieurement stable* si pour tout arc dont l'extrémité initiale appartient à B, son extrémité finale n'appartient pas à B. Il est aisé de voir que toute partie d'un ensemble intérieurement stable est aussi un ensemble intérieurement stable. En supposant que A est fini, le plus grand nombre γ tel qu'il existe un ensemble intérieurement stable ayant γ éléments, est, par définition, le *nombre de stabilité interne* du graphe $\langle A, \rho \rangle$. Un ensemble intérieurement stable est parfois appelé un *ensemble indépendant*, tandis que le nombre de stabilité interne est appelé par Ore le *nombre d'indépendance* du graphe ([59], chapitre XIII). Shannon a mis en évidence la signification du nombre de stabilité interne dans le problème de la transmission d'un message oral ou écrit (voir, par exemple [59], p. 220-223).

Pour le graphe $\Delta = \langle A, \rho \rangle$ où A est l'ensemble des phonèmes consonantiques de la langue roumaine et où $a\rho b$ si et seulement s'il existe un groupe consonantique initial où a est immédiatement suivi par b, on a 20 sommets : *W, L, R, Y, S, N, P, K, F, M, Š, T, Z, V, B, G, D, H, Ž, Ţ* et 79 arcs : *SF, ZB, ŠF, DW, ZW, ŽW, SP, ŠP, ŽV, BL, FL, ML, PL, VL, BY, PY, VY, FY, MY, ZD, SL, ŠL, ZL, ŽN, DY, LY, NY, SY, TY, LW, NW, RW, SM, ŠM, ZM, ŢW, SW, ŠW, TW, KL, GL, HL, KN, GN, KR, GR, HR, KT, MN, PN, BR, FR, MR, PR, VR, PS, FT, PT, BW, FW, MW, PW, VW, SK, ZG, ŠN, SN, DR, ŠR, TR, ST, ŠT, ŢY, ZY, KF, KW, GW, HW, KV*. Un exemple d'ensemble



and now
I
my wife and I
I and my wife
we all of us
thank
hate
love
you for
your
kind
generous
well-meaning
gift
writing
that
such a
letter
which was such a
surprise
benefit
nuisance
to me

FIG. 5.

intérieurement stable de ce graphe est le suivant : { $B, D, G, M, T, V, H, \c{T}(TS)$ } (voir [54]). Il s'ensuit que le nombre de stabilité interne de Δ est supérieur à sept. S. Rudeanu a déterminé tous les ensembles intérieurement stables du graphe envisagé. Il résulte de sa recherche que le nombre de stabilité interne de Δ est égal à neuf. Un exemple d'ensemble intérieurement stable contenant neuf phonèmes est le suivant : { $P, K, M, B, G, D, H, \check{Z}, \c{T}$} [54], [70].

En ce qui concerne les ensembles intérieurement stables, le théorème suivant dû à Ramsay [75], n'est pas dépourvu de signification linguistique : à chaque nombre naturel n correspond un nombre naturel $g(n)$, tel que tout graphe formé d'au moins $g(n)$ sommets contient un sous-graphe complètement connexe à n sommets ou un sous-graphe intérieurement stable à n sommets. Mais la détermination du nombre $g(n)$ est assez difficile. C'est pour cela qu'on a cherché à établir des inégalités qui donnent, avec une bonne approximation, des valeurs approchées de $g(n)$. P. Erdös a établi les inégalités

$$2^{n/2} < g(n) \leqq \binom{2n-2}{n-1}$$

où par $\binom{2n-2}{n-1}$ on désigne le nombre de combinaisons de $2n - 2$ objets pris $n - 1$ à $n - 1$ [16]. Pour $n = 4$, on a

$$\binom{2n-2}{n-1} = \binom{6}{3} = 20\,,$$

c'est-à-dire exactement le nombre des consonnes du roumain. La deuxième inégalité de P. Erdös, appliquée au graphe Δ, entraîne l'existence de quatre consonnes qui satisfont une des deux conditions suivantes : 1° elles peuvent être juxtaposées, deux à deux, dans un groupe consonantique initial ; 2° aucun couple de ces consonnes ne peuvent être juxtaposées dans un tel groupe. Une vérification directe de cette affirmation est immédiate. Les consonnes P, R, T, $\check{S}$ et W forment un sous-graphe complètement connexe de Δ, tandis que les consonnes $B, D, G, M, T, V, \c{T}, H, \check{Z}$ forment un ensemble intérieurement stable.

Les inégalités de P. Erdös, concernant le nombre $g(n)$, ont de grandes perspectives d'application en phonologie. Par exemple, pour chercher quelles sont les possibilités de combinaison des phonèmes et, surtout, des sons de la langue, où le nombre des éléments est très élevé, il est plus efficace de remplacer les essais empiriques par un procédé mathématique.

Etant donné un graphe $\langle A, \rho \rangle$, un ensemble $B \subseteq A$ est extérieurement stable si pour chaque sommet $a \in A - B$ il existe un sommet $b \in B$ tel que $a\rho b$. Pour le graphe Δ, l'existence d'un ensemble extérieurement stable contenant deux éléments seulement, Y et W, a été établie par Marcus et Vasiliu [54]. Ce fait constitue une caractéristique du consonantisme roumain, qui manifeste une très grande variété d'occurrences immédiatement avant les semi-consonnes Y et W.

Le plus petit nombre γ tel qu'il existe un ensemble extérieurement stable formé de γ sommets est, par définition, le *nombre de stabilité externe* du graphe. Pour le graphe Δ, ce nombre est égal à deux.

7. Le noyau et sa signification linguistique

Un ensemble de sommets qui est à la fois intérieurement et extérieurement stable est appelé un *noyau* du graphe. Pour le graphe Δ, les semi-consonnes Y et W forment un noyau. Cela veut dire que Y et W ne peuvent pas figurer, l'une après l'autre, dans un groupe consonantique initial, mais toute autre consonne est immédiatement suivie par Y ou W dans un groupe consonantique initial au moins. La signification phonologique de ce noyau est donc évidente. S. Rudeanu a montré que Δ n'admet aucun noyau autre que $\{ Y, W \}$ [70].

L'existence d'un *noyau* dans Δ ne doit pas nous étonner. Il y a un théorème de M. Richardson ([66], [67], [68] ; voir aussi le chapitre V de [6]) qui affirme que tout graphe fini ne contenant aucun circuit de longueur impaire possède un noyau. Or, il est aisé de voir que le graphe Δ remplit ces conditions. D'ailleurs, il faut remarquer que le consonantisme initial du roumain est très asymétrique ; la plupart des consonnes ne se combinent, dans un groupe initial, que dans un ordre déterminé (exception : *PS*, *SP*).

Pour faire mieux ressortir la signification linguistique du noyau, nous allons considérer encore deux exemples.

On sait que, dans la langue roumaine, très nombreux sont les mots où deux phonèmes juxtaposés sont l'un consonantique, l'autre vocalique. En nous limitant à ces mots, considérons le graphe $\langle A, \rho \rangle$ où A est l'ensemble des phonèmes du roumain et où on a $a\rho b$ si et seulement s'il existe un mot roumain contenant la juxtaposition *ab*. Comme chaque consonne roumaine est suivie, au moins une fois, par une voyelle, on en déduit que les voyelles forment un noyau du graphe considéré. Peut-être cette considération vaut-elle, avec une bonne approximation, pour beaucoup d'autres langues, car on en a tenu compte pour élaborer des systèmes de sténographie, où les voyelles sont omises lorsqu'elles sont intercalées entre deux consonnes.

Considérons une structure syntaxique simplifiée du roumain, à savoir : substantif-adjectif-verbe-adverbe. Toute combinaison de valeurs grammaticales concernant le substantif, l'adjectif, le verbe ou l'adverbe sera, par définition, un *grammatème*. Par exemple, la combinaison déterminé-masculin-pluriel-génitif est un grammatème de l'adjectif roumain, tandis que la combinaison déterminé-singulier-datif est un grammatème du substantif roumain. Si l'on réduit le roumain aux propositions ayant la structure simplifiée ci-dessus, alors le graphe des grammatèmes roumains (où deux grammatèmes g_1 et g_2 définissent un arc si et seulement s'il existe une proposition roumaine contenant une réalisation de g_2 immédiatement après une réalisation de g_1) admet un noyau formé de 41 grammatèmes : 40 s'obtiennent en combinant les différentes valeurs grammaticales de l'adjectif, en exceptant celles qui expriment des degrés de comparaison (2 valeurs de détermination, 2 valeurs de genre, 2 valeurs de nombre et 5 valeurs casuelles ; leur produit fait 40) et une valeur correspond à l'adverbe, considéré avec un degré de comparaison choisi au hasard. On remarque que le noyau est formé exclusivement de grammatèmes régis, tandis que tout grammatème n'appartenant pas au noyau est un grammatème du substantif ou du verbe, donc un grammatème régissant.

8. Nombre chromatique d'un graphe et sa signification linguistique

On sait qu'un message linguistique est reçu dans de meilleures conditions lorsque l'opposition entre deux éléments consécutifs du message est bien marquée. De ce point de vue, il est intéressant d'étudier le problème de la différenciation des phonèmes voisins d'après la sonorité, le lieu d'articulation ou le mode d'articulation. Ce problème a été étudié dans [53], [54] et [12] en ce qui concerne le consonantisme de la langue roumaine. La répartition des consonnes roumaines d'après les trois critères ci-dessus est donnée dans le tableau 4. Une classification plus fine, d'après les mêmes critères, est donnée dans le tableau 5.

TABLEAU 4

	Labiales		Dentales		Palatales		Vélaires	
	sourdes	sonores	sourdes	sonores	sourdes	sonores	sourdes	sonores
occlusives	*P*	*B, M*	*T*	*D, N*			*K*	*G*
continues	*F*	*V, W*	*S, Š*	*L, R* *Z, Ž*		*Y*	*H*	
semi-occlusives			*Ţ*					

Par une méthode analogue on peut étudier le problème de la différenciation des grammatèmes du point de vue des parties du discours qu'ils représentent. Voici comment se pose et se résout un tel problème à l'aide de la théorie des graphes.

Supposons que nous pouvons colorier les sommets d'un graphe à l'aide de p couleurs, de façon que deux sommets adjacents ne soient pas de la même couleur. On dit, dans ce cas, que le graphe est *p-chromatique*. Le plus petit nombre p tel que le graphe est p-chromatique est appelé le *nombre chromatique* du graphe. Encore une définition : si l'on a colorié les sommets d'un graphe de façon que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur, on dit que le graphe est *chromatique par rapport au coloriage considéré*.

TABLEAU 5

	Bilabiales			Labiodentales			Dentales			Latérales			Antéropalatales			Médiopalatales			Vélaires		
	sourdes	neutres	sonores	sourdes	neutres	sonores	sourdes	neutres	sonores	sourdes	neutres	sonores	sourdes	neutres	sonores	sourdes	neutres	sonores	sourdes	neutres	sonores
occlusives	*P*	*M*	*B*				*T*	*N*	*D*										*K*		*G*
semi-occlusives								*Ṭ*													
fricatives		*W*		*F*		*V*	*S*		*Z*					*Y*						*H*	
sifflantes																*Š*		*Ž*			
vibrantes																	*R*				
continues											*L*										

Proposons-nous maintenant d'étudier la différenciation des consonnes voisines, dans les groupes consonantiques initiaux du roumain, au point de vue de la localisation. On a quatre types de localisation : labial, dental, palatal et vélaire. Comme on voit dans les tableaux 4 et 5, deux consonnes voisines, dans un groupe consonantique initial, ne sont pas toujours différenciées au point de vue de la localisation. Il est naturel de se demander si l'absence de la différenciation est due seulement à des raisons d'ordre linguistique, si elle découle exclusivement de la nature du parler humain, ou bien si elle est aussi déterminée par des causes extra-linguistiques. La théorie des graphes permet de répondre à ces questions. En effet, en adoptant la répartition donnée par le tableau 4, attribuons à chaque type de localisation une certaine couleur : labial-bleu, dental-vert, palatal-rouge, vélaire-jaune et colorions chaque sommet du graphe des groupes consonantiques initiaux avec la couleur qui correspond à son type de localisation. Le fait que les consonnes voisines ne sont pas toujours différenciées d'après le type de localisation s'exprime par le caractère non chromatique du graphe Δ. Le problème est maintenant le suivant : le caractère non chromatique du graphe Δ est-il dû exclusivement à des causes linguistiques ou provient-il aussi de certaines causes non linguistiques ? Si l'on peut montrer que le nombre chromatique du graphe Δ est supérieur à quatre (c'est-à-dire au nombre des couleurs) cela prouvera alors que c'est la deuxième variante de l'alternative qui se réalise ; donc, indépendamment de toute cause linguistique ou liée à la nature du parler humain, la différenciation d'après la localisation, de toutes les consonnes voisines dans les groupes consonantiques initiaux du roumain est une impossibilité. Autrement dit, si le nombre chromatique est supérieur à quatre, il n'est pas nécessaire de préciser qu'il s'agit des consonnes du roumain ; il suffit de dire qu'on a un graphe de 20 sommets et de 79 arcs et d'indiquer effectivement ces arcs pour pouvoir conclure que la différenciation des sommets adjacents d'après un critère comportant seulement quatre valeurs distinctives est une impossibilité. C'est justement ce qui se passe, car S. Rudeanu a démontré (théorème 4 de [70]) que le nombre chromatique de Δ est égal à 5. Pour des raisons similaires, en adoptant toujours la classification donnée par le tableau 4, l'existence, dans Δ, des arcs qui relient des consonnes appartenant au même mode d'articulation (on a six adjacences occlusif-occlusif : *MN*, *PN*, *PT*, *KN*, *GN*, *KT* et 27 adjacences continu-continu : *SF*, *ŠF*, *FR*, *VR*, *HL*, *HR*, *SL*, *ZL*, *ŠR*, etc) est une nécessité extra-linguistique, de nature combinatoire, car le nombre chromatique de Δ est supérieur au nombre des modes d'articulation. La même situation se présente en ce qui concerne l'existence des adjacences sonore-sonore (*ZB*, *DW*, *ŽW*, *LW*, *NW*, *RW*, *ZM*, *ZW*, *ZV*, *BW*, *MW*, *VW*, *BL*, *ML*, *VL*, etc.) et sourd-sourd (*SF*, *ŠF*, *SP*, *ŠP*, *PS*, *FT*, *PT*, *SK*, *KT*, *ST*, *ŠT*, *KF*). Cette existence est, entre autres, une conséquence du fait que le nombre des valeurs de sonorité est inférieur au nombre chromatique du graphe Δ.

En adoptant la classification plus fine, donnée par le tableau 5, la situation est tout à fait différente. On constate qu'on a, maintenant, sept valeurs de localisation, six valeurs du mode d'articulation et trois valeurs de sonorité. Puisque le nombre des valeurs de localisation et le nombre des modes d'articulation dépassent maintenant le nombre chromatique du graphe Δ, l'existence des adjacences dental-dental (*ST*, *SN*, *ZD*), bilabial-bilabial (*PW*, *MW*, *BW*), médio-palatal-médio-palatal (*ŠR*), occlusif-occlusif (*MN*, *PN*, *KN*, *GN*, *KT*, *PT*) et fricatif-fricatif (*SF*, *VY*, *SW*, *ZW*, *ZV*, *FW*, *VW*, *SY*, *HW*, *FY*, *ZY*) ne peut plus être expliquée par des raisons de nature combinatoire, concernant le rapport entre le nombre des « couleurs » et le nombre chromatique de Δ ; cette existence a des causes linguistiques. D'autre part, le nombre des valeurs de sonorité reste, maintenant aussi, inférieur au nombre chromatique de Δ, ce qui rend nécessaire l'existence des arcs reliant des consonnes du même type de sonorité (sonore-sonore : *ZB*, *ZV*, *ZD*, *ZG* ; neutre-neutre : *MR*, *HR*, *MN*, *ML*, etc. ; sourd-sourd : *SF*, *ŠF*, *SP*, *ŠP*, *PS*, *FT*, *PT*, etc.).

Il faut attirer l'attention sur un problème qui se pose maintenant d'une façon naturelle : étant donnés un graphe $\mathscr{G}$ et un coloriage de $\mathscr{G}$, déterminer le nombre minimum de sommets du graphe qu'il faut écarter de $\mathscr{G}$ pour que le graphe qui reste soit chromatique. Ce problème suggère à déterminer le plus grand graphe partiel chromatique de $\mathscr{G}$, le plus grand sous-graphe chromatique de $\mathscr{G}$ et le plus grand sous-graphe partiel chromatique de $\mathscr{G}$. Pour les coloriages de signification phonologique du graphe Δ, coloriages qui ont été considérés ci-dessus, un aspect de ce problème a été abordé, d'une façon empirique, dans [53] et [54]. Les résultats sont donnés dans le tableau 6. Mais il faut chercher une méthode générale et nous avons ici un exemple de problème que la linguistique pose à la théorie des graphes.

TABLEAU 6

	Différenciation des caractères d'après le	Nombre des couleurs	Nombre des arcs qui unissent des sommets de la même couleur	Nombre minimum de sommets qui doivent être supprimés pour obtenir un graphe chromatique	Nombre des couleurs qui ne fournissent pas des sommets adjacents de la même couleur
Classification d'après le tableau 4	lieu d'articulation	4	17	5	2
	mode d'articulation	3	33	10	1
	type de sonorité	2	47		0
	lieu d'articulation ou mode d'articulation	8	6	3	4
	lieu d'articulation ou type de sonorité	8	9	5	5
	mode d'articulation ou type de sonorité	5	18	7	1
Classification d'après le tableau 5	lieu d'articulation	7	7	4	3
	mode d'articulation	6	17	6	4
	type de sonorité	3	31	9	0
	lieu d'articulation ou mode d'articulation	12	0	0	12
	lieu d'articulation ou type de sonorité	16	3	3	13
	mode d'articulation ou type de sonorité	11	6	5	6

Des problèmes analogues ont été traités en ce qui concerne les groupes consonantiques finaux (Câşlaru, [12]). On peut aborder de la même manière le problème de la différenciation des mots lorsqu'on prend comme critère la partie du discours. Il suffit d'envisager le graphe $\mathcal{G}_1$ dont les sommets sont les mots (d'une certaine langue naturelle) et dont les arcs sont les couples ordonnés de mots dont l'occurrence est possible dans une phrase au moins de la langue considérée. En attribuant à chaque partie du discours une certaine couleur, on constate que le graphe $\mathscr{G}_1$ n'est pas chromatique, pour la plupart des langues naturelles ; en effet, il est aisé de trouver un substantif immédiatement suivi d'un autre substantif, ou un verbe immédiatement suivi d'un autre verbe. Afin de déterminer le nombre chromatique de $\mathscr{G}_1$, on peut employer une des diverses méthodes proposées dans la littérature ([6], [13], [37], [45], [46], [70], [81], etc.) ; ces articles présentent aussi des méthodes pour la détermination des nombres de stabilité — interne ou externe — et du noyau d'un graphe.

9. Analyse paradigmatique qualitative

Plusieurs descriptions utilisées en phonologie, morphologie, syntaxe ou sémantique peuvent être synthétisées à l'aide des considérations développées par Ju. I. Levin [43] et que nous exposons dans les paragraphes 9 et 10.

Soient A un ensemble d'objets et E un ensemble de propriétés. Supposons que par rapport à chaque propriété $p \in E$ un objet quelconque $a \in A$ peut se trouver dans une des deux situations suivantes : a possède la propriété p ou bien a ne possède pas cette propriété. Si

$$A = \{a, b, c, d, e, f\} \qquad \text{et} \qquad E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\},$$

la situation des objets de A par rapport aux propriétés $e_1, ..., e_5$ est décrite par le tableau 7.

TABLEAU 7

Propriétés / Objets	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
a	+	+	+	0	0
b	+	+	0	0	0
c	0	0	+	0	0
d	+	+	0	0	0
e	0	0	0	+	+
f	0	0	0	+	0

Le signe + situé à l'intersection d'une certaine ligne avec une certaine colonne montre que l'objet de la ligne considérée possède la propriété de la colonne considérée ; le signe 0 situé au même endroit montre que l'objet ne possède pas cette propriété. Par exemple, l'objet b possède la propriété e_2, mais il ne possède pas la propriété e_3.

Si deux objets a et b possèdent au moins une propriété commune, nous dirons que a et b sont *liés* et écrirons $a\omega b$. Le tableau 7 montre qu'on a $a\omega b$, $a\omega c$, $a\omega d$, $b\omega d$ et $e\omega f$. La relation ω est réflexive et symétrique dans A, mais elle n'est pas transitive ; en effet, on a $b\omega a$ et $a\omega c$, sans avoir $b\omega c$. L'ensemble des objets qui sont liés à un objet donné — soit a — est appelé le *voisinage loca* de a et est désigné par $L(a)$. Du tableau 7 on déduit immédiatement que $L(a) = \{ a, b, c, d \}$, $L(b) = L(d) = \{ a, b, d \}$, $L(c) = \{ a, c \}$ et $L(e) = L(f) =$ $= \{ e, f \}$. Un objet x tel que $L(x) = \{ x \}$ est dit *isolé*.

Deux objets a et b seront, par définition, *associés*, s'il existe une suite finie d'objets $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tels que $a\omega c_1$, $c_1 \omega c_2, \ldots, c_{n-1} \omega c_n$, $c_n \omega b$. Nous écrirons, dans ce cas, $a \sim b$. Cette notation est justifiée, car il est aisé de voir que $\sim$ est une relation d'équivalence dans A. L'ensemble $G(x)$ des objets associés à un objet x est, par définition, le *voisinage global* de x. Dans l'exemple ci-dessus on a $G(a) = G(b) = G(c) = G(d) = \{ a, b, c, d \}$ et $G(e) = G(f) = \{ e, f \}$. On a, pour tout objet x, $L(x) \subseteq G(x)$.

Il est facile de reconnaître, dans ce que nous venons de dire, la description d'un graphe $\langle A, \rho \rangle$ où A est l'ensemble des objets, tandis que, pour $a \in A$, $b \in A$, on a $a\rho b$ si et seulement si $a\omega b$. Deux objets sont associés si et seulement si les sommets correspondants du graphe $\langle A, \rho \rangle$ sont reliés par un chemin. Le voisinage global d'un objet $x \in A$ n'est autre chose que la composante connexe du sommet x. Puisque le graphe $\langle A, \rho \rangle$ est symétrique, le degré et la valence d'un sommet $x \in A$ sont égaux au nombre d'éléments du voisinage local $L(x)$ de x.

Etant donnés deux objets associés a et b, désignons par n la longueur du plus court chemin reliant a et b dans $\langle A, \rho \rangle$. Le nombre $n + 1$ sera, par définition, la *distance* entre les objets a et b ; elle sera désignée par $\delta(a, b)$. Si les objets a et b ne sont pas associés, on posera $\delta(a, b) = \infty$. Il est aisé de voir que δ satisfait toutes les propriétés d'une distance : on a $\delta(a, b) = 0$ si et seulement si $a = b$; on a $\delta(a, b) = \delta(b, a)$; pour trois objets quelconques a, b, et c on a $\delta(a, b) \leqslant \delta(a, c) + \delta(c, b)$. En ce qui concerne le graphe défini par le tableau 7, graphe dont la représentation géométrique est donnée figure 6, les distances réciproques entre les divers sommets sont données par le tableau 8.

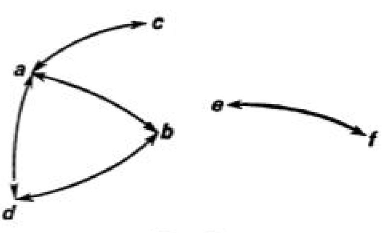


FIG. 6.

TABLEAU 8

	a	b	c	d	e	f
a	0	1	1	1	∞	∞
b		0	2	1	∞	∞
c			0	2	∞	∞
d				0	∞	∞
e					0	1
f						0

TABLEAU 9

	e_1	e_2	e_3
a	+	+	+
b	+	+	0
c	+	0	0

TABLEAU 10

	e_1	e_2	e_3
a	+	+	0
b	+	0	+
c	0	+	+

L'existence de deux sommets dont la distance est infinie est possible si et seulement si le graphe envisagé n'est pas connexe ; c'est justement le cas du graphe défini par le tableau 7. Il est à remarquer que le graphe associé au tableau 7 apporte moins d'information que ce tableau. En effet, ce même graphe correspond aussi aux tableaux 9 et 10, qui diffèrent essentiellement du tableau 7. Dans cet ordre d'idées, il faut distinguer deux sortes de notions. On a, d'une part, des notions qui peuvent être décrites à l'aide du graphe (par exemple, le voisinage local, le voisinage global et la distance), et, d'autre part, des notions qui peuvent être décrites seulement à l'aide du tableau (par exemple, la mesure de rapprochement, qui sera étudiée ci-dessous).

Les chapitres précédents fournissent beaucoup d'illustrations pour les considérations ci-dessus. En voici quelques-unes.

1) A = un ensemble d'oppositions, E = { *identique*, *privative*, *disjonctive*, *équipollente* } (voir le chapitre I).

2) A = un ensemble de paires d'oppositions ; E = { *proportionnelle*, *non proportionnelle*, *homogène*, *non homogène* }.

3) A = un ensemble de sons, E = un ensemble de valeurs (voir le paragraphe 2 du chapitre II).

4) A = un ensemble de phonèmes ; E = un ensemble de valeurs pertinentes (voir le paragraphe 15 du chapitre II).

5) A = un ensemble de quasi-morphèmes ; E = { *réductible*, *irréductible*, *base*, *différentiel* } (voir les paragraphes 19 et 20 du chapitre III).

6) A = un ensemble de catégories grammaticales ; E = { *élémentaire*, *non élémentaire*, *productive*, *non productive*, *normale*, *non normale* } (voir le chapitre V).

7) A = un ensemble de contextes ; E = { *repéré*, *non repéré* } (voir les chapitres I et VI).

Considérons encore un exemple, dû à Levin [43]. Soit

$$A = \{ p, p', b, b', f, f', v, v' \},$$

les éléments de A étant des phonèmes russes, et soit E = { *dur*, *mou*, *continu*, *discontinu*, *sonore*, *sourd* } un ensemble de valeurs pertinentes. Les rapports entre les éléments de A et ceux de E sont décrits par le tableau 11.

TABLEAU 11

Phonèmes / Valeurs	p	p'	b	b'	f	f'	v	v'
Dur	+	−	+	−	+	−	+	−
Mou	−	+	−	+	−	+	−	+
Continu	−	−	−	−	+	+	+	+
Discontinu ..	+	+	+	+	−	−	−	−
Sonore	−	−	+	+	−	−	+	+
Sourd	+	+	−	−	+	+	−	−

Le graphe associé au tableau 11 est donné dans la figure 7.

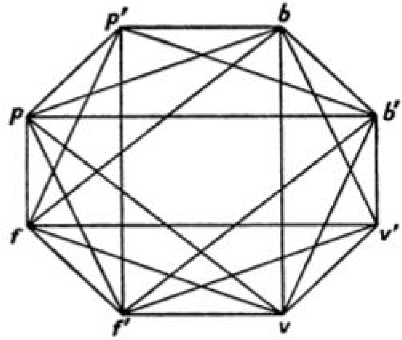


FIG. 7.

10. Analyse paradigmatique quantitative

Le graphe étudié dans le paragraphe précédent ne peut pas distinguer le cas où deux objets a et b possèdent une seule propriété commune du cas où a et b possèdent plusieurs propriétés communes. Il faut, pour cela, introduire une caractéristique quantitative, appelée la *mesure de rapprochement* des objets a et b, désignée par $\sigma(a, b)$ et définie de la manière suivante : si a possède k propriétés, si b possède m propriétés et si le nombre des propriétés communes à a et b est égal à s, alors on a

$$\sigma(a, b) = \frac{s^2}{km}.$$

On constate qu'on a toujours $0 \leqslant \sigma(a, b) \leqslant 1$, tandis que $\sigma(a, b) = 0$ si et seulement si $s = 0$ (c'est-à-dire si et seulement si les objets a et b ne sont pas liés) et $\sigma(a, b) = 1$ si et seulement si $s = k = m$ (c'est-à-dire si et seulement si a et b ont les mêmes propriétés). Dans le cas particulier où toute propriété de a est aussi une propriété de b, on a $s = k < m$, donc

$$\sigma(a, b) = \frac{k^2}{km} = \frac{k}{m} \tag{1}$$

et la mesure de rapprochement est justement le rapport entre le nombre des propriétés de a et celui des propriétés de b. Pour les différents couples d'objets envisagés dans le tableau 11, la mesure de rapprochement est donnée par le tableau 12.

TABLEAU 12

	p	p'	b	b'	f	f'	v	v'
p	1	4/9	4/9	1/9	4/9	1/9	1/9	0
p'		1	1/9	4/9	1/9	4/9	0	1/9
b			1	4/9	1/9	0	4/9	1/9
b'				1	0	1/9	1/9	4/9
f					1	4/9	4/9	1/9
f'						1	1/9	4/9
v							1	4/9
v'								1

Il y a encore une distinction qui n'est pas envisagée dans le paragraphe précédent. Un objet ayant plusieurs propriétés ne les possède pas avec la même intensité ou dans la même mesure. Il faut associer à chaque propriété p d'un objet a un certain nombre positif qui sera le *poids* de p par rapport à a. Si a ne possède pas la propriété p, le poids de p par rapport à a sera égal à zéro. On impose la restriction suivante : la somme des poids des diverses propriétés de a est égale à 1. Un choix possible des poids, pour les objets et les propriétés envisagées dans le tableau 7 est indiqué dans le tableau 13.

TABLEAU 13

Objets \ Propriétés	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
a	0,4	0,1	0,5	0	0
b	0,1	0,9	0	0	0
c	0	0	1	0	0
d	0,6	0,4	0	0	0
e	0	0	0	0,3	0,7
f	0	0	0	1	0

Nous allons maintenant définir la *mesure de rapprochement de deux objets a et b dont les propriétés sont pondérées* par rapport à a et b. Désignons par $e_1, e_2, ..., e_n$ les propriétés appartenant à a ou à b, par $p_1, p_2, ..., p_n$ les poids de ces propriétés par rapport à a et par $q_1, q_2, ..., q_n$ les poids par rapport à b. Par définition, nous aurons

$$\sigma(a, b) = \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{p_i\, q_i}\right)^2 . \qquad (2)$$

Voici quelques propriétés de $\sigma(a, b)$, qui expliquent la définition posée ; $\sigma(a, b)$ ne dépend ni de l'ordre des objets (c'est-à-dire $\sigma(a, b) = \sigma(b, a)$), ni du mode de numération des propriétés ; on a toujours $0 \leqslant \sigma(a, b) \leqslant 1$, tandis que $\sigma(a, b) = 0$ si et seulement si les objets a et b ne sont pas liés ($p_i \neq 0$ entraîne $q_i = 0$ et $q_j \neq 0$ entraîne $p_j = 0$) et $\sigma(a, b) = 1$ si et seulement si $p_i = q_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Nous allons montrer que la mesure de rapprochement définie par la formule (1) est un cas particulier de la définition (2) ; c'est justement le cas où toutes les propriétés de a ont, par rapport à a, le même poids, égal à $\frac{1}{k}$, et où toutes les propriétés de b ont, par rapport à b, le même poids, égal à $\frac{1}{m}$. En effet, la formule (2) donne, dans ce cas,

$$\sigma(a, b) = \Bigg(\underbrace{\sqrt{\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{m}} + \cdots + \sqrt{\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{m}}}_{s \text{ termes}}\Bigg)^2 = \left(\frac{s}{\sqrt{km}}\right)^2 = \frac{s^2}{km}$$

et on obtient ainsi l'évaluation (1).

La mesure de rapprochement définie par (2) est souvent utilisée avec l'interprétation suivante : p_i est la probabilité pour que l'objet a possède la propriété e_i, tandis que q_i est la probabilité pour que l'objet b possède la propriété e_i. Bien entendu, on doit préciser, chaque fois, les circonstances dans lesquelles ces probabilités sont calculées (par rapport à quels textes, etc.).

Une nouvelle amélioration de la mesure de rapprochement concerne la possibilité que certaines propriétés se trouvent dans une certaine parenté. Si cette parenté peut être indiquée d'une façon numérique, désignons par λ_{ij} la *parenté des propriétés* e_i et e_j, en supposant que $0 \leqslant \lambda_{ij} \leqslant 1$, où $\lambda_{ij} = 0$ si entre e_i et e_j il n'y a aucune parenté et où $\lambda_{ij} = 1$ si e_i coïncide avec e_j. Afin d'obtenir une mesure de rapprochement de deux objets a et b tenant compte de la parenté des diverses propriétés, on doit remplacer, dans (2), chaque valeur p_i par

$$p_i' = \frac{1}{\lambda_a} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\, p_i \qquad \Bigg(\text{où } \lambda_a = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} p_j\, \lambda_{ij}\Bigg)$$

et chaque valeur q_i par

$$q_i' = \frac{1}{\lambda_b} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\, q_j \qquad \Bigg(\text{où } \lambda_b = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} q_j\, \lambda_{ij}\Bigg).$$

La mesure de rapprochement sera maintenant donnée par

$$\sigma(a, b) = \frac{1}{\lambda_a \cdot \lambda_b}\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\, p_j \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\, q_j}\right)^2. \tag{3}$$

Dans le cas particulier où $\lambda_{ij} = 0$ pour $i = j$, la formule (3) se réduit à (2).

Pour illustrer la formule (3), posons $A = \{ a, b, c \}$, $E = \{ e_1, e_2, e_3 \}$ et introduisons les poids indiqués par le tableau 14. Introduisons aussi les

TABLEAU 14

	e_1	e_2	e_3
a	1	0	0
b	0,5	0,5	0
c	0,5	0	0,5

coefficients de parenté $\lambda_{12} = 0{,}8$, $\lambda_{13} = 0{,}3$, $\lambda_{23} = 0{,}1$. Si la parenté des propriétés n'est pas prise en considération, la formule (2) donne $\sigma(a, b) = 0{,}5$, $\sigma(a, c) = 0{,}5$, $\sigma(b, c) = 0{,}25$. Si l'on envisage la parenté des propriétés, la formule (3) donne

$$\sigma(a, b) = 0{,}99\,, \quad \sigma(a, c) = 0{,}92\,, \quad \sigma(b, c) = 0{,}89\,.$$

Il peut arriver que les diverses propriétés envisagées ne soient pas de la même importance. Par exemple, si les objets sont les sons du langage, la propriété d'être vocalique est bien plus importante que la tonalité haute. Si l'on peut caractériser l'*importance de la propriété* e_i par un nombre positif m_i (les nombres $m_1, \ldots, m_n$ pouvant toujours être remplacés par des nombres proportionnels $\gamma m_1, \ldots, \gamma m_n$), alors les poids $p_1, p_2, \ldots, p_n$ des propriétés $e_1, e_2, \ldots, e_n$ par rapport à un objet a seront remplacés par $\gamma_a m_1 p_1, \gamma_a m_2 p_2, \ldots, \gamma_a m_n p_n$, où le coefficient γ_a sera choisi tel que la somme des nouveaux poids soit encore égale à 1 ; on aura donc

$$\lambda_a = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} m_i\, p_i}\,.$$

Si l'on envisage encore un objet, b, dont les valeurs associées par le procédé ci-dessus sont $\gamma_b\, m_i\, q_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, la formule (2) donne

$$\sigma(a, b) = \gamma_a\, \gamma_b \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \sqrt{p_i\, q_i} \right)^2 . \tag{4}$$

Par exemple, si $A = \{ a, b \}$, $E = \{ e_1, e_2, e_3 \}$ et si $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0{,}7$, $q_1 = 0{,}3$, $q_2 = 0{,}6$, $q_3 = 0{,}1$, on a, d'après (2), $\sigma(a, b) = 0{,}31$. Mais si la propriété e_1 est cinq fois plus importante que e_2 et e_3, on aura

$$m_1 = 5\,, \quad m_2 = m_3 = 1\,,$$

donc, en vertu de (4),

$$\gamma_a = \frac{1}{5.0,3 + 0,7} = 0,45\,, \quad \gamma_b = 0,45\,, \quad \sigma(a, b) = (0,45)^2\,(5\,\sqrt{(0,3)}^2 + \\ + \sqrt{0,7.0,1})^2 = 0,62\,.$$

Considérons un objet étalon π et n propriétés dont les poids, par rapport à π, sont égaux à $\frac{1}{n}$. Si les poids des mêmes propriétés par rapport à un autre objet a sont $p_1, p_2, \ldots, p_n$, la mesure de rapprochement donnée par (2) est

$$\sigma(a, \pi) = \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{1}{n}\, p_i}\right)^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{p_i}\right)^2$$

et caractérise le *degré d'homogénéité* de l'objet a par rapport aux propriétés envisagées ; plus les poids p_i sont proches de $\frac{1}{n}$, plus $\sigma(a, \pi)$ est proche de 1. Si, au contraire, le poids d'une propriété est très proche de 1 par rapport à a, tandis que les poids des autres propriétés sont très petits, alors $\sigma(a, \pi)$ est très proche de sa borne inférieure, $\frac{1}{n}$. Pour obtenir une mesure variant de 0 à 1, nous allons utiliser une autre expression, différant un peu de $\sigma(a, \pi)$ et qui sera désignée par τ_a et appelée la *mesure d'homogénéité* de l'objet a (par rapport aux propriétés envisagées) :

$$\tau_a = \frac{1}{n-1}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{p_i}\right)^2 - 1\right].$$

Si l'on considère que l'objet a est la langue russe écrite, les propriétés sont les lettres de l'alphabet russe (y compris l'espace vide ; ë est identifiée à e, ь à ъ) et les poids p_i sont les fréquences relatives des lettres (fréquences indiquées par exemple, dans [38]), alors $\tau_a = 0,78$; on peut donc dire que la mesure d'homogénéité du russe par rapport à la fréquence des lettres est égale à 0,78. Pour l'anglais, cette mesure est plus petite : 0,74 (en utilisant les fréquences indiquées dans [9]). Il s'ensuit que dans les textes russes les lettres sont distribuées de façon plus homogène qu'en anglais. D'ailleurs, τ_a est comparable au rapport entre l'entropie H_1 d'ordre 1 et l'entropie H_0 d'ordre 0, H_1 étant l'entropie par lettre qui tient compte de la fréquence des lettres et H_0 étant l'entropie par lettre qui ne tient pas compte de la fréquence. On sait qu'on a

$$H_0 = \log_2 n \qquad \text{et} \qquad H_1 = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i\,,$$

n étant le nombre des lettres. On a

$$\frac{H_1}{H_0} = 0,86 \quad \text{pour le russe et} \quad \frac{H_1}{H_0} = 0,84 \quad \text{pour l'anglais}\,.$$

11. Analyse syntagmatique quantitative

Dans ce qui suit, nous allons étudier quelques situations très générales, de nature syntagmatique, situations qui peuvent être rencontrées à tous les niveaux de la langue. Nous allons utiliser des procédés de B. Sigurd [74], L. Gårding [21], E. Vasiliu [79] et, spécialement, de F. Harary et H. H. Paper [29]. C'est ce dernier mémoire qui est à la base des considérations suivantes. Si les paragraphes 6-8 donnent un mode d'analyse syntagmatique qualitative, le présent paragraphe concerne surtout l'analyse syntagmatique quantitative. Mais le graphe Δ, étudié aux paragraphes 6-8, peut être utilisé pour illustrer et appliquer les notions et les considérations quantitatives que nous allons exposer.

Considérons un vocabulaire fini A et un langage L sur A. Nous rappelons que L est une partie du demi-groupe libre T engendré par A. Définissons une relation ρ dans A, de la manière suivante : $a\rho b$ s'il existe deux éléments $x \in T$ et $y \in T$, tels que $xaby \in L$. Il faut rappeler que T contient aussi la phrase nulle, désignée par θ, et telle que $x\theta = \theta x = x$ quel que soit $x \in T$. Posons

$$\Omega = \langle A, \rho \rangle .$$

Il est aisé de voir que le graphe Δ, étudié aux paragraphes 6-8 (voir aussi les tableaux 15 et 16) correspond au cas où A est l'ensemble des phonèmes consonantiques du roumain, tandis que L est l'ensemble des groupes consonantiques initiaux du roumain.

TABLEAU 15

Consonne	Degré	Valence	Ordre de multiplicité	Consonne	Degré	Valence	Ordre de multiplicité
W	0	18	18	$\check{S}$	8	0	8
L	2	11	13	T	3	5	8
R	1	11	12	Z	8	0	8
Y	0	12	12	V	4	2	6
S	9	1	10	B	4	1	5
P	7	2	9	G	4	1	5
N	2	7	9	D	3	1	4
K	7	1	8	H	3	0	3
F	5	3	8	$\check{Z}$	2	0	2
M	5	3	8	$\c{T}$	2	0	2

TABLEAU 16

dental-labial	*ṬW*	*VR*	*ŽN*	*ZY*	*PW*
ZB	*SW*	*PS*	*SN*	vélaire-dental	
SF	*ŠW*	*FT*	*ŠN*	*KL*	*VW*
ŠF	*TW*	*PT*	*DR*	*GL*	dental-vélaire
DW	labial-dental	labial-palatal	*ŠR*	*HL*	
ŽW	*BL*	*BY*	*TR*	*KN*	*SK*
ZW	*FL*	*PY*	*ST*	*GN*	*ZG*
SP	*ML*	*VY*	*ŠT*	*KR*	vélaire-labial
ŠP	*PL*	*FY*	dental-palatal	*GR*	
ŽV	*VL*	*MY*		*HR*	*KF*
LW	*MN*	dental-dental	*DY*	*KT*	*KW*
NW	*PN*		*LY*	labial-labial	*GW*
RW	*BR*	*ZD*	*NY*		*HW*
SM	*FR*	*SL*	*SY*	*BW*	*KV*
ŠM	*MR*	*ŠL*	*ṬY*	*FW*	
ZM	*PR*	*ZL*	*TY*	*MW*	

Pour tout ensemble fini X, nous allons désigner par $n(X)$ le nombre de ses éléments.

Soit $a \in A$. Désignons par $\alpha(a)$ l'ensemble des sommets b de Ω tels que $b\rho a$; par $\beta(a)$ l'ensemble des sommets c tels que $a\rho c$. Remarquons que $n(\alpha(a))$ est égal à la valence du sommet a dans Ω, tandis que $n(\beta(a))$ est justement le degré de a dans Ω. Plus généralement, si $B \subseteq A$, nous désignons par $\alpha(B)$ l'ensemble des sommets $b \notin B$ tels qu'il existe un sommet $a \in B$ pour lequel $b\rho a$ et par $\beta(B)$ l'ensemble des sommets $c \notin B$ tels qu'il existe un sommet $a \in B$ pour lequel $a\rho c$. Le *degré de complétion à gauche* (ou de *α-complétion*) de B sera, par définition, le nombre $g^-(B)$ défini par

$$g^-(B) = \frac{n(\alpha(B))}{n(A)}.$$

De manière analogue, le *degré de complétion à droite* (ou de *β-complétion*) de B sera le nombre $g^+(B)$ défini par

$$g^+(B) = \frac{n(\beta(B))}{n(A)}.$$

Pour illustrer ces notions et celles qui suivront, nous allons utiliser, non seulement le graphe Δ étudié aux paragraphes 6-8, mais aussi, en suivant Harary et Paper [29], les données concernant l'inventaire phonétique du japonais (voir [8] ou le tableau 1 de [29]).

Ces données sont présentées dans le tableau 17.

TABLEAU 17

	a	*o*	*u*	*e*	*i*	#	*n̄*	*č*	*t*	*k*	*c*	*y*	*s*	*š*	*h*	*p*	*x*	*b*	*g*	*r*	*m*	*n*	*η*	*j*	*z*	*d*	*ž*	*w*	?
a	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
o	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
u	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
e	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
i	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
#	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+		+	
n̄	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
č	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+																		
t	+	+		+				+	+		+	+	+																
k	+	+	+	+	+					+		+																	
c			+			+		+	+	+	+																		
y	+	+	+																										
s	+	+	+	+		+		+	+	+	+		+																
š	+	+	+		+	+		+	+	+	+			+															
h	+	+	+	+	+			+	+	+	+	+																	
p	+	+	+	+	+							+				+													
x	+	+	+		+			+	+	+	+																		
b	+	+	+	+	+							+																	
g	+	+	+	+	+							+																	
r	+	+	+	+	+							+																	
m	+	+	+	+	+							+																	
n	+	+	+	+	+							+																	
η	+	+	+	+	+							+																	
j	+	+	+	+																									
z	+	+	+	+																									
d	+	+		+																									
ž	+	+	+		+																								
w	+																												
?						+																							

Le signe + à l'intersection de la ligne d'un phonème μ avec la colonne d'un phonème ν montre que la juxtaposition $\mu\nu$ est possible en japonais, donc on aura $\mu\rho\nu$; ici, A est l'ensemble des phonèmes du japonais, tandis que L est l'ensemble des séquences de phonèmes admises en japonais. Le graphe $\langle A, \rho \rangle$ ainsi défini par le tableau 17 sera désigné par Λ. Quelques exemples relatifs à Λ :

On a

$$\alpha(\check{s}) = \{ a, o, u, e, i, \#, \bar{n}, \check{s} \}, \quad \beta(\check{s}) = \{ a, o, u, i, \#, \check{c}, t, k, c, \check{s} \}, \quad n(A) = 29,$$

$$g^-(\check{s}) = \frac{8}{29}, \qquad g^+(s) = \frac{10}{29}.$$

Quelques exemples relatifs à Δ : on a (voir le tableau 16) :

$$\alpha(F) = \{ S, \check{S}, K \}, \ \beta(F) = \{ L, Y, R, T, W \}, \ n(A) = 20, \ g^-(F) = \frac{3}{20},$$

$$g^+(F) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}; \quad \alpha(L) = \{ B, F, M, P, V, S, \check{S}, Z, K, G, H \},$$

$$\beta(L) = \{ Y, W \}, \quad g^-(L) = \frac{11}{20}, \quad g^+(L) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}.$$

Le *degré de symétrie absolue* de l'ensemble $B \subseteq A$ sera, par définition, le nombre $\mathrm{sym}\,(B) = n(\alpha(B) \cap \beta(B))$. On a, dans Λ, $\mathrm{sym}\,(s) = 6$. On a, dans Δ, $\mathrm{sym}\,(F) = 0$ et $\mathrm{sym}\,(L) = 0$, mais $\mathrm{sym}\,(P) = 1$, car $\alpha(P) = \{ S, \check{S} \}$ et

$$\beta(P) = \{ L, Y, N, R, S, T, W \}.$$

Le *degré de complétion* $g(B)$ de l'ensemble B sera défini par la somme algébrique

$$g(B) = g^+(B) + g^-(B) - \frac{\mathrm{sym}\,(B)}{n(A)}.$$

On a donc, dans Λ,

$$g(\check{s}) = \frac{10}{29} + \frac{8}{29} - \frac{6}{29} = \frac{12}{29},$$

tandis que, dans Δ,

$$g(F) = \frac{3}{20} + \frac{1}{4} - 0 = \frac{2}{5}, \qquad g(L) = \frac{11}{20} + \frac{1}{10} - 0 = \frac{13}{20},$$

$$g(P) = \frac{1}{10} + \frac{7}{20} - \frac{1}{20} = \frac{2}{5}.$$

Posons $\tau(B) = \alpha(B) \cup \beta(B)$. Le *degré de complétion interne à gauche* (*à droite*) de B sera, par définition, le nombre $g_i^-(B)$ (respectivement $g_i^+(B)$), défini par

$$g_i^-(B) = \frac{n(\alpha(B))}{n(\tau(B))} \quad \left(\text{respectivement } g_i^+(B) = \frac{n(\beta(B))}{n(\tau(B))}\right).$$

$g_i^-(B)$ est appelé aussi le *degré de α-complétion* de B tandis que $g_i^+(B)$ est le *degré de β-complétion* de B. On a, dans Λ, $n(\tau(\check{s})) = 12$, donc

$$g_i^-(\check{s}) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}, \qquad g_i^+(\check{s}) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

On a, dans Δ, $n(\tau(F)) = 8$, $n(\tau(L)) = 13$, $n(\tau(P)) = 8$, donc

$$g_i^-(F) = \frac{3}{8}, \quad g_i^-(L) = \frac{11}{13}, \quad g_i^-(P) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \quad g_i^+(F) = \frac{5}{8},$$

$$g_i^+(L) = \frac{2}{13}, \quad g_i^+(P) = \frac{7}{8}.$$

Un ensemble $B \subset A$ sera dit *α-complet* dans Ω si $g^-(B) = 1$ et *β-complet* si $g^+(B) = 1$. Il n'y a, dans Λ, aucun sommet α-complet, mais, comme le montre le tableau 17, chacun des phonèmes a, o, u, e et i est β-complet. En ce qui concerne le graphe Δ, il n'y a aucun sommet α-complet et aucun sommet β-complet. Cela est facile à vérifier, en remarquant qu'un sommet est α-complet si et seulement si sa valence est égale à $n(A)$; un sommet est β-complet si et seulement si son degré est égal à $n(A)$. Mais on a, dans Δ, $n(A) = 20$, tandis que le plus grand degré (celui de S) est égal à 9, et la plus grande valence (celle de W) est égale à 18 (voir le tableau 15). En tout cas, il y a une tendance plus accentuée à la α-complétion qu'à la β-complétion. Un *sommet a* de Ω sera dit *complet* si

$$g^-(a) + g^+(a) = 1.$$

Du fait que $n(\alpha(a)) + n(\beta(a))$ est justement l'ordre de multiplicité du sommet a dans Ω, il s'ensuit que a est complet si et seulement si son ordre de multiplicité est égal à $n(A)$. En ce qui concerne le graphe Δ, le tableau 15 montre que la valeur maximale de l'ordre de multiplicité est 18 (c'est l'ordre de W), tandis que $n(A) = 20$; il s'ensuit qu'il n'y a, dans Δ, aucun sommet complet. Comme on le voit dans Λ — et cela concerne non seulement le japonais, mais toutes les langues naturelles — les voyelles manifestent une tendance plus accentuée à la α-complétion ou β-complétion que les consonnes ; c'est-à-dire que $g^-(x)$ et $g^+(x)$ sont, en général, plus proches de l'unité lorsque x est une voyelle que lorsque x est une consonne.

Nous allons maintenant définir le *degré de complétion* $g(\rho)$ *de la relation* ρ ; c'est le rapport

$$g(\rho) = \frac{n(\rho)}{n^2(A) - 1}$$

où on a désigné par $n(\rho)$ le nombre des paires ordonnées d'éléments de A qui se trouvent dans la relation ρ. La présence de -1 au dénominateur s'explique par le fait que la combinaison $\# \#$ est impossible. En ce qui concerne le graphe Δ, la mesure $g(\rho)$ n'est pas adéquate, car il n'y a dans Δ aucun sommet qui représente l'espace vide ; dans ce cas, le dénominateur sera remplacé par $n^2(A)$.

Une *paire* de sommets $a \in A$, $b \in A$ est *symétrique* dans Ω si l'on a $a\rho b$ et $b\rho a$. La paire des consonnes roumaines P et S est symétrique dans le graphe Δ. Un *sommet a* est dit *symétrique* dans Ω si $\alpha(a) = \beta(a)$; si, en outre,

$$\alpha(a) = \beta(a) = A\ ,$$

a est *complètement symétrique* dans Ω. Ces notions peuvent être généralisées. Un ensemble B de sommets est symétrique dans Ω si $\alpha(B) = \beta(B)$; si, en outre, $\alpha(B) = \beta(B) = A$, B est complètement symétrique dans Ω. Le *deré de gsymétrie* (relative) d'un sommet a par rapport à Ω est, par définition, le nombre

$$\Sigma(a) = \frac{n(\alpha(a) \cap \beta(a))}{n(A)} = \frac{\text{sym } a}{n(A)}\,,$$

tandis que le *degré de symétrie interne* de a par rapport à Ω est, par définition, le nombre

$$\Sigma_i(a) = \frac{n(\alpha(a) \cap \beta(a))}{n(\tau(a))} = \frac{\text{sym } a}{n(\tau(a))}\,;$$

Un sommet a sera dit *antisymétrique par rapport à b*, dans Ω, si l'on a une et une seule des relations $a\rho b$ et $b\rho a$. Si, pour tout $b \in \alpha(a) \cup \beta(a)$, a est antisymétrique par rapport à b, on dit que a est antisymétrique dans Ω. Les phonèmes consonantiques roumains Z, R, L et $\check{S}$ sont antisymétriques dans Δ (voir le tableau 16). En fait, les seuls phonèmes consonantiques roumains qui ne sont pas antisymétriques dans Δ sont P et S. D'autre part, P et S ne sont pas symétriques dans Δ, car on a $P\rho L$ et $S\rho M$, sans avoir $L\rho P$ et $M\rho S$. En tenant compte du fait que Δ contient 20 sommets, $\alpha(P) = 2$, $\beta(P) = 7$, $\tau(P) = 8$, $\alpha(S) = 1$, $\beta(S) = 9$ et $\tau(S) = 9$, on a

$$\Sigma(P) = \frac{1}{20}\,,\quad \Sigma_i(P) = \frac{1}{8}\,,\quad \Sigma(S) = \frac{1}{20} \quad \text{et} \quad \Sigma_i(S) = \frac{1}{9}\,.$$

Pour tout phonème consonantique a du roumain, autre que P ou S, on a $\Sigma(a) = \Sigma_i(a) = 0$, car $\alpha(a) \cap \beta(a)$ est vide. Pour pouvoir faire une distinction entre les divers sommets dont le degré de symétrie est égal à 0, il faut introduire une mesure de l'antisymétrie d'un sommet a, mesure qui sera définie par

$$\Sigma'(a) = \frac{n(\alpha(a) \triangle \beta(a))}{n(A)}$$

où par $\triangle$ on a désigné (voir aussi le chapitre V) la différence symétrique.

$\Sigma'(a)$ est appelé le *degré d'antisymétrie* de a. On définit aussi le *degré d'antisymétrie interne* de a, par

$$\Sigma'_i(a) = \frac{n(\alpha(a) \triangle \beta(a))}{n(\tau(a))}.$$

On a, dans Δ,

$$\Sigma'(F) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}, \quad \Sigma'_i(F) = \frac{8}{8} = 1, \quad \Sigma'(L) = \frac{13}{20}, \quad \Sigma'_i(L) = \frac{13}{13} = 1,$$

$$\Sigma'(P) = \frac{7}{20}, \quad \Sigma'_i(P) = \frac{7}{8}.$$

Il s'ensuit que F et L possèdent un degré maximal d'antisymétrie interne.

En ce qui concerne le graphe Λ, les valeurs des paramètres définis jusqu'ici, pour les voyelles i, e a, o et u, sont données dans les tableaux 18 et 19 (voir les tableaux complets dans [29]).

On peut définir le *degré de symétrie* $\Sigma(\Omega)$ et le *degré d'antisymétrie* $\Sigma'(\Omega)$ *du graphe* Ω :

$$\Sigma'(\Omega) = \frac{1}{2} \frac{\sum_{x \in A} n(\alpha(x) \triangle \beta(x))}{n(\rho)}, \qquad \Sigma(\Omega) = 1 - \Sigma'(\Omega).$$

La raison de ces définitions est facile à expliquer ; $\Sigma'(\Omega)$ est le rapport entre le nombre des paires antisymétriques de sommets de Ω et le nombre de tous les arcs de Ω, tandis que $\Sigma(\Omega)$ est le rapport entre le nombre des paires symétriques de sommets de Ω et le nombre de tous les arcs de Ω. En ce qui concerne le graphe Δ, on a $\Sigma(\Delta) = \frac{2}{79}$ et $\Sigma'(\Delta) = \frac{77}{79}$; en effet, parmi les 79 arcs de Δ seulement deux sont symétriques : PS et SP.

Un sommet x de Ω sera dit *réflexif* si l'on a $x\rho x$, c'est-à-dire si $x \in \tau(x)$; dans le cas contraire, x est *irréflexif*. Dans le graphe Δ, tout sommet est irréflexif, tandis que dans Λ les sommets a, o, u, e, i, $\check{c}$, t, k, c, $\check{s}$, s et p sont réflexifs et les autres sommets sont irréflexifs.

En posant $\gamma(x) = 1$ si le sommet x est réflexif et $\gamma(x) = 0$ si x est irréflexif, on peut définir le *degré de réflexivité* de Ω, par l'expression

$$\gamma(\Omega) = \frac{\sum_{x \in A} \gamma(x)}{n(A)} \qquad \text{ou bien par} \qquad \gamma(\Omega) = \frac{\sum_{x \in A} \gamma(x)}{n(A) - 1}.$$

La deuxième expression est utilisée lorsqu'il existe un sommet qui, par sa signification même, ne peut être réflexif. C'est le cas du sommet $\#$ de Λ ; le degré de réflexivité de Λ sera donc calculé au moyen de la deuxième formule ci-dessus. On définit aussi le *degré d'irréflexivité* de Ω, par $\gamma'(\Omega) = 1 - \gamma(\Omega)$.

TABLEAU 18

x	$n(\alpha(x))$	$g^-(x)$	$n(\beta(x))$	$g^+(x)$	$n(\tau(x))$	$g(x)$	$n(\alpha(x) \cap \beta(x))$	$\Sigma(x)$	$n(\alpha(x) \bigtriangleup \beta(x))$	$\Sigma'(x)$
i	21	0,72	29	1,00	29	1,00	21	0,72	8	0,28
e	22	0,76	29	1,00	29	1,00	22	0,76	7	0,24
a	27	0,93	29	1,00	29	1,00	27	0,93	2	0,07
o	26	0,90	29	1,00	29	1,00	26	0,90	3	0,10
u	25	0,86	29	1,00	29	1,00	25	0,86	4	0,14

TABLEAU 19

x	$n(\tau(x))$	$n(\alpha(x))$	$g_i^-(x) = \dfrac{n(\alpha(x))}{n(\tau(x))}$	$n(\beta(x))$	$g_i^+(x) = \dfrac{n(\beta(x))}{n(\tau(x))}$	$n(\alpha(x) \cap \beta(x))$	$\Sigma_i(x)$	$n(\alpha(x) \bigtriangleup \beta(x))$	$\Sigma_i'(x)$
i ..	29	21	0,72	29	1,00	21	0,72	8	0,28
e ..	29	22	0,76	29	1,00	22	0,76	7	0,24
a ..	29	27	0,93	29	1,00	27	0,93	2	0,07
o ..	29	26	0,90	29	1,00	26	0,90	3	0,10
u ..	29	25	0,86	29	1,00	25	0,86	4	0,14

Il est aisé de voir que $\gamma(\Omega)$ est le rapport entre le nombre des sommets réflexifs et le nombre total des sommets de Ω, tandis que $\gamma'(\Omega)$ est le rapport entre le nombre des sommets irréflexifs et le nombre total des sommets de Ω. Par exemple, on a

$$\gamma(\Delta) = \frac{2}{79}, \qquad \gamma'(\Delta) = \frac{77}{79}, \qquad \gamma(\Lambda) = \frac{12}{29-1} = \frac{3}{7}, \qquad \gamma'(\Lambda) = \frac{4}{7}.$$

Le *degré de transitivité* $\nu(x, y)$ *d'un sommet* x *par rapport à un sommet* y de Ω est, par définition, le rapport

$$\nu(x, y) = \frac{n(\beta(x) \cap \beta(y))}{n(\beta(y))}.$$

Définissons aussi les grandeurs

$$\nu(-x) = \frac{\sum\limits_{y \in \alpha(x)} \nu(y, x)}{n(\alpha(x))}, \qquad \nu(x-) = \frac{\sum\limits_{y \in \beta(x)} \nu(x, y)}{n(\beta(x))}.$$

On peut maintenant obtenir une mesure de la transitivité locale du sommet x, en définissant le *degré de transitivité* $\nu(x)$ de x, par la formule

$$\nu(x) = \frac{\nu(-x) + \nu(x-)}{2}.$$

En ce qui concerne le graphe Λ, on a

$$\nu(a, \theta) = \nu(o, \theta) = \nu(u, \theta) = \nu(e, \theta) = \nu(i, \theta) = 1 \text{ quel que soit le sommet } \theta,$$

$$\nu(t, a) = \nu(t, o) = \nu(t, e) = 0{,}28,\ \nu(p, i) = 0{,}24,\ \nu(j, e) = 0{,}17,\ \nu(r, y) = 1,$$

$$\nu(\bar{n}, a) = \nu(\bar{n}, o) = \nu(\bar{n}, u) = \nu(\bar{n}, e) = \nu(\bar{n}, i) = 0{,}93,\ \nu(\bar{n}, \#) = 0{,}96,$$

$$\nu(\bar{n}, \theta) = 1 \text{ pour tout autre sommet } \theta \neq n, ?$$

$$\nu(a-) = \nu(o-) = \nu(u-) = \nu(e-) = \nu(i-) = 1,\ \nu(\bar{n}-) = 0{,}99,$$

$$\nu(-h) = \nu(-p) = \nu(-x) = \nu(-b) = \nu(-g) = \nu(-r) = \nu(-m) = \\ = \nu(-n) = 1,$$

$$\nu(i) = 0{,}48,\ \nu(-e) = 0{,}47,\ \nu(-u) = 0{,}44,\ \nu(-o) = 0{,}43,\ \nu(-a) = 0{,}41,$$

$$\nu(\bar{n}) = 0{,}99,\ \nu(e) = \nu(i) = 0{,}74,\ \nu(o) = \nu(u) = \nu(x) = 0{,}72, \\ \nu(a) = \nu(t) = 0{,}71.$$

Enfin, on peut définir *le degré de transitivité du graphe* Ω, par la formule

$$\nu(\Omega) = \frac{\sum\limits_{x\rho y} \nu(x, y)}{n(\rho)}.$$

Nous allons établir maintenant quelques propositions [29].

PROPOSITION 1. *Quel que soit le sommet x de Ω, on a*

$$g(x) = g^{-}(x) + g^{+}(x) - \Sigma(x) .$$

Démonstration. Etant donnés deux ensembles X et Y, on a

$$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y) .$$

En prenant $X = \alpha(x)$ et $Y = \beta(x)$ et en divisant par $n(A)$, on obtient la proposition 1.

PROPOSITION 2. *Quel que soit le sommet x de Ω, on a $\Sigma(x) + \Sigma'(x) = g(x)$.*

Démonstration. Etant donnés deux ensembles X et Y, on a

$$n(X \cup Y) = n(X \cap Y) + n(X \triangle Y) .$$

En remplaçant ici X par $\alpha(x)$ et Y par $\beta(x)$ et en divisant par $n(A)$, on obtient la proposition 2.

PROPOSITION 3. *Quel que soit le sommet x de Ω, on a*

$$\Sigma'(x) = g^{-}(x) + g^{+}(x) - 2\ \Sigma(x) .$$

Démonstration. En vertu de la proposition 2, on a $\Sigma'(x) = g(x) - \Sigma(x)$. En remplaçant ici $g(x)$ par son expression déduite de la proposition 1, on obtient la proposition 3.

Les propositions 1,2 et 3 restent vraies lorsque g^{-} est remplacé par g_i^{-}, g^{+} par g_i^{+}, g par g_i, Σ par Σ_i et Σ' par Σ_i', c'est-à-dire lorsqu'on envisage les paramètres « internes ».

PROPOSITION 4. *Quel que soit le sommet x de Ω, on a*

$$g^{-}(x) = g_i^{-}(x)\, g(x) , \quad g^{+}(x) = g_i^{+}(x)\, g(x) , \quad \Sigma(x) = \Sigma_i(x)\, g(x) \text{ et } \Sigma'(x) = \Sigma_i'(x)\, g(x) .$$

Démonstration. Il suffit d'établir la première égalité, car les autres peuvent être démontrées par une méthode analogue. On a, par définition,

$$g^{-}(x) = \frac{n(\alpha(x))}{n(A)} \qquad \text{et} \qquad g_i^{-}(x) = \frac{n(\alpha(x))}{n(\tau(x))} ,$$

donc

$$\frac{g^{-}(x)}{g_i^{-}(x)} = \frac{n(\tau(x))}{n(A)} .$$

Mais le dernier rapport est justement $g(x)$ et la proposition 4 est ainsi démontrée.

En tenant compte du fait que $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$, la proposition 4 entraîne le

COROLLAIRE 1. *Quel que soit le sommet x de Ω, on a*

$$g^{-}(x) \leqslant g_i^{-}(x), \quad g^{+}(x) \leqslant g_i^{+}(x), \quad \Sigma(x) \leqslant \Sigma_i(x) \quad \text{et} \quad \Sigma'(x) \leqslant \Sigma_i'(x).$$

On a aussi le

COROLLAIRE 2. *Si $g(x) = 1$, alors*

$$g^{-}(x) = g_i^{-}(x), \quad g^{+}(x) = g_i^{+}(x), \quad \Sigma(x) = \Sigma_i(x) \quad \text{et} \quad \Sigma'(x) = \Sigma_i'(x).$$

COROLLAIRE 3. *Si $g^{-}(x) = g^{+}(x) = 1$, $\Sigma(x) = 1$.*

Un sommet x de Ω, tel que $\Sigma(x) = 1$, est dit complètement symétrique. Si $\Sigma_i(x) = 1$, x est dit symétrique. Si $\Sigma'(x) = 1$, x est dit antisymétrique.

Remarque. $\Sigma(x) = 1$ entraîne $\Sigma'(x) = 0$, tandis que $\Sigma'(x) = 1$ entraîne $\Sigma(x) = 0$.

Un sommet x de Ω est dit *localement transitif* par rapport à un autre sommet y de Ω si l'on a $x\rho y$ et $\beta(y) \subseteq \beta(x)$. Il est aisé de voir que x est localement transitif par rapport à y si et seulement si $v(x, y) = 1$.

PROPOSITION 5. *Dans le graphe $\Omega = \langle A, \rho \rangle$, la relation ρ est transitive si et seulement si pour tout arc (x, y) de Ω le sommet x est localement transitif par rapport à y.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des définitions.

D'autres applications de la théorie des graphes à l'analyse syntagmatique quantitative sont suggérées par les travaux de Fischer-Jorgensen [18], S. M. Lamb [40], Robert Lees [42] et J. Greenberg [27].

12. Dépendance et subordination

La description des relations syntaxiques de dépendance et de subordination est le domaine de la linguistique où la théorie des graphes a trouvé les plus belles applications. L. Tesnière fut l'un des premiers à utiliser les graphes en syntaxe [77]. Ses idées ont été reprises, développées et précisées par Y. Lecerf et P. Ihm [41], L. Hirschberg [34], I. Lynch [44], en particulier pour l'étude de la projectivité syntaxique et des arborescences linguistiques. D'autre part, la dépendance et la subordination ont été étudiées par D. G. Hays [32], [33], O. S. Kulagina [39], S. I. Fitialov [19], M. I. Beleckiĭ, V. M. Grigorjan, I. D. Zaslavskii [3], L. N. Iordanskaja [36], A. V. Gladkiĭ [24], [25], Ju. A. Šreider [76] ; le lien entre l'analyse des dépendances et celle des constituants a été étudié par G. Gaifman [20] et E. V. Padučeva [60]. Des exposés de synthèse et de nouveaux développements peuvent être trouvés chez Y. Bar-Hillel ([2], chapitre XIV), N. Chomsky [11] et S. Marcus [49], [50], [52].

Etant donnée une phrase $x_1 x_2 \dots x_i x_{i+1} \dots x_n$ du langage Φ, la dépendance de x_i par rapport à x_{i+1} est caractérisée, d'une façon formelle, par le fait que la phrase $x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n$ appartient à Φ, tandis que la phrase $x_i \dots x_{i-1} x_i x_{i+2} \dots x_n$ ne lui appartient pas. C'est le procédé utilisé habituellement en linguistique descriptive, pour vérifier une dépendance. Par exemple, dans la phrase française *j'ai une fleur blanche*, le mot *blanche* dépend du mot *fleur*, car la phrase *j'ai une fleur* appartient au français, tandis que *j'ai une blanche* ne lui appartient pas. Mais il y a des situations où ce procédé traditionnel n'est pas applicable. Par exemple, dans la phrase *j'ai une fleur très blanche*, intuitivement nous acceptons que *blanche* dépende de *fleur*, mais la phrase *j'ai une fleur très* n'est pas correcte. Cet exemple suggère que la dépendance de *très* par rapport à *blanche* est d'un autre niveau que celle de *blanche* par rapport à *fleur*.

Kulagina [39] et Gladkiĭ [24] ont donné une description précise de cette distinction, à l'aide de la notion de configuration d'ordre n ($n = 1, 2, \dots, n$). Nous allons présenter ici une autre méthode, due, pour l'essentiel, à L. Nebesky [56].

Considérons un vocabulaire V et une phrase $x = a_1 a_2 \dots a_n$ sur V. Une phrase $y = b_1 b_2 \dots b_p$ sur V est dite une *sous-phrase* de x si $p \leqslant n$ et s'il existe une suite d'entiers $0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_p$, tels que $b_1 = a_{i_1}$, $b_2 = a_{i_2}, \dots$, $b_p = a_{i_p}$. Par exemple, les phrases *j'ai une blanche* et *une fleur très* sont des sous-phrases de *j'ai une fleur très blanche*.

Considérons un ensemble $\mathscr{S}$, dont les éléments sont appelés *significations*, et un langage Φ sur V. Soit $\prec$ une relation réflexive et transitive dans $\mathscr{S}$ et soit f une application de Φ dans $\mathscr{S}$. Si $x \in \Phi$, $f(x)$ est la *signification de* x (signification que nous considérons comme uniquement déterminée — il n'y a donc pas d'homonymie). Si $y \in \Phi$, la relation $f(y) \prec f(x)$ veut dire, du point de vue intuitif, que la signification de y est plus simple que celle de x, c'est-à-dire que la signification de x peut être obtenue à l'aide de celle de y. Par exemple, si $x =$ *une fleur très blanche*, $y =$ *une fleur blanche*, $z =$ *une fleur*, on a

$$f(z) \prec f(y) \prec f(x),$$

car la signification de *fleur blanche* est plus simple que celle de *fleur très blanche*, tandis que la signification de *fleur* est plus simple que celle de *fleur blanche*.

Etant données deux phrases x et y de Φ, nous dirons que y est une *sous-phrase propre* de x si y est une sous-phrase de x et si $f(y) \prec f(x)$. Dans l'exemple ci-dessus, y est une sous-phrase propre de x, tandis que z est une sous-phrase propre de y. Un autre exemple : si $x =$ *le livre de mon ami est maintenant chez moi*, la phrase $y =$ *le livre est chez moi* est une sous-phrase propre de x, tandis que la phrase $z =$ *mon ami est chez moi*, n'est pas une sous-phrase propre de x, bien qu'elle soit une sous-phrase de x.

La proposition suivante est évidente.

PROPOSITION 6. *Si z est une sous-phrase propre de y et si y est une sous-phrase propre de x, z est une sous-phrase propre de x.*

Nous pouvons maintenant définir la *relation de subordination*. Soient a et b

deux termes de la même phrase $x \in \Phi$. Nous dirons que b est *subordonné* à a dans x si pour toute sous-phrase propre y de x, contenant le terme b, le mot a est aussi un terme de y. Par exemple, si x = *j'ai une fleur très blanche*, on a les sous-phrases propres suivantes : y = *j'ai une fleur blanche*, z = *j'ai une fleur*, u = *une fleur très blanche*, v = *une fleur blanche*, w = *une fleur*, s = *fleur très blanche*, t = *fleur blanche*, p = *j'ai*, q = *fleur*. On constate que chaque sous-phrase propre contenant le mot *blanche* contient aussi le mot *fleur*, donc *blanche* est subordonné à *fleur* ; chaque sous-phrase propre contenant le mot *très* contient aussi les mots *blanche* et *fleur*, donc *très* est subordonné à *blanche* et à *fleur* ; chaque sous-phrase propre contenant le mot *une* contient aussi le mot *fleur*, donc *une* est subordonné à *fleur*.

Considérons de nouveau deux termes a et b de la même phrase $x \in \Phi$. Nous dirons que b est *dépendant de* a dans x si b est subordonné à a dans x et s'il n'existe aucun terme c de x, autre que a et b, tel que b soit subordonné à c et c soit subordonné à a dans x. (Il faut préciser que deux termes sont considérés comme différents chaque fois que leurs rangs dans x sont différents. Par exemple, dans la phrase $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5$ = *un élève cherche un élève*, on a $a_1 \neq a_4$ et $a_2 \neq a_5$. C'est-à-dire que $a_i \neq a_j$ est équivalent à $i \neq j$.) Par exemple, dans l'exemple ci-dessus *blanche* est dépendant de *fleur*, *très* est dépendant de *blanche*, *une* est dépendant de *fleur*, mais *très*, quoique subordonné à *fleur*, n'est pas dépendant de *fleur*. Voici un autre exemple, tiré du russe [56]. Dans la phrase x = уровен некоторых притоков этой ъольщой реки понизился до нормального, la sous-phrase уровен некоторых притоков понизился est propre, tandis que la sous-phrase уровен ъольщой реки понизился ne l'est pas. En désignant par $a \twoheadrightarrow b$ le fait que b est dépendant de a, on a les dépendances suivantes dans x : этой $\twoheadleftarrow$ реки $\twoheadleftarrow$ притоков $\twoheadleftarrow$ уровен $\twoheadleftarrow$ понизился $\twoheadrightarrow$ до нормапного, реки $\twoheadrightarrow$ ъольщой, притоков $\twoheadrightarrow$ некоторых.

Il est aisé de voir qu'on a la

PROPOSITION 7. *Si a et b sont deux termes de la même phrase $x \in \Phi$, b est subordonné à a si et seulement s'il existe une suite finie $a_1, a_2, \ldots, a_m$ de termes de x, telle que $b = a_1$, $a = a_m$ et a_i est dépendant de a_{i+1} pour* $1 \leqslant i < m$.

Cela montre que d'étudier la dépendance et la subordination revient à étudier un graphe dont les sommets sont les termes de la phrase envisagée, tandis que les arcs sont les paires ordonnées de termes dépendants. La subordination d'un terme b à un terme a correspond à un chemin allant de a à b.

La description des relations de dépendance et de subordination que nous venons de faire, description inspirée par le travail de Nebesky [56], suppose une idée assez étrange de la correction grammaticale. En effet, une expression telle que *très blanche* n'est pas, de ce point de vue, une phrase correcte, car un déterminatif suppose toujours la présence d'un terme régissant. L'idée développée par Kulagina [39] et par Gladkiĭ [24] nous semble moins intuitive, mais plus profonde et plus satisfaisante.

La plupart des chercheurs adoptent certaines hypothèses fondamentales concernant la structure syntaxique ; ils supposent les relations de dépendance et de subordination comme données et il reste à étudier les structures possibles d'une phrase, par rapport à ces relations données. Certaines hypothèses fondamentales sont adoptées par la plupart des chercheurs, en ce qui concerne la structure syntaxique.

L'hypothèse de la structure arborescente. Le graphe des dépendances associé à une phrase est une arborescence, au sens de la théorie des graphes. Pour comprendre la notion d'arborescence il faut d'abord définir deux notions préliminaires. Un *arbre* est un graphe connexe, ayant au moins deux sommets, et sans cycles. On appelle *centre d'un graphe* un sommet a tel que tout autre sommet du graphe puisse être atteint par un chemin issu de a. Il n'y a pas toujours un centre ([7], pp. 131 et 135). On appelle *arborescence* un arbre muni d'un centre. Il faut remarquer que seule la notion d'arborescence correspond à la notion intuitive d'arbre. Par exemple, le graphe de la figure 8 est un arbre d'après la définition ci-dessus, quoiqu'il ne le soit pas du point de vue intuitif.

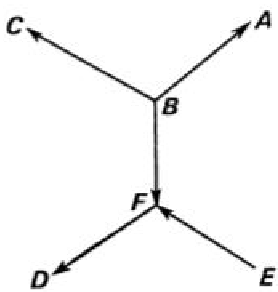


FIG. 8.

L'hypothèse de Tesnière. Chaque terme d'une phrase admet un régissant au plus. Il est facile de voir que cette propriété est une conséquence de l'hypothèse de la structure arborescente ; mais la réciproque n'est pas vraie.

L'hypothèse de projectivité. C'est une hypothèse qui introduit une contrainte très sévère, qui relie l'ordre linéaire des termes d'une phrase à l'ordre structural de la phrase, c'est-à-dire à la relation de subordination. La forme la plus fréquente de cette hypothèse est la suivante : si, dans la phrase $x = a_1\, a_2 \dots a_i \dots a_n$ le terme a_i est subordonné au terme a_j, alors pour tout entier k tel que

$$\min(i, j) < k < \max(i, j) \,,$$

le terme a_k est aussi subordonné à a_j.

Il n'est pas difficile de trouver des exemples qui infirment l'une ou l'autre des hypothèses ci-dessus. Mais, pour construire un modèle en première approximation on doit toujours adopter ces hypothèses. L'hypothèse de la structure arborescente est suggérée par la structure de la proposition ; le graphe des dépendances associé à une proposition de longueur $\geqslant 2$ est une arborescence dont le centre est justement l'élément prédicatif de la proposition. En ce qui concerne l'hypothèse de projectivité, elle empêche des croisements entre les flèches désignant les dépendances. L'hypothèse de projectivité concerne toutes sortes de phrases. Mais elle devient intuitive du point de vue géométrique lorsque la phrase envisagée admet une structure arborescente [41]. Il faut aussi remarquer que la plupart des exemples qui infirment l'une ou l'autre des hypothèses ci-dessus ont des valeurs stylistiques [51].

L'hypothèse de Yngve [82]. C'est une hypothèse qui concerne une contrainte d'ordre psychologique concernant la capacité de la mémoire (de l'homme ou de la machine) : la profondeur d'une *structure régressive de dépendances* (c'est-à-dire d'une structure de dépendances où le terme régi est toujours à gauche par rapport au terme régissant) ne peut pas dépasser un certain nombre entier (égal à 7 en ce qui concerne l'anglais et, peut-être, les autres langues aussi). D'une façon plus précise, cette hypothèse revient à dire que, dans le graphe de dépendances associé à une phrase, tout chemin dont chaque sommet est, dans la phrase, à gauche du sommet précédent, ne peut pas dépasser, en longueur, le nombre 7 (pour les langues autres que l'anglais il peut arriver que 7 soit remplacé par un nombre compris entre $7 - 2$ et $7 + 2$). Yngve donne l'exemple d'une structure purement régressive du type *adverbe secondaire-adverbe-adjectif-substantif-verbe* (*very clearly projected pictures appeared*), dont la profondeur est égale à 4. Ici, la structure de proposition est mise en défaut, dès qu'on s'arrête à un terme autre que le dernier. Une telle structure ne peut avoir, évidemment, une longueur trop grande. Au contraire, une *structure progressive* (c'est-à-dire où les dépendances sont dirigées de gauche à droite) peut avoir une longueur aussi grande que l'on veut.

Pour d'autres aspects de la notion de dépendance voir [40], [58], [62], [63] et [73].

13. Grammaires, systèmes formels, multigraphes, théorie des catégories

Soit Φ un langage sur le vocabulaire V. Une grammaire G de Φ est, par définition, un ensemble fini de règles finies qui énumèrent toutes les phrases du langage Φ et seulement ces phrases. On exige de G qu'elle donne aussi une description de la structure des phrases énumérées. Afin de simplifier la formulation des règles de G, nous pourrons faire intervenir d'autres éléments que ceux de V ; désignons par V_A (*vocabulaire auxiliaire*) l'ensemble (toujours fini) de ces éléments et posons $V' = V \cup V_A$. Dans ces conditions, on peut toujours donner aux règles de G la forme $\varphi_i \to \psi_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ où φ_i et ψ_i sont des phrases sur V', tandis que la flèche $\to$ est interprétée : « est réécrit ». Une phrase g est *directement dérivée* de la phrase f s'il existe deux phrases u et v sur V' et un nombre entier i, $1 \leqslant i \leqslant n$, telles que $f = u\varphi_i v$, $g = u\psi_i v$. On écrit, dans ce cas $f \to g$. Nous dirons qu'une phrase ψ *dérive d'une phrase* φ et nous écrirons $\varphi \Rightarrow \psi$, s'il existe une suite finie $f_1, \ldots, f_i, \ldots, f_n$ de phrases sur V', telle que $f_1 = \varphi$, $f_n = \psi$ et, pour $1 < i \leqslant n$, on ait $f_{i-1} \to f_i$. La suite $f_1, \ldots, f_n$ est, par définition, une *φ-dérivation* de ψ ([11], [14], [28]).

Une phrase ψ sur V' est dite *terminale* si elle ne comporte pas de symboles de V_A. Choisissons un symbole P de V_A ; P est l'*axiome de la grammaire*. Le langage Φ est dit *énuméré* ou *engendré par la grammaire* G s'il coïncide avec l'ensemble des phrases terminales qu'on peut dériver de $P \in V_A$ au moyen des règles de G.

On constate ainsi que chaque grammaire définit une fonction qui associe au symbole $P \in V_A$ une certaine partie du semi-groupe libre engendré par V. La notion de grammaire est étroitement analogue à la notion de *système formel* étudiée en logique mathématique. P correspond à l'*axiome du système*, les règles de G correspondent aux *règles de déduction* du système formel, tandis que les phrases terminales dérivées de P correspondent aux *théorèmes* d'un système formel et les diverses dérivations d'une phrase correspondent aux diverses *démonstrations* d'un théorème. Pour les systèmes formels voir B. Vauquois [80].

Considérons deux ensembles disjoints A et B et une application f de B dans $A \times A$. Le système $M = \langle A, B, f \rangle$ est, par définition, un *multigraphe*. Les éléments de A sont les *sommets* de M. Si, pour $b \in B$, on a $f(b) = (x, y)$, on dit que b est un *arc* allant de x à y ; x est l'*origine* de b, tandis que y est l'*extrémité* de b. Mais il peut exister plusieurs éléments $b_1, b_2, \ldots$ tels que

$$f(b_1) = f(b_2) = \cdots = (x, y),$$

donc il peut exister plusieurs arcs allant de x à y. C'est justement cette propriété qui distingue un multigraphe d'un graphe ; en effet, on sait que dans un graphe il n'existe qu'un arc au plus allant d'un sommet à un autre.

Passons maintenant à la notion de catégorie, introduite en 1945, par S. Eilenberg et S. Mac Lane [15]. Nous allons exposer cette notion dans la version présentée par J. Riguet [69]. Une *catégorie* est un multigraphe sur lequel on a défini une multiplication pour les flèches b et c telles que l'extrémité de b coïncide avec l'origine de c, le produit des flèches b et c étant désigné par cb et cette multiplication étant associative dans le sens suivant : si on considère trois flèches b, c et d disposées comme le montre la figure 9, le produit $d(cb)$ est égal au produit $(dc)\,b$. De plus, pour toute flèche b on supposera qu'il existe

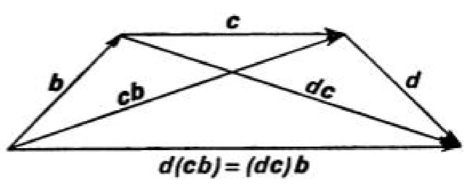


FIG. 9.

toujours une flèche singulière b' dont l'origine et l'extrémité sont égales à l'origine de b et une flèche singulière b'' dont l'origine et l'extrémité sont identiques à l'extrémité de b, et qui sont des éléments neutres à gauche, respectivement à droite, pour b, autrement dit, qui sont telles que $b''b = bb' = b$ (voir la figure 10).

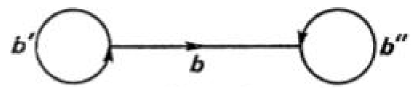


FIG. 10.

Nous allons maintenant définir, en suivant toujours [69], la *catégorie des applications des parties d'un ensemble X dans les parties de ce même ensemble X.* Si X_1 et X_2 sont deux parties de X et si h est une application de X_1 dans X_2, on considère h comme une flèche joignant le sommet X_1 au sommet X_2. On obtient ainsi un multigraphe $M = \langle A, B, f \rangle$. L'ensemble A des sommets est ici l'ensemble des parties de X, un élément quelconque de B étant une application d'une partie X_1 de X dans une partie X_2 de X. Il s'ensuit que pour chaque paire de sommets X_1, X_2 de ce multigraphe, le nombre des arcs allant de X_1 à X_2 est égal au nombre des applications de X_1 dans X_2. Soient maintenant trois parties X_1, X_2, X_3 de X, une application g_1 de X_1 dans X_2 et une application g_2 de X_2 dans X_3. On définit la flèche $g_2 g_1$ allant de X_1 à X_3 comme l'application composée des applications g_1 et g_2, c'est-à-dire comme l'application $g_2 g_1$ qui associe à un élément $x \in X_1$ l'élément $g_2(g_1(x))$ de X_3. Il est aisé de voir que la condition d'associativité est remplie. Considérant une nouvelle application g_3, de X_3 dans X_4, on a $g_3(g_2 g_1) = (g_3 g_2) g_1$. D'autre part, il existe pour une application g de X_1 dans X_2, un élément neutre à gauche — l'application identique de X_1 — et un élément neutre à droite, l'application identique de X_2. Il est donc démontré que l'ensemble des applications des parties de X dans les parties de X constitue bien une catégorie. Nous désignons cette catégorie par $\mathscr{C}(X)$.

Nous arrivons maintenant au cas particulier qui nous intéresse.

Considérons comme ensemble X, dans l'exemple ci-dessus, l'ensemble des parties du semi-groupe libre $\mathscr{S}(V')$ engendré par le vocabulaire V', utilisé dans la définition de la notion de grammaire. Chaque grammaire G sur $V' = V \cup V_A$ associe à $P \in V_A$ une certaine partie $\Phi \subseteq \mathscr{S}(V')$. Désignons par $\mathscr{L}$ l'ensemble des langages Φ sur V tels qu'il existe une grammaire sur V' engendrant Φ. Il faut remarquer que $\mathscr{L}$ est un ensemble dénombrable de parties de $\mathscr{S}(V')$, tandis que l'ensemble de toutes les parties de $\mathscr{S}(V')$ n'est pas dénombrable. Chaque grammaire associe à P un certain élément de $\mathscr{L}$, mais il peut arriver qu'à deux grammaires différentes corresponde un même élément de $\mathscr{L}$. Dans ce cas, les deux grammaires considérées sont dites équivalentes et elles sont considérées comme indiscernables. Il s'ensuit que l'ensemble des grammaires sur $V' = V \cup V_A$ est une partie de la catégorie $\mathscr{C}(\mathscr{P}(\mathscr{S}(V')))$, où par $\mathscr{P}(\mathscr{S}(V'))$

on a désigné l'ensemble des parties de $\mathcal{S}(V')$. Cette partie de $\mathcal{C}(\mathcal{P}(\mathcal{S}(V')))$ est formée exactement par les applications de la partie $\{\{P\}\}$ (constitué par l'ensemble formé du seul ensemble $\{P\}$) dans la partie $\mathcal{L}$ de $\mathcal{P}(\mathcal{S}(V'))$.

Un autre exemple de catégorie, non dépourvu de signification linguistique, s'obtient, de même que le précédent, comme un cas particulier de $\mathcal{C}(X)$: le cas où X est le semi-groupe libre engendré par un certain vocabulaire V. Un élément quelconque de la catégorie ainsi obtenue est une application d'un certain langage L_1 dans un certain langage L_2 (L_1 et L_2 étant des parties de $\mathcal{S}(V)$). Une traduction de L_1 dans L_2 est donc un élément de la catégorie envisagée. Dans cet ordre d'idées peuvent être utiles les idées développées par I. I. Revzin et V. Ju. Rozencveig [65].

La catégorie $\mathcal{C}(\mathcal{S}(V))$ est appelée par J. Riguet la catégorie des problèmes sur V. En effet, résoudre un problème général (c'est-à-dire trouver une méthode de résolution d'une classe de problèmes particuliers, du même type), c'est trouver une application d'un sous-ensemble X_1 de $\mathcal{S}(V)$ dans un sous-ensemble X_2 de $\mathcal{S}(V)$. Ici, X_1 est formé par les diverses données possibles du problème, tandis que X_2 est formé par les diverses solutions possibles. Une méthode de résolution du problème général consiste bien à associer au problème particulier spécifié par une donnée (c'est-à-dire par un élément de X_1), la solution particulière (c'est-à-dire l'élément particulier de X_2) qui lui correspond. Pour illustrer ceci par un exemple, J. Riguet considère [69] le vocabulaire V constitué par les quatre symboles : $|$, $*$, a, b. Le problème de la multiplication des bâtons consiste bien à trouver une application g de X_1 dans X_2, X_1 étant le sous-ensemble de $\mathcal{S}(V)$ constitué par les phrases de la forme $|p * | q$ (c'est-à-dire des phrases constituées par p bâtons suivis de $*$, suivis de q bâtons) et X_2 étant le sous-ensemble de $\mathcal{S}(V)$ constitué par les phrases composées uniquement de bâtons ; l'application g associe à la phrase $|p * | q$ la phrase $g(|p * | q) = |pq$.

La résolution d'un problème à l'aide d'une machine peut se formuler à l'aide des catégories, de la manière suivante [69] : avoir à sa disposition une machine travaillant avec le vocabulaire V c'est avoir à sa disposition une collection de problèmes, autrement dit une collection de flèches $g_1, \ldots, g_n$ de la catégorie des problèmes. Résoudre un problème g à l'aide de la machine revient à trouver un chemin — c'est-à-dire une suite de flèches consécutives dans la catégorie — uniquement constitué à partir de $g_1, \ldots, g_n$ et tel que le produit, dans la catégorie, de toutes les flèches du chemin, est identique à g. Des indications plus détaillées pour trouver un tel chemin sont données dans [69].

Pour la théorie des graphes voir aussi [72]. Pour d'autres applications possibles en linguistique voir [1], [5], [17], [26], [48], [57], [58], [61], [71]. La topologie des graphes est traitée dans [30], [31] et [78] ; les applications linguistiques de cette topologie sont discutées dans [47].

OUVRAGES CITÉS

[1] BACH, E., *An introduction to transformational grammars*. Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1964.

[2] BAR-HILLEL, Y., *Language and information. Selected essays on their theory and application*. Addison-Wesley Publishing Company and Jerusalem Academic press, 1964.

[3] BELECKIĬ, M. I., GRIGORJAN, V. M., ZASLAVSKIĬ, I. D., « Aksiomatičeskoe opisanie porjadka i upravlenija slov v nekotoryh tipah predloženii ». *Matematičeskie voprosy kibernetiki i vyčislitelnoi tehniki* (recueil d'études), Erevan, 1963, p. 71-85.

[4] BELLMAN, R., *Dynamic programming*, Princeton University Press, 1957.

[5] BENZÉCRI, J. P., « Physique et langue ». *La traduction automatique*, 1963, N° 2, p. 31-50.

[6] BERGE, C., *Théorie des graphes et ses applications*. Paris, Dunod, 1958.

[7] BERGE, C., GHOUILA-HOURI, A., *Programmes, jeux et réseaux de transport*. Dunod, Paris, 1962.

[8] BLOCH, B., « Studies in colloquial Japanese IV ; Phonemics ». *Language*, vol. 26, 1950, p. 86-125.

[9] BRILLOUIN, L., *Science and information theory*. Academic press inc.-publishers, New York, 1956.

[10] BRODDA, B., KARLGREN, H., « Relative positions of elements in linguistic strings ». *Statistical methods in linguistics*, vol. 3, 1964. Sprakförlaget Skriptor, p. 49-101.

[11] CHOMSKY, N., « Formal properties of grammars ». *Handbook of mathematical psychology* (R. D. Luce, R. R. Bush, E. Galanter editors), vol. 2, 1963, John Wiley and Sons, chapter 12, p. 323-418.

[12] CĂŞLARU, C., « Unele aplicaţii ale teoriei grafelor la studiul grupurilor consonantice finale din limba română ». *Studii şi cercetări matematice*, vol. 16, 1965, N° 2.

[13] ČULIK, K., « On chromatic decompositions and chromatic numbers of graphs ». *Publ. Fac. Sci. Univ. Brno*, N° 403, 1959, p. 177-185.

[14] ČULIK, K., « Applications of graph theory to mathematical logic and linguistics ». *Theory of graphs and its applications. Proceedings of the Symposium held in Smolenice in June* 1963. Prague, 1964, p. 13-20.

[15] EILENBERG, S., S. MAC LANE, « General theory of natural equivalences. » *Transactions of the American mathematical society*, vol. 58, 1945, p. 231-294.

[16] ERDÖS, P., « Some remarks on the theory of graphs ». *Bulletin of the American mathematical society*, vol. 53, 1947, p. 292-294.

[17] EVDOŠENKO, A., « Stereometričeskie modelirovanie i izomorfism », dans *Studii de limbă moldovenească* (recueil d'études), Cartea moldovenească, Kisineu, 1963, p. 127-143.

[18] FISCHER-JORGENSEN, E., « On the definition of phoneme categories on a distributional basis. » *Acta linguistica*, vol. 7, 1952, N° 1-2, Copenhague.

[19] FITIALOV, S. I., « O modelirovanii sintaksisa v strukturnoĭ lingvistike ». *Problemy strukturnoi lingvistiki*. Izd. Akad. nauk SSSR, 1962, p. 100-114.

[20] GAIFMAN, C., « Dependency systems and phrase-structure systems ». *P-2315 RAND Corporation, Proceedings of the International Congress on information processing*. UNESCO, Paris, 1959.

[21] GÅRDING, L., « Relations and order », *Studia linguistica*, vol. 6, 1955, p. 21-34.

[22] GENTILHOMME, Y., *Manuel de russe à l'usage des scientifiques*. Dunod, Paris, 1964.

[23] GENTILHOMME, Y., « Utilisation des graphes morphologiques pour l'enseignement du russe ». *La Traduction automatique*, 5e année, 1964, N° 2, p. 31-37.

[24] GLADKIĬ, A. V., « Konfiguracionnye karakteristiki jazykov ». *Problemy kibernetiki*, vol. 10, 1963, p. 251-260.

[25] GLADKIĬ, A. V., « Ob odnom sposobe formalizacii ponjatija sintaksičeskoi svjazi ». « *Problemy kibernetiki*, vol. 11, 1964, p. 199-213.

[26] GOODMAN, N., « Graphs for linguistics ». *Proceedings of the symposia in applied mathematics*, vol. 12. Structure of language and its mathematical aspects, 1961, p. 51-55.

[27] GREENBERG, J., « Nekotorye obobščenija, kasajusčiesja vozmožnyh načalnyh i konečnyh posledovatelnostei soglasnyh ». *Voprosy jazykoznanija*, 1964, N° 4, p. 41-65.

[28] GROSS, M., « Linguistique mathématique et langages de programmation ». *Revue française de traitement de l'information*, vol. 6, 1963, p. 231-253.

[29] HARARY, F., PAPER, H. H., « Toward a general calculus of phonemic distribution ». *Language*, vol. 33, 1957, N° 2, p. 143-169.

[30] HARTNETT, W. E., « Total topological spaces ». *Notices of the American mathematical society*, vol. 11, 1964, N° 5, p. 580.

[31] HARTNETT, W. E., « Graph topology ». *Notices of the American mathematical society*, vol. 11, 1964, N° 5, p. 535.

[32] HAYS, D. G., *Basic principles and technical variation in sentence structure determination*. RAND Corporation — P 1984. May, 1960.

[33] HAYS, D. G., *Dependency theory : A formalism and some observations*. Memorandum RM-4087-PR, RAND Corporation. July, 1964.

[34] HIRSCHBERG, L., *Le relâchement conditionnel de l'hypothèse de projectivité*, EURATOM, Rapport CETIS, N° 35, 1961.

[35] HORECKY, J., « Morfematická struktúra slovenčiny. » *Vydavtelstvo slovenskej Akadémie vied. Bratislava*, 1964.

[36] IORDANSKAJA, L. N., « Svoistva pravilnoi sintaktičeskoi struktury i algoritm ee obnaruženija (na materiale russkogo jazyka) ». *Problemy kibernetiki*, vol. 11, 1964, p. 215-244.

[37] IVANESCU, P. L., ROSENBERG, I., « Application of pseudo-Boolean programming to the theory of graphs ». *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie* vol. 3, 1964, p. 163-176.

[38] JAGLOM, A. M., JAGLOM, I. M., *Verojatnost i informacija*, 2e édition, Moscou, 1960, p. 189.

[39] KULAGINA, O. S., « Ob odnom sposobe opredelenija grammatičeskih ponjatii na baze teorii množestv ». *Problemy kibernetiki*, vol. 1, 1958, p. 203-214.

[40] LAMB, S. M., *Outline of stratificational grammar*. University of California, 1962.

[41] LECERF, Y., IHM P., *Eléments pour une grammaire générale des langues projectives*. Rapport GRISA, N° 1, 1960, p. 11-29.

[42] LEES, R. B., « A compact analysis for the Turkish personal morphemes ». *U. A. S.* vol. 13, 1962, p. 141-176.

[43] LEVIN, Ju. I., « Ob opisanii sistemy lingvističeskih obektov, obladajuščih obščim svoistvami ». *Voprosy jazykoznanija*, 1964, N° 4, p. 112-119.

[44] LYNCH, I., *Suggestions for modification of Lecerf theory of projectivity and of his stemmas, for the purposes of their application to « non-projective » Russian sentences*. EURATOM, Rapport CETIS, N° 35, 1961.

[45] MAGHOUT, K., « Sur la détermination des nombres de stabilité et du nombre chromatique d'un graphe ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, vol. 248, 1959, p. 3522-3523.

[46] MAGHOUT, K., « Applications de l'algèbre de Boole à la théorie des graphes et aux programmes linéaires et quadratiques ». *Cahiers du Centre d'études en recherches opérationnelles*, vol. 5, 1963, N° 1-2, p. 21-59.

[47] MARCUS, S., « Structures linguistiques et structures topologiques ». *Revue de mathématiques pures et appliquées*, vol. 6, 1961, N° 3, p. 501-506.

[48] MARCUS, S., « Teorija grafov, lingvističeskie oppozicii i invariantnaja struktura », *Problemy strukturnoi lingvistiki*, vol. 1, 1962, p. 22-30.

[49] MARCUS, S., « Sur la notion de projectivité ». *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, vol. 11, 1965, N° 2, p. 181-192.

[50] MARCUS, S., « Phrases arborescentes ». *T. A. Informations*, 1966, N° 1, p. 20-24.

[51] MARCUS, S., « Dependenţă şi subordonare ». *Hommage Rosetti* (volume dédié à l'académicien Al. Rosetti, à l'occasion de son 70e anniversaire), 1965, p. 527-531.

[52] MARCUS, S., « Sur une description axiomatique des liens syntaxiques ». *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, vol. 11, 1965, N° 4, p. 291-296.

[53] MARCUS, S., VASILIU, E., « Mathématiques et phonologie. La théorie des graphes et le consonantisme de la langue roumaine, I ». *Revue de mathématiques pures et appliquées*, vol. 5, 1960, N° 2, p. 319-340.

[54] MARCUS, S., VASILIU, E., « Mathématiques et phonologie. La théorie des graphes et le consonantisme de la langue roumaine, II ». *Revue de mathématiques pures et appliquées*, vol. 5, 1960, N° 3-4, p. 681-704.

[55] MILLER, G. A., FRIEDMAN, E. A., « The reconstruction of mutilated english texts ». *Information and Control*, vol. 1, 1957, p. 38-55.

[56] NEBESKY, L., « O jedné formalizaci vetného rozboru ». *Slovo a slovesnost*, vol. 23, 1962, N° 2, p. 104-107.

[57] NEBESKY, L., SGALL, P., « The relation of « form » and « function » in language ». *The Prague bulletin of mathematical linguistics*, 1964, N° 1, p. 29-37.

[58] NOVAK, P., Compte rendu du travail [20] ci-dessus. *The Prague bulletin of mathematical linguistics*, 1964, N° 1, p. 51-55.

[59] ORE, O., « Theory of graphs ». *American Math. Soc., Colloquium publications*, vol. 38, 1962.

[60] PADUČEVA, E. V., « O sposobah predstavlenija sintaktičeskoi struktury predloženija ». *Voprosy jazykoznanija*, 1964, N° 2, p. 99-113.

[61] PALEK, B., Compte rendu du travail [1] ci-dessus. *The Prague bulletin of mathematical linguistics*, 1964, N° 8, p. 38-41.

[62] PARKER-RHODES, A. F., MASTERMAN, M., *The derivation of syntactic relations from a lattice model*. Cambridge Language Research Unit. M. L. 147, 1961.

[63] POTTIER, B., *Introduction à l'étude des structures grammaticales fondamentales*. Publications linguistiques de la Faculté des lettres et sciences humaines de l'Université de Nancy, 1962.

[64] REVZIN, I. I., *Modeli jazyka*, Izd. Akad. nauk SSSR, Moskva, 1962.

[65] REVZIN, I. I., *V.* JU. ROZENCVEIG, *Teorija obščego i mašinnogo perevoda*. Izd. Nauka, Moskva, 1964.

[66] RICHARDSON, M., « On weakly ordered systems ». *Bulletin of the American math. soc.*, vol. 52, 1946, p. 113.

[67] RICHARDSON, M., « Solutions of irreflexive relations », *Annals of mathematics*, vol. 58, 1953, p. 573.

[68] RICHARDSON, M., « Extensions theorems for solutions of irreflexive relations ». *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 39, 1953, p. 649.

[69] RIGUET, J., « Programmation et théorie des catégories ». *Symbolic languages in data processing. Theory of languages, syntactical structure and metalanguages. Proc. Sympos. Intern. Comput. Centre, Rome*, 1962. Gordon and Breach, New York 1962, p. 83-98.

[70] RUDEANU, S., « On solving Boolean equations in the theory of graphs ». *Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées*, vol. 11, 1966, N° 5, p. 653-664.

[71] SCHNELLE, H., « CC-automata and CF-grammars », presented at the *Colloquium « Algebraic linguistics and automata theory »*, Jerusalem, August 24-25, 1964.

[72] SEDLACEK, J., *Kombinatorika v teorii a praxi. Uvod do teorie grafu*. Nakladatelstvi Ceskoslovenské akademie ved. Praha, 1964.

[73] SGALL, P., a kolektiv, *Cesty moderní jazykovedy*. Mala moderní encyklopedie, Orbis, Praha, 1964.

[74] SIGURD, B., « Rank order of consonants established by distributional criteria ». *Studia linguistica*, vol. 9, 1955, p. 8-20.

[75] SKOLEM, T., « Ein kombinatorischer Satz mit Anwendung auf ein logisches Entscheidungsproblem ». *Fundamenta Mathematicae*, vol. 20, 1933, p. 254-261.

[76] SREIDER, Ju. A., « Svoïstva proektivnosti jazyka ». *Naučno-tehniceskaja informacija*, 1964, N° 8, p. 38-41.

[77] TESNIÈRE, L., *Eléments de syntaxe structurale*. Klincksieck, Paris, 1959.

[78] TONDEUR, P., « Ein Beispiel zur allgemeinen Topologie : die Topologie einer Aquivalenzrelation ». *Annales Academiae scientiarum fennicae, series A, I. Mathematica*, N° 344, Helsinki, 1964.

[79] VASILIU, E., « Une classification des consonnes roumaines d'après le critère de la distribution ». *Mélanges linguistiques publiés à l'occasion du VIII^e Congrès international des linguistes* à Oslo, 1957, p. 97-112.

[80] VAUQUOIS, B., *Langages artificiels, systèmes formels et traduction automatique* (cours présenté à Venise, 15 au 31 juillet 1962) Grenoble, 1962.

[81] WEISSMAN, J., « Boolean algebra, map coloring and interconnections, *American mathematical monthly*, vol. 69, 1962, p. 608-613.

[82] YNGVE, V., « The depth hypothesis ». *Proceedings of the Symposia in applied mathematics*, vol. 12, Structure of language and its mathematical aspects. American mathematical society, 1961, p. 130-138.

Ajouté sur les épreuves

Voir aussi : Charles F. HOCKETT (« Language, Mathematics, and Linguistics », dans Thomas A. SEBEOK (ed.) *Current Trends in Linguistics*, vol. 3, Mouton & Co., the Hague, 1966, p. 155-304 ; *Beginnings of an Application of Category Theory to Algebraic Grammar*, manuscript, Cornell University, Ithaca, New York, 1965), Emese KIS, Ioana ANGHEL, Elena COMSULEA (« Description d'un aspect syntaxique de la langue roumaine à l'aide de la théorie des graphes ». *Revue roumaine de linguistique*, vol. 11, 1966, N° 5, p. 469-479 ; « The order of the syntactic elements of principal sentences in the Rumanian language by the method of the theory of graphs ». *Computational Linguistics*, vol. 5, 1966), S. MARCUS (*Algebraic Linguistics ; Analytical Models*. Academic Press, New York-London, 1967, chapitre 6), J. W. F. MULDER (« Some operations with sets in language ». *Foundations of Language*, vol. 1, 1965, N° 1, p. 14-29), P. NOVÁK (« Two types of formulae in quantitative Linguistics ». *The Prague Bulletin of Mathematical Linguistics*, 1964, N° 2, p. 11-14), V. A. MOSKOVIČ (« Opyt kvantitativnoï tipologii semantičeskogo polia ». *Voprosy jazykoznanija*, vol. 14, 1965, N° 4, p. 80-91), Anatol RAPOPORT, Amnon RAPOPORT, William P. LIVANT, John BOYD (« A study of lexical graphs » : *Foundations of Language*, vol. 2, 1966, N° 4, p. 338-376).

INDEX DES AUTEURS

INDEX TERMINOLOGIQUE

Imprimé en France. — Imprimerie JOUVE, 12, rue de Tournon, PARIS (6[e])
Dépôt légal : N° 5506, 3[e] trimestre 1967